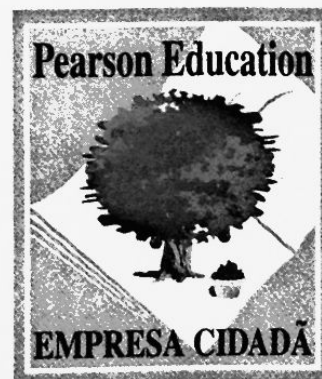
CÁLCULO

com Geometria Analítica

Volume 2

PEARSON

SIMMONS

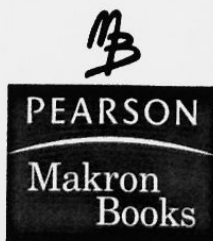
CÁLCULO COM GEOMETRIA ANALÍTICA

VOLUME 2

CÁLCULO COM GEOMETRIA ANALÍTICA

VOLUME 2

George F. Simmons
Professor de Matemática
Colorado College

Tradução
Seiji Hariki
Professor do Instituto de Matemática e Estatística – IME-USP

Revisão Técnica
Rodney Carlos Bassanezi
Silvio de Alencastro Pregnolatto
Professor do Instituto de Matemática, Estatística e
Ciências da Computação – IMECC – UNICAMP

São Paulo

Brasil Argentina Colômbia Costa Rica Chile Espanha
Guatemala México Peru Porto Rico Venezuela

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Simmons, George F.
Cálculo com geometria analítica V. 2 / George F. Simmons; tradução Seiji Hariki; revisão técnica Rodney Carlos Bassanezi, Silvio de Alencastro Pregnolatto
São Paulo: Pearson Makron Books, 1988

Título original: Calculus With Analytic Geometry

ISBN 978-85-346-1468-9

1. Cálculo 2. Geometria analítica I. Título.

87-0193 CDD-515.15

Índice para catálogo sistemático:

1. Cálculo e geometria analítica 515.15

Janeiro 2010
Direitos exclusivos para a língua portuguesa da
Pearson Education do Brasil,
uma empresa do grupo Pearson Education
Av. Ermano Marchetti, 1435
CEP: 05038-001 – São Paulo – SP
Fone (11) 2178-8686 Fax (11) 2178-8688
e-mail: vendas@pearsoned.com

AGRADECIMENTOS

A Editora deseja expressar publicamente os seus agradecimentos a todos os ilustres professores que muito nos honraram por seus comentários e sugestões, permitindo que este livro esteja de acordo com as atuais necessidades do ensino de Cálculo e Geometria Analítica.

Pedindo desculpas pela eventual omissão de alguns nomes, desejamos destacar:

AFFONSO SÉRGIO FAMBRINI
Mackenzie/FAAP – SP

ALINE TEREZA CARMINATI GONÇALVES
FATEC – SP

ÂNGELA M. F. DE MAGALHÃES PINTO
UFMG – MG

ANTÔNIO CATARUZZI
Fundação Santo André – SP

ANTÔNIO JOSÉ PINHEIRO DE ALMEIDA
PUC – SP

ANTÔNIO MARQUES VIEIRA CHAVES
AEVA/UFRJ – RJ

ANTÔNIO PERTENCE JÚNIOR
SENAI – MG

ARMANDO PEREIRA LORETO JÚNIOR
Fac. S. Judas Tadeu/Fac. Moema/FEI – SP

CÉLIA LOPES MARTINS
AEVA/USU – RJ

CÍNTIA AUGUSTA DE MENEZES BARBOSA
AEVA – RJ

CLÁUDIO JOÃO DALL'ANESE
IMES/FEI/Fac. Objetivo/Fund. Santo André – SP

DEBORAH RAPHAEL
USP – SP

EDUARDO A. VALÉRIO DOMINGUES
PUC – SP

EDUARDO J. DE SOUZA MONTENEGRO
Fac. S. Judas Tadeu/Fac. Moema/FGV – SP

FLÁVIO ANGELINE
PUC – SP

GERSON RODRIGUES DA ROCHA
Fac. Estácio de Sá/UGF – RJ

IZABEL CRISTINA R. TEIXEIRA VIANNA
Fac. Estácio de Sá – RJ

JOÃO ANTÔNIO POLIDO
Fac. S. Judas Tadeu/Fac. Moema/PUC/FMU – SP

JOÃO VIEIRA DE FARIA
SUAM – RJ

JOAQUIM DA SILVA CORRÊIA
AEVA/UFRJ – RJ

JOSÉ JUSTINO CASTILHO
Mack./EE Mauá/EE Piracicaba/FEC Araraquara – SP

JOSÉ MAURÍCIO MACHADO DA SILVA
UFMG

JUSSARA DE SOUZA TRANJAN
Fund. Santo André – SP

LAURITO ANTÔNIO PERRELLA
IMES – SP

LEILÁ M. V. FIGUEIREDO
USP – SP

LUCÍLIA BORSARI
USP – SP

LUIZ BARCO
USP/Escola de Engenharia de Lins – SP

LUIZ MAURO ROCHA
FEI/Fund. Santo André – SP

MARIA LUÍZA AZAMBUJA DE SOUZA
PUC – RS

NATALINA NEVES DIAS
Fac. S. Judas Tadeu

NEDA DA SILVA GONÇALVES
PUC – RS

ODUVALDO CACALANO
Fund. Santo André/IMES – SP

RICARDO BIANCONNI
USP – SP

ROBERT MALLET
PUC – SP

ROBERTO BARBOSA
Fund. Santo André/Fac. C. Pasquale (FICAP) – SP

ROBERTO DE MARIA NUNES MENDES
UFMG – MG

RONALDO SILVEIRA DE SOUZA
SUAM/USU/UCP – RJ

RUBENER DA SILVA FREITAS
FEI/PUC/Fund. Santo André – SP

SÉRGIO MARQUES BARBOSA
AEVA – RJ

VICTOR HUGO TEIXEIRA RODRIGUES
PUC – Campinas

SUMÁRIO

APÊNDICES

PREFÁCIO

É curioso que alguém que escreve um livro-texto de mil páginas pense ser necessário escrever um prefácio para explicar os objetivos: o próprio livro já seria o suficiente. No entanto, todo livro-texto – e este não é exceção – é tanto expressão de insatisfação com os livros existentes como uma proposta do que um tal livro deva conter: um prefácio oferece a última oportunidade para sintetizar a proposta. Além do mais, qualquer pessoa que contribua para aumentar a abundância de livros introdutórios de Cálculo deve ser intimada a justificar sua ação (ou talvez se desculpar por isto) a seus colegas da comunidade matemática.

Este livro pretende ser um texto de Cálculo que possa ser utilizado em toda espécie de curso superior em qualquer nível. Foi projetado particularmente para o curso-padrão de três semestres para estudantes de Ciência, Engenharia ou Matemática. O pré-requisito requerido é Álgebra e Geometria do 2º grau.

Não se supõe nenhum conhecimento especializado de Ciência, e os estudantes de Filosofia, História ou Economia podem ler e compreender as aplicações tão facilmente como qualquer outro estudante. Não há lei da natureza humana segundo a qual as pessoas com grande interesse pelas Ciências Humanas ou Sociais estejam automaticamente impedidas de compreender e de gostar de Matemática. A Matemática é, de fato, o palco de muitas das mais elevadas realizações da mente humana e deveria atrair os humanistas com a mesma força com a qual um campo de flores silvestres atrai as abelhas. Dizem, com razão, que a Matemática pode iluminar o mundo ou satisfazer a mente e, freqüentemente, ambas as coisas. Assim, um estudante de Filosofia, por exemplo, teria informação tão falha pela ausência de conhecimentos nesta área quanto um estudante de História sem uma ampla compreensão de Economia e de Religião. Assim, como poderiam os estudantes de Filosofia ou de História dar-se ao luxo de desprezar o fato (e é um fato!) de que o progresso da Matemática e das Ciências no século XVII foi o evento crucial no desenvolvimento do mundo moderno, muito mais profundo em significado histórico que as Revoluções Americana, Francesa e Russa? Nós, professores de Matemática, temos obrigação de ajudar tais estudantes neste aspecto de sua formação e o Cálculo é um excelente ponto de partida.

O texto em si – isto é, os 22 capítulos (Volumes I e II)* sem os apêndices – é tradicional na matéria e na organização. Dei grande ênfase à *motivação* e à *compreensão intuitiva*, e os refinamentos da teoria foram negligenciados. A maioria dos estudantes revela impaciência com a parte teórica do assunto, e com razão, pois a essência do Cálculo não está em teoremas e em como prová-los, mas nos instrumentos que fornece e na forma de utilizá-los. Meu propósito maior foi o de apresentar o Cálculo como arte poderosa de resolver problemas, arte que é indispensável em todas as ciências quantitativas. Naturalmente, desejo convencer o estudante de que os instrumentos-padrão do Cálculo são razoáveis e legítimos, mas não à custa de transformar o assunto numa disciplina lógica enfadonha, dominada por definições supercuidadosas, apresentações formais de teoremas e provas meticulosas. É minha esperança que toda explicação matemática nestes capítulos pareça ao estudante atento ser tão natural e inevitável quanto a água que flui no leito do rio. O objetivo principal do texto é explorar assuntos para os quais o Cálculo é útil – o que ele nos possibilita fazer e compreender – e não qual é sua natureza lógica, quando encarado do ponto de vista especializado (e limitado) do matemático puro moderno.

Há diversos aspectos do próprio texto que gostaria de comentar.

Material Anterior ao Cálculo Devido à grande extensão do Cálculo a ser coberta, é desejável começar com uma partida rápida, introduzir a derivada o mais cedo possível e demorar o mínimo na revisão do material anterior ao Cálculo. Entretanto, os estudantes constituem um grupo heterogêneo com níveis de preparação matemática bastante diferentes. Por essa razão, incluí um primeiro capítulo com material de revisão que recomendo aos professores omitir completamente ou tratar superficialmente, tanto quanto julgar aconselhável para seus alunos. Esse capítulo foi escrito com suficientes detalhes, de forma a que os estudantes que tenham necessidade de despender mais tempo nos preliminares consigam absorver a maior parte dele por si próprios com um pequeno esforço extra**.

Trigonometria O problema do que fazer com a trigonometria em cursos de Cálculo não tem tido solução satisfatória. Alguns autores introduzem o assunto cedo, parcialmente, para poder usar as funções trigonométricas no ensino da regra da cadeia. Essa abordagem tem a desvantagem de saturar os primeiros capítulos de Cálculo com material técnico que não é realmente essencial para os primeiros objetivos dos estudantes nesse estágio, que são compreender os significados e algumas das aplicações das derivadas e das integrais. Uma outra desvantagem dessa forma de tratamento é que muitos têm um único semestre de cálculo e para eles a trigonometria é uma complicação desnecessária da qual talvez eles devam ser dispensados. O fato é que a trigonometria só se torna realmente indispensável quando métodos formais de integração devem ser enfrentados.

Por essas razões, introduzo o cálculo de funções trigonométricas no Capítulo 9, de modo que todas as idéias estarão frescas quando os estudantes iniciarem o Capítulo 10, que trata dos métodos de integração. Uma exposição completa de trigonometria é dada na Seção 9.1. Para a maioria

---

* (*Nota do Tradutor*). 22 capítulos na edição portuguesa.

** Uma exposição mais completa da matemática do 2º grau, ainda respeitavelmente concisa, pode ser encontrada em meu livrete, *Precalculos Mathematics In a Nutshell* (William Kaufmann, Inc., Los Altos, Calif., 1981), 119 páginas.

dos estudantes, será uma revisão necessária da matéria aprendida (e, em grande parte, esquecida) no 2º grau. Para aqueles que não estudaram trigonometria, as explicações apresentadas são suficientemente completas e os estudantes poderão aprender o que necessitam a partir desta única seção.

Para os professores que prefiram apresentar a trigonometria mais cedo – e há boas razões para isto – destaco as Seções 9.1 e 9.2, que podem ser facilmente introduzidas diretamente após as Seções 9.3 e 9.4 ou podem perfeitamente ser apresentadas em qualquer estágio depois do Capítulo 6. Os únicos ajustes necessários são advertir os estudantes a não trabalharem as partes (b), (c) e (d) do Exemplo 2 da Seção 9.2 e também informá-los de que os Problemas 15-18 da Seção 9.2; 12, 16, 17 e 29 da Seção 9.3; e 11, 12 e 24 da Seção 9.4 não são exercícios para casa.

Problemas Para os estudantes, as partes mais importantes de seu livro de Cálculo podem bem ser os conjuntos de problemas, pois é neles que gastam a maior parte de seu tempo e energia. Há mais de 5.800 problemas neste livro, incluindo muitos dos velhos problemas de apoio, familiares a todos os professores de Cálculo, analisados desde o tempo de Euler e mesmo antes. Tentei retribuir nosso débito ao passado criando novos problemas, sempre que possível. Os conjuntos de problemas foram cuidadosamente construídos, começando com exercícios de cálculo de rotina e passando a problemas mais complexos que exigem níveis mais elevados de pensamento e de habilidade. Os problemas mais complexos são marcados com um asterisco (*). Em geral, cada conjunto contém aproximadamente o dobro de problemas que a maioria dos professores gostaria de passar para trabalho de casa, de forma que um grande número fica para os estudantes usarem como material de revisão.

A maioria dos capítulos termina com longas listas de problemas suplementares. Muitos deles pretendem apenas fornecer escopo e variedade adicionais aos conjuntos de problemas dos fins das seções. Entretanto, os professores e estudantes devem tratar desses problemas suplementares com cuidado especial, pois alguns são bastante sutis e difíceis e devem ser enfrentados por estudantes munidos de amplas reservas de energia e tenacidade.

Devo mencionar também que há diversas seções espalhadas por todo o livro não coroadas com uma relação de problemas correspondentes. Às vezes, essas seções ocorrem em grupos pequenos e são meramente subdivisões convenientes do que considero um tópico isolado e portanto têm uma única lista de exercícios, como no caso das Seções 6.1, 6.2, 6.3, 6.4 e 6.5. Em outros casos (Seção 9.7 e Seções 14.12, 15.5, 19.4 e 20.9, Volume II) a ausência de problemas é uma sugestão tácita de que o assunto tratado deve ser tocado de leve e com brevidade.

Há um grande número de problemas "com histórias" espalhados por todo o livro. Todos os professores sabem que os estudantes tremem diante desses problemas, pois usualmente exigem pensamento não-rotineiro. Entretanto, a utilidade da Matemática nas várias ciências demanda que tentemos ensinar os nossos estudantes a penetrar no significado de um problema com estória, julgar o que é relevante e traduzir as palavras para esboços e equações. Sem essas habilidades – que são igualmente valiosas para os estudantes que se tornarão doutores, advogados, analistas financeiros ou pensadores de qualquer natureza – não há educação matemática digna desse nome.

Séries Infinitas Todo matemático que der uma olhada no Capítulo 14 (Volume II) verá de imediato que "séries infinitas" é um de meus temas favoritos. No calor de meu entusiasmo, desenvolvi esse tópico com profundidade maior e com mais detalhes do que é usual em livros de Cálculo. Entretanto, alguns professores podem não desejar dedicar muito tempo e atenção a esse tópico e para sua conveniência, dei um tratamento breve no Capítulo 13 (Volume II), que deve ser suficiente para as necessidades da maioria dos estudantes que não estão planejando prosseguir em cursos mais avançados de Matemática. Os professores que, como eu, consideram que o assunto é de fato importante, irão provavelmente utilizar ambos os capítulos, o primeiro para dar um panorama e o segundo para estabelecer uma fundamentação sólida e fixar os conceitos básicos. Esses capítulos foram concebidos com espíritos bastante diferentes e, surpreendentemente, há pouca repetição.

Equações Diferenciais e Análise Vetorial Cada um desses assuntos é por si só um ramo importante da Matemática. Eles devem ser ensinados em cursos separados, após o Cálculo, com tempo amplo para explorar seus métodos e aplicações específicos. Uma das principais responsabilidades de um curso de Cálculo é preparar o caminho para esses assuntos mais avançados e dar alguns passos preliminares nessa direção, mas o quanto se deve ir é uma questão discutível. No caso de equações diferenciais, o assunto é introduzido tão cedo quanto possível (Seção 5.4) e retornamos a ele de um modo restrito sempre que surge a oportunidade (Seções 5.5, 7.8, 8.5, 8.6 e 9.6 e Seções 17.7, 9.9, Volume II), completando com um estudo mais detalhado no Capítulo 22 (Volume II). Em análise vetorial acredito que o Teorema de Green é exatamente o ponto certo para parar, com o Teorema de Stokes – que é um dos teoremas mais profundos e de longo alcance de toda a Matemática – sendo deixado para um curso posterior. Para os que desejarem incluir mais análise vetorial em seu curso de Cálculo, dou um tratamento resumido do Teorema da Divergência e do Teorema de Stokes – com problemas – nos Apêndices A.15 e A.16 (Volume II).

Um dos principais aspectos que distinguem este livro e o tornam talvez único em relação a todos os demais, é notado pelo exame dos apêndices, que comentarei rapidamente. Antes de fazê-lo, enfatizo que este material é inteiramente separado do texto principal, podendo ser cuidadosamente estudado, consultado ocasionalmente ou completamente ignorado, conforme o desejo de cada estudante ou professor.

Apêndice A Ensinando Cálculo durante vários anos, coletei uma quantidade considerável de tópicos de Teoria dos Números, Geometria, Ciência etc., que tenho usado com o propósito de abrir as portas e estabelecer ligações com outros assuntos... e também para sair da rotina e despertar os espíritos. Muitos de meus estudantes acharam essas "pepitas" interessantes e estimulantes. Coletei a maioria desses tópicos nesse apêndice com a esperança de conquistar alguns adeptos à visão de que a Matemática, embora às vezes tediosa e rotineira, pode, com freqüência, ser sumamente interessante.

Apêndice B No corpo do texto, o nível de rigor matemático aumenta e diminui de acordo com a natureza do assunto estudado. É bastante baixo nos capítulos geométricos, onde confio no senso comum e na intuição e acrescento ilustrações; é bastante elevado nos capítulos sobre as séries infinitas, onde a substância do assunto não pode realmente ser compreendida sem um pensamento cuidadoso. Tive sempre em mente o fato de que a maioria dos estudantes tem pouco interesse no raciocínio puramente matemático em si e tentei evitar esse tipo de material, introduzindo apenas o absolutamente necessário. Alguns estudantes, no entanto, têm um gosto natural

por teoria, e alguns professores encaram como questão de princípio que todos os estudantes devam estar expostos a uma certa quantidade de teoria para seu próprio bem. Esse apêndice contém virtualmente todo o material teórico que por qualquer esforço da imaginação poderia ser considerado apropriado para o estudo do Cálculo. Do ponto de vista puramente matemático, é possível para os professores dar cursos em muitos níveis diferentes de sofisticação usando – ou não – o material selecionado contido nesse apêndice.

Em resumo, o corpo principal deste livro é direto e tradicional, e os apêndices o tornam conveniente para os professores, permitindo-lhes, em correspondência a seus interesses e opiniões, oferecer uma ampla variedade de cursos adaptados às necessidades de suas próprias classes. Pretendi a máxima flexibilidade de uso.

Apêndice C Esse material compõe-se de uma pequena história biográfica da Matemática desde seus primeiros tempos até meados do século XIX. Ele tem dois objetivos principais.

Primeiro, espero dessa maneira "humanizar" o Cálculo, tornar transparentemente claro que grandes homens criaram-no com genialidade. Dessa forma almejo aumentar o interesse dos estudantes naquilo que estão estudando. As mentes de muitas pessoas evitam enfrentar problemas – mudam de direção, ausentam-se, eludem o contato, mudam de assunto, pensam em alguma outra coisa a todo custo. Essas pessoas – a grande maioria da raça humana – encontram consolo e conforto no que conhecem e no que lhes é familiar, evitando o desconhecido. É tão difícil para elas pensar regularmente em um problema difícil quanto manter juntos os pólos norte de dois fortes ímãs. Em contraste, uma minúscula minoria é atraída irresistivelmente pelos problemas: envolvem-se e lutam com eles, sem descanso, até que seus segredos sejam revelados. É essa minoria que ensina aos outros muito do que se sabe e se pode fazer, desde a roda e a balança à metalurgia e à Teoria da Relatividade. Escrevi sobre algumas dessas pessoas de nosso passado na esperança de encorajar elementos dessa geração.

Meu segundo objetivo está ligado ao fato de que muitos estudantes de Ciências Humanas e Ciências Sociais são obrigados, contra a própria vontade, a estudar Cálculo só para satisfazer requisitos acadêmicos. As profundas conexões que unem a Matemática à história da Filosofia e também à mais ampla história social e intelectual da civilização ocidental, são muitas vezes capazes de aumentar o interesse desses estudantes que, de outro modo, se mostrariam indiferentes.

George F. Simmons

AO ESTUDANTE

Embora não pareça, nenhum autor tem a intenção deliberada de produzir um livro ilegível; todos nós fazemos o que podemos e esperamos ter feito o melhor. Naturalmente, espero que minha linguagem seja clara e útil para os estudantes; no fim só eles estão qualificados para julgar. Entretanto, seria uma grande vantagem para todos nós – professores e estudantes – se de algum modo fossem dadas aos estudantes usuários de livros-texto de Matemática algumas sugestões sobre a arte de ler Matemática, que é muito diferente da de ler novelas, revistas ou jornais.

Nos cursos de Matemática do 2º grau, a maioria dos estudantes está acostumada a tentar resolver primeiro os exercícios para casa, com impaciência, para terminar toda a tarefa penosa o mais rapidamente possível. Esses estudantes lêem as explicações no texto apenas como último recurso. Este é o oposto grotesco do procedimento razoável e tem tanto sentido quanto tentar pôr os sapatos antes das meias. Minha sugestão é que os estudantes leiam primeiro o texto e quando este estiver totalmente assimilado *então e só então* passem para os exercícios de casa.

Como um estudante deve ler o texto de um livro como este? Devagar e com cuidado, e com total consciência de que um grande número de detalhes terá sido deliberadamente omitido. Se este livro contivesse todos os detalhes de cada tema, seria cinco vezes maior, o que seria pecado mortal! Há um velho provérbio francês que diz: "Aquele que tenta explicar tudo acaba falando sozinho". Todo autor de um livro dessa natureza tenta andar num estreito caminho entre dizer demais e dizer de menos.

As palavras "evidentemente", "é fácil ver" e expressões semelhantes não têm intenção de serem consideradas ao pé da letra e jamais devem ser interpretadas por um estudante como menosprezo de suas habilidades. Estas são frases-padrão utilizadas na escrita matemática há centenas de anos. Seu propósito é dar um sinal ao leitor cuidadoso de que nesse lugar particular a exposição é algo condensada e que alguns detalhes de cálculo foram omitidos. Toda frase como estas equivale a uma sugestão amigável para o estudante de que talvez seja uma boa idéia ler ainda com mais cuidado e meditação a fim de preencher as lacunas da exposição, ou talvez lançar mão de uma

folha de rascunho para verificar detalhes de cálculo que foram omitidos. Ou melhor ainda, fazer total uso das margens deste livro para enfatizar pontos, levantar questões, fazer pequenos cálculos e corrigir erros de impressão.

CAPITULO

13

INTRODUÇÃO ÀS SÉRIES INFINITAS

13.1 O QUE É UMA SÉRIE INFINITA?

Já tocamos nesse assunto diversas vezes, mas agora chegou a hora de enfrentá-lo diretamente.

Uma *série infinita,* ou simplesmente uma *série,* é uma expressão da forma

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots, \tag{1}$$

onde as reticências no final indicam que os termos continuam indefinidamente. Em outras palavras, há infinitos números a_n (um para cada inteiro positivo n) e (1) é a soma indicada dessa coleção infinita de termos. O número a_n chama-se *n-ésimo termo* da série e usualmente é alguma função simples de n. O incluímos em (1) se desejamos fazer uma declaração explícita da Lei de Formação dos Termos. Entretanto, se essa lei é clara a partir do contexto, podemos escrever (1) mais informalmente como

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots \text{ ou } a_1 + a_2 + \dots$$

Usaremos com freqüência a notação sigma da Seção 6.3 para escrever a série (1) na forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

que se lê "a soma de a_n para n de 1 a infinito".

Não é preciso dizer que é impossível realizar a operação de adição uma infinidade de vezes – a vida não é suficientemente longa –, e assim (1) não pode ser interpretada literalmente, e seu significado deve ser abordado de maneira mais sutil. Foi uma das grandes conquistas da Matemática do século XIX descobrir que pode ser dado a (1) um significado perfeitamente razoável e satisfatório. Com precaução, esse significado nos permite trabalhar com tais expressões com a

mesma facilidade como se elas envolvessem somente um número finito de termos. Em muitos casos, seremos realmente capazes de encontrar o número que é a soma exata da série infinita, e essas somas, com freqüência, chegam mesmo a ser surpreendentes.

Chegaremos a isto na Seção 13.2, mas, primeiro, consideraremos resumidamente alguns processos naturais pelos quais as séries infinitas aparecem na Matemática.

A Discutimos o significado geométrico de decimais infinitas na Seção 1.2. No entanto, tratava-se apenas de uma interpretação, e, com freqüência, omite-se que uma decimal infinita é *definida*, de maneira puramente numérica, como a série infinita,

$$0{,}a_1a_2a_3 \ldots a_n \ldots = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} + \cdots, \tag{2}$$

onde cada um dos a's é um dos dez algarismos 0, 1, 2, ... , 9.

Todos sabem que

$$\tfrac{1}{3} = 0{,}333 \ldots, \tag{3}$$

mas nem todos estão certos do por quê ou mesmo do que significa. Essa afirmação não é absolutamente surpreendente, porque (3) não pode ser totalmente compreendida sem algum conhecimento de séries infinitas, pelo menos suficiente para utilizar (2) com o fim de calcular o segundo membro de (3). Discutiremos essa questão e outras relacionadas na Seção 13.2.

B A divisão elementar

$$\begin{array}{r|l} & 1 + x + x^2 + \cdots \\ \hline 1 - x & 1 \\ & \underline{1 - x} \\ & \quad x \\ & \quad \underline{x - x^2} \\ & \qquad x^2 \\ & \qquad \underline{x^2 - x^3} \\ & \qquad\quad x^3 \cdots \end{array}$$

mostra que

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} + \frac{x^n}{1-x}. \tag{4}$$

Esse processo pode ser efetuado em quantos passos desejarmos, e é natural querer saber como a função do primeiro membro de (4) está relacionada com a série infinita que parece formar-se no segundo membro. Isto é, seria verdade que

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots ?$$

A maioria dos leitores já viu essa série antes, em Álgebra Elementar, relacionada com progressões geométricas.

C Como vimos na Seção 3.5, o Teorema do Binômio de Newton pode ser escrito na forma

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots k}x^k + \cdots, \quad (5)$$

onde n é um inteiro positivo. Por exemplo, quando $n = 4$, essa fórmula produz a expansão

$$(1+x)^4 = 1 + 4x + \frac{4\cdot 3}{1\cdot 2}x^2 + \frac{4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^4 + \frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 0}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}x^5 + \cdots$$

$$= 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4.$$

Nesse caso, é claro que os coeficientes de x^5, x^6 etc. são todos nulos e que a expansão é uma soma finita. A fórmula (5) é provada em Álgebra Elementar somente para expoentes n que são inteiros positivos, ou seja, envolvendo somente somas finitas.

No entanto, por curiosidade, vejamos o que acontece quando aplicamos (5) no caso $n = \frac{1}{2}$. Isto nos dá a expansão

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})}{1\cdot 2}x^2 + \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \cdots$$

$$= 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{1\cdot 2}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{x}{2}\right)^3 - \cdots, \quad (6)$$

e esta é evidentemente uma série infinita, pois nenhum dos coeficientes das várias potências de x é nulo. Essa fórmula é legítima? Se testarmos sua validade, fazendo $x = 0,2$, teremos

$$\sqrt{1{,}2} = 1 + 0{,}1000 - 0{,}0050 + 0{,}0005 - \cdots.$$

Se usarmos apenas os primeiros quatro termos mostrados no segundo membro, teremos para $\sqrt{1{,}2}$ o valor aproximado de 1,0955; o valor de $\sqrt{1{,}2}$ dado em uma tabela é 1,0954. Parece razoavelmente claro a partir desse fragmento de evidência numérica que (6) pode mesmo ser uma fórmula válida, pelo menos para alguns valores não-nulos de x. E isto, por sua vez, levanta a possibilidade de que (5) pode ser, ela própria, válida para certos x's não-nulos em todos aqueles casos em que o expoente n não seja um inteiro positivo, isto é, quando o segundo membro de (5) é uma série infinita.

Essas observações sugerem muitas questões abrangentes que são ricas em expectativas de aplicações proveitosas, mas essas questões não são fáceis de se responder. Um de nossos propósitos ao estudar séries infinitas é substituir essa espécie de especulação e conjectura por respostas definitivas.

D Finalmente, as séries infinitas aparecem de um modo muito persistente no estudo de equações diferenciais. Para vermos como isto acontece, consideremos a equação simples.

$$\frac{dy}{dx} = y. \tag{7}$$

Essa equação terá como solução uma função que não se afeta por derivação, e sabemos que $y = c\,e^x$ é uma tal função, para toda constante c. Mas, para enfatizar o ponto que desejamos salientar, vamos supor que não conheçamos nenhuma solução e tentemos descobrir alguma. Como os polinômios são as funções mais simples de todas, poderíamos começar a tentar com essa classe de funções. Mas não temos idéia de que grau escolher para a solução polinomial procurada. Isto nos sugere o uso de um pouco de incerteza criativa, e, assim, deixamos sem especificação o grau e tentamos determinar os coeficientes $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$, de sorte que

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \cdots \tag{8}$$

seja uma solução de (7). Derivando (8), termo a termo, obtemos

$$\frac{dy}{dx} = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \cdots ; \tag{9}$$

e substituindo (8) e (9) em (7), temos

$$a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \cdots = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots . \tag{10}$$

Igualando agora os coeficientes de potências iguais de x em (10), obtemos

$$a_1 = a_0, \quad 2a_2 = a_1, \quad 3a_3 = a_2, \quad 4a_4 = a_3, \quad \ldots ,$$

logo,

$$a_1 = a_0, \quad a_2 = \frac{a_1}{2} = \frac{a_0}{2}, \quad a_3 = \frac{a_2}{3} = \frac{a_0}{2\cdot 3}, \quad a_4 = \frac{a_3}{4} = \frac{a_0}{2\cdot 3\cdot 4}, \ldots . \tag{11}$$

Nesse ponto, lembramos aos estudantes a notação de fatorial introduzida na Seção 3.5. Se n é um inteiro positivo, escrevemos

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \tag{12}$$

e dizemos n *fatorial*. Assim, $1! = 1$; $2! = 1 \cdot 2 = 2$; $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$; $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$; $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ e assim por diante. A definição (12) não tem sentido no caso $n = 0$, mas por diversos motivos é costume definir 0! como $0! = 1$. Iremos, com freqüência, utilizar fatoriais nos próximos capítulos; logo, haverá ampla oportunidade para que os estudantes fiquem completamente familiarizados com essa notação.

Voltando a nosso problema, podemos usar a notação fatorial para escrever as equações (11) sob a forma

$$a_1 = a_0, \qquad a_2 = \frac{a_0}{2!}, \qquad a_3 = \frac{a_0}{3!}, \qquad a_4 = \frac{a_0}{4!}, \quad \ldots .$$

Nossa tentativa de solução (8) da equação diferencial (7) torna-se, portanto,

$$\begin{aligned} y &= a_0 + a_0 x + \frac{a_0}{2!}x^2 + \frac{a_0}{3!}x^3 + \frac{a_0}{4!}x^4 + \cdots \\ &= a_0\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right), \end{aligned} \tag{13}$$

onde a_0 é uma constante arbitrária. Comparando essa solução com as soluções conhecidas ce^x, somos levados à conjectura natural de que a função exponencial e^x é igual à série infinita mostrada entre parênteses:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots .$$

Verifica-se que essa fórmula é realmente válida. De fato, para todos os valores de x podemos calcular e^x tão precisamente quanto desejarmos a partir da série tomando um número suficiente de termos. É dessa forma que são construídas as tabelas numéricas para e^x. Entretanto, os estudantes devem compreender claramente que essa discussão é meramente sugestiva e não é, de modo algum, uma prova válida. As provas virão depois.

Ao tentar resolver outras equações diferenciais com o procedimento que acabamos de usar, somos levados a outras séries, algumas representando funções familiares e algumas representando funções desconhecidas. Por exemplo, a equação diferencial

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + xy = 0$$

tem tantas aplicações à Física-Matemática que recebeu um nome especial: chama-se a *Equação de Bessel de Ordem Zero*, em homenagem ao famoso astrônomo alemão que viveu no século XIX. Uma das soluções dessa equação é a série infinita.

$$y = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \cdots .$$

Essa série define uma nova função de x, que é suficientemente importante para ter seu próprio símbolo-padrão e seu próprio nome: é denotada por $J_0(x)$ e chama-se *Função de Bessel de Ordem Zero*.

Nossa principal meta neste capítulo é fornecer uma visão panorâmica de séries infinitas antes de começar um desenvolvimento sistemático da teoria. Concentraremos nossa atenção mais nos exemplos específicos, nas fórmulas importantes e na utilização de procedimentos indispensáveis, tais como a derivação e a integração termo a termo das séries de funções. Dessa maneira, os estudantes estarão em melhor situação para compreender a teoria exposta no Capítulo 14, pois terão uma familiaridade maior com a matéria e, portanto, maior discernimento.

Em séries infinitas, como em quase todo cálculo, há certas coisas que desejamos ser capazes de fazer livremente com os instrumentos de que dispomos, e o papel da teoria é mais para justificar e legitimar os vários procedimentos (por exemplo, a derivação e integração termo a termo anteriormente mencionados) que são necessários para efetuar nossos propósitos. Essa situação foi bem expressa pelo famoso financista J. P. Morgan ao descrever o papel dos advogados em suas operações empresariais: "Não contrato advogados para me dizerem o que não posso fazer", dizia ele, "contrato-os para encontrar meios legais para que eu possa fazer o que eu quero fazer".

13.2 CONVERGÊNCIA E DIVERGÊNCIA DE SÉRIES

A idéia de "adição infinita" aparece em sua forma mais transparente na famosa fórmula

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = 2. \qquad (1)$$

Muitos concordam que a "soma" à esquerda é exatamente igual a 2, como indicamos, mas nem todos se lembram exatamente do porquê. A razão é que começamos com 1 (total parcial = 1), depois somamos 1/2 (total parcial = $1\frac{1}{2}$), depois somamos 1/4 (total parcial = $1\frac{3}{4}$) e assim por diante, produzindo a *seqüência de somas parciais*.

$$1, 1\tfrac{1}{2}, 1\tfrac{3}{4}, \ldots .$$

Essa seqüência se aproxima visivelmente de 2 (seu limite) e é precisamente este o significado que damos à expressão: "a soma da série é 2"*.

O exemplo que apresentamos a seguir é o de uma série geométrica, um tipo muito importante de série infinita estudada freqüentemente no 2º grau. Para formá-la necessitamos de um número $a \neq 0$ e um outro número r entre -1 e 1. Obtemos os termos da *progressão geométrica*.

$$a, ar, ar^2, ..., ar^n, ...$$

O número r chama-se *razão*, pois é a razão entre cada termo da progressão e seu antecessor. Nosso propósito é calcular a soma da *série geométrica* formada a partir dessa progressão,

$$a + ar + ar^2 + ... + ar^n + ... \tag{2}$$

A partir de (2) chamamos a soma finita dos termos de a a ar^n de n-ésima *soma parcial*, e a denotamos por s_n. Assim,

$$s_1 = a + ar,$$
$$s_2 = a + ar + ar^2,$$
$$\cdots$$
$$s_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n,$$
$$\cdots.$$

Se (2) possuir uma soma exata s, então certamente parece razoável que devemos nos aproximar cada vez mais de s quando somamos cada vez mais termos; isto é, quando as somas parciais s_n são tomadas para n cada vez maior. Isto significa que devemos ser capazes de calcular a soma s como um limite

$$s = \lim_{n \to \infty} s_n. \tag{3}$$

* As palavras "seqüência" e "série" têm essencialmente o mesmo significado na linguagem comum, mas, em Matemática, seus significados são bem distintos. Uma seqüência é uma lista infinita de números arranjados em ordem, com um primeiro, um segundo e assim por diante. Uma série é uma soma infinita ordenada de números. Abordaremos seqüências com mais cuidado no próximo capítulo; por ora é suficiente compreender intuitivamente o que se quer dizer com a afirmação de que uma seqüência $s_1, s_2, ..., s_n, ...$ tende – ou converge – a um limite L: queremos dizer que s_n pode ser tomado tão próximo quanto desejarmos de L, tomando n suficientemente grande, isto é, indo suficientemente longe na seqüência. Esse comportamento é simbolizado escrevendo

$$\lim_{n \to \infty} s_n = L \quad \text{ou} \quad s_n \to L.$$

Está tudo muito bem em princípio, mas o que torna possível um cálculo explícito é o fato de que existe uma fórmula fechada smples para a n-ésima soma parcial s_n como função de n. Para achar essa fórmula, multiplicamos s_n por r e escrevemos as duas somas juntas, como se segue:

$$s_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n,$$
$$rs_n = ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n+1}.$$

Vemos imediatamente que essas somas têm muitos termos em comum. Isto sugere que devemos subtrair a segunda equação da primeira e tirar vantagem dos cancelamentos indicados, obtendo-se

$$s_n - rs_n = a - ar^{n+1}$$

ou

$$s_n = \frac{a(1 - r^{n+1})}{1 - r}, \tag{4}$$

pois $r \neq 1$. Mas sabemos que $r^{n+1} \to 0$ quando $n \to \infty$, porque $|r| < 1$. É portanto claro que

$$s_n = \frac{a(1 - r^{n+1})}{1 - r} \to \frac{a}{1 - r} \quad \text{quando } n \to \infty.$$

Assim, admitindo que existe uma soma exata s para a série geométrica (2), podemos usar a fórmula (4) para calculá-la por meio da idéia expressa em (3),

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{a}{1 - r}.$$

Isto é o que queremos dizer quando escrevemos

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n + \cdots = \frac{a}{1 - r}, \qquad |r| < 1. \tag{5}$$

Exemplos Agora ficou fácil compreender o significado total da fórmula (1): a série à esquerda é uma série geométrica com $a = 1$ e $r = 1/2$; logo, por (5) temos

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$$

Analogamente,

$$1 + \frac{2}{5} + \frac{4}{25} + \cdots + \left(\frac{2}{5}\right)^n + \cdots = \frac{1}{1 - \frac{2}{5}} = \frac{5}{3}.$$

e

$$2-\frac{4}{3}+\frac{8}{9}-\cdots+2\left(-\frac{2}{3}\right)^n+\cdots=\frac{2}{1-(-\frac{2}{3})}=\frac{6}{5}.$$

Além disso, se escrevemos a decimal periódica 0,333... como uma série infinita e aplicamos (5) ao 2º termo, chegamos ao resultado mencionado na Seção 13.1,

$$\begin{aligned} 0{,}333\ldots &= \frac{3}{10}+\frac{3}{10^2}+\frac{3}{10^3}+\cdots \\ &= \frac{3}{10}+\frac{3}{10}\left(\frac{1}{10}\right)+\frac{3}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^2+\cdots \\ &= \frac{\frac{3}{10}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{3}{10}\left(\frac{10}{9}\right)=\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Agora reconsideramos as idéias discutidas acima e introduzimos uma pequena mas significativa mudança em nosso ponto de vista. Nenhuma investigação posterior revela outra maneira de se calcular a soma exata da série geométrica (2) diferente da realizada através do limite $s = \lim s_n$. Portanto, em vez de simplesmente admitir que a série tem uma soma e que nossa única tarefa seja calculá-la, é logicamente melhor inverter nosso enfoque e *definir* a soma da série (2) como sendo o número calculado dessa maneira que, como sabemos, existe. Essa alteração do ponto de vista é extremamente importante para esclarecer nossa compreensão da série infinita em geral, pois – como veremos – algumas séries têm somas e outras não.

Essas idéias fornecem o padrão de nosso estudo mais amplo de séries infinitas e das somas de quaisquer outras séries

$$a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots \tag{6}$$

que serão definidas e calculadas da mesma maneira. Assim, iniciamos formando a *seqüência de somas parciais*

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1, \\ s_2 &= a_1+a_2, \\ s_3 &= a_1+a_2+a_3, \\ &\cdots \\ s_n &= a_1+a_2+\cdots+a_n, \\ &\cdots . \end{aligned}$$

Se essa seqüência de somas parciais cada vez maiores tende a um limite finito s, então dizemos que a série (6) *converge* a s. Escrevemos isto na forma

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = s,$$

e chamamos o número s de *soma* da série. A conclusão a que chegamos acerca da série geométrica pode agora ser expressa como se segue: se $|r| < 1$, *então a série geométrica* $a + ar + ar^2 + \ldots$ *converge e sua soma é* $a/(1-r)$.

Quando uma série infinita não tem uma soma, dizemos que *diverge*. Isto significa que as somas parciais s_n não tendem a um limite finito quando $n \to \infty$, e isto pode acontecer de diversas maneiras diferentes.

Por exemplo, suponha que consideramos a série

$$1 + 1 + \cdots + 1 + \cdots, \tag{7}$$

em que $a_n = 1$ para todo inteiro positivo n. Nesse caso a n-ésima soma parcial s_n é exatamente a soma de n 1's, logo $s_n = n$. Quando $n \to \infty$, é óbvio que s_n cresce arbitrariamente e portanto não tende a qualquer limite finito. Por essa razão, dizemos que a série (7) *diverge a* ∞.

Um exemplo mais interessante de uma série que diverge a ∞ é a chamada *série harmônica*.

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots. \tag{8}$$

O fato de que essa série diverge não é de modo algum óbvio, principalmente porque não temos fórmulas simples para s_n. Entretanto, se juntarmos os termos em grupos convenientes, veremos que

$$\begin{aligned} &1 + \tfrac{1}{2} + \overline{\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}} + \overline{\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8}} + \cdots \\ &> 1 + \tfrac{1}{2} + \underbrace{\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}} + \underbrace{\tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8}} + \cdots \\ &= 1 + \tfrac{1}{2} + \quad \tfrac{1}{2} \quad + \qquad \tfrac{1}{2} \qquad + \cdots, \end{aligned}$$

ou seja, tomando n suficientemente grande podemos arranjar que s_n contenha tantos 1/2 s quanto quisermos e, portanto, s_n pode ser tornado arbitrariamente grande. Dessa maneira vemos que a série harmônica (8) diverge a ∞.

Uma outra espécie de divergência é ilustrada pela série

$$1 + (-1) + 1 + (-1) + \cdots,$$

em que $a_n = (-1)^{n+1}$ para todo inteiro positivo n. (Essa série é escrita habitualmente como: $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$) Aqui a seqüência das somas parciais, é fácil de ver, é 1, 0, 1, 0, ..., logo s_n não cresce arbitrariamente, mas não se aproxima de nenhum limite finito. Em vez disso, oscila indefinidamente entre os números 1 e 0 e, portanto, a série evidentemente não tem soma.

Um teste simples de divergências que é muitas vezes útil é o *teste do n-ésimo termo:*
Se a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \tag{9}$$

converge, então $a_n \to 0$ *quando* $n \to \infty$; *ou, de modo equivalente, se* a_n *não tende a zero quando* $n \to \infty$, então a série *(9) deve necessariamente divergir.*

Para provar isto, consideramos a primeira das duas formas equivalentes do teste e admitimos que a série (9) convirja à soma s. Devemos agora mostrar que $a_n \to 0$. O argumento pode ser apresentado como se segue. Desde que ambos s_n e s_{n-1} estejam próximos de s, quando n é grande, eles estão próximos entre si e sua diferença, que é a_n, deve estar próxima de zero.

Observação 1 *Decimais periódicos.* O procedimento para converter qualquer número racional a/b (irredutível) em sua expansão decimal é bem conhecido: dividir a por b. Vamos realizar esse procedimento no caso do número racional 22/7, que é muitas vezes usado como uma boa apoximação de π:

```
    3,142857142857 . . .
 7 |22,0000000 . . . . . . .
    21
     1 0
      7
      30
      28
       20
       14
        60
        56
         40
         35
          50
          49
          10 . . .
```

Os restos sucessivos aqui são 1, 3, 2, 6, 4, 5, 1; tão logo apareça o 1 uma segunda vez, o ciclo recomeça e gera o bloco periódico de dígitos 142857. Esse exemplo ilustra – e quase prova – o fato de que a *expansão decimal de qualquer número racional é periódica**.

A prova dessa afirmação geral é um pouco mais simplesmente que observar o fenômeno visto no exemplo. Quando a é dividido por b, o resto em cada estágio é um dos números 0, 1, 2, ..., $b - 1$. Como há somente um número finito de valores possíveis para esses restos, algum resto aparece necessariamente uma segunda vez e o processo de divisão se repete daquele ponto dando um decimal periódico. Observamos também que, se o resto 0 aparece, então o decimal termina, mas um decimal finito pode sempre ser pensado como periódico, como em 0,25 = 0,24999...

A recíproca dessa afirmação é também verdadeira: *todo decimal periódico é a expansão de um número racional.* Para ver por que isto é assim, vamos examinar um decimal periódico típico, digamos 3,7222... Separando a parte que não se repete, escrevemos a parte que se repete usando potências de 10, e aplicamos a fórmula (5) no estágio próprio. Obtemos

$$\begin{aligned}
3{,}7222\ldots &= \frac{37}{10} + 0{,}0222\ldots \\
&= \frac{37}{10} + \frac{2}{10^2} + \frac{2}{10^3} + \frac{2}{10^4} + \cdots \\
&= \frac{37}{10} + \left[\frac{2}{100} + \frac{2}{100}\left(\frac{1}{10}\right) + \frac{2}{100}\left(\frac{1}{10}\right)^2 + \cdots\right] \\
&= \frac{37}{10} + \frac{\frac{2}{100}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{37}{10} + \frac{2}{100}\cdot\frac{10}{9} \\
&= \frac{37}{10} + \frac{2}{90} = \frac{335}{90} = \frac{67}{18},
\end{aligned}$$

que é um número racional expresso como fração irredutível. É evidente que um procedimento análogo funciona igualmente bem para todo decimal periódico; logo, a afirmação no início desse parágrafo é evidentemente verdadeira.

Podemos resumir nossos resultados dizendo que *os números racionais são exatamente aqueles números reais cujas expansões decimais são periódicas.* De modo equivalente, *os números irracionais são exatamente aqueles números reais cujas expansões decimais não são periódicas.*

Observação 2 É interessante observar que tanto a série harmônica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

---

* Certos números racionais têm duas expansões decimais distintas, por exemplo, 1/4 = 0,25000... = 0,24999.... Essa situação é analisada nos Problemas Suplementares no final do capítulo.

como a série geométrica

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$$

têm termos positivos que decrescem para zero, mas a primeira diverge, enquanto a segunda converge. Isto mostra a sutileza que encontraremos à medida que aprofundamos nosso estudo das séries infinitas.

Um dos atrativos do assunto que estamos tratando é que ele tem muitos resultados que incitam a imaginação e estimulam a criatividade. Por exemplo, parece razoavelmente claro a partir da observação anterior que uma série de termos positivos converge se seus termos decrescem "suficientemente rápido". Isto é verdade. Por exemplo, não é difícil ver que da série harmônica divergente podemos obter uma série convergente tomando os quadrados dos números de ordem dos termos que são os inteiros positivos dos denominadores; isto é, a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$$
$$= 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots \tag{10}$$

converge*.

Sabe-se que a soma dessa série é

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}. \tag{11}$$

As razões subjacentes desse fato notável se tornarão acessíveis na Seção 13.4.

---

* Para uma prova fácil (mas engenhosa), salientamos que s_n tende a s ($s_n \to s$) para algum $s < 2$, pois os s_n's formam uma seqüência crescente com a propriedade de que $s_n < 2$ para todo n. O último fato não é óbvio, mas é obtido das desigualdades

$$s_n = 1 + \frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n \cdot n}$$

$$< 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n}$$

$$= 1 + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 2 - \frac{1}{n} < 2.$$

Uma outra maneira de obtermos uma série convergente é trocar os sinais de termos alternados da série harmônica. Teremos uma série cuja soma (um outro fato surpreendente!) é ln 2,

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \ln 2, \tag{12}$$

como veremos na Seção 13.3.

Problemas

1. Não existe nada que nos proíba de formar a série geométrica $a + ar + ar^2 + \ldots$ para todo número real r (insistimos ainda que a seja diferente de zero). Mostre que essa série diverge sempre que $|r| \geqslant 1$.

2. Determine se cada uma das seguintes séries geométricas é convergente ou divergente e no caso de ser convergente determine sua soma:

   (a) $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \cdots$; (b) $9 + 3 + 1 + \cdots$;
   (c) $2 + \frac{3}{2} + \cdots$; (d) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$;
   (e) $\frac{1}{4} - \frac{1}{20} + \cdots$; (f) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$;
   (g) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{4}{5}\right)^n$; (h) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5\sqrt{2}}{7}\right)^n$;
   (i) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{8}{5\sqrt{3}}\right)^n$; (j) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3-\sqrt{5})^n}$;
   (k) $\sum_{n=0}^{\infty} 7\left(-\frac{4}{7}\right)^n$; (l) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{5^{n/2}}$.

3. Mostre que a fórmula (4) é essencialmente equivalente à seguinte fórmula de fatoração da Álgebra Elementar:

$$x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1).$$

   Faça uma verificação independente dessa fórmula de fatoração.

4. Uma certa bola de borracha é largada de uma altura de 4 metros. Cada vez que bate no chão sobe à altura $3/4\ h$, onde h é a altura do salto anterior. Calcule a distância total que a bola percorre.

5. Quais das seguintes séries são convergentes e quais são divergentes?

(a) $\operatorname{sen} \pi + \operatorname{sen} 2\pi + \cdots + \operatorname{sen} n\pi + \cdots$.

(b) $\operatorname{sen} \frac{\pi}{2} + \operatorname{sen} \frac{2\pi}{2} + \cdots + \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} + \cdots$.

(c) $\cos \pi + \cos 2\pi + \cdots + \cos n\pi + \cdots$.

(d) $\cos \frac{\pi}{2} + \cos \frac{3\pi}{2} + \cdots + \cos \frac{(2n-1)\pi}{2} + \cdots$.

(e) $\ln \sqrt{3} + \ln \sqrt[3]{3} + \ln \sqrt[4]{3} + \cdots + \ln \sqrt[n]{3} + \cdots$.

(f) $\ln \sqrt{3} + \ln \sqrt[4]{3} + \ln \sqrt[8]{3} + \cdots + \ln \sqrt[2^n]{3} + \cdots$.

(g) $\frac{1}{10+3} + \frac{2}{10+6} + \frac{3}{10+9} + \cdots + \frac{n}{10+3n} + \cdots$.

(h) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots$.

6. Converta cada uma das seguintes decimais periódicas numa fração irredutível.

(a) 0,777 . . . ; (b) 0,151515 . . . ;
(c) 639639639 . . . ; (d) 2,3070707 . . . .

7 Se a e b são algarismos, mostre que

(a) $0{,}aaa \ldots = \frac{a}{9}$;

(b) $0{,}ababab \ldots = \frac{10a+b}{99}$.

8. O decimal 0,101001000100001..., em que os 1 são seguidos sucessivamente por blocos cada vez maiores de 0, parece não ser periódico e portanto define um número irracional. Construa um argumento que converta essa impressão em certeza. Sugestão: suponha que o decimal seja periódico.

9. (O problema da mosca) Dois ciclistas partem separados por uma distância de 20 km e seguem um em direção ao outro, cada um pedalando a uma velocidade uniforme de 10 km/h. Ao mesmo tempo uma mosca, viajando a 40 km/h, parte da roda dianteira de uma bicicleta e voa até a roda dianteira da outra, depois volta de novo para a roda dianteira da primeira e continua para frente e para trás até que as bicicletas colidam e ela seja esmagada entre as rodas. Quantos quilômetros ela voou? A maneira difícil de resolver esse problema é expressar a distância total como uma série infinita e achar sua soma. Há também uma maneira fácil. Resolva-o das duas maneiras.

13.3 VÁRIAS SÉRIES RELACIONADAS COM AS SÉRIES GEOMÉTRICAS

Como começaremos a ver nesta seção, a série geométrica

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots \qquad (1)$$

é a mais útil de todas as séries infinitas. Usando a notação de somatório, podemos escrever essa série numa ou noutra das formas equivalentes

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} \quad \text{ou} \quad \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

A primeira forma é um pouco mais desajeitada que a segunda; logo preferimos a segunda. Começar uma série com o primeiro termo ($n = 1$) ou com o *zero*-ésimo termo ($n = 0$) é puramente uma questão de conveniência de notação.

Uma série de funções como (1) não pode ser dita convergente ou divergente como está afirmado, pois não é uma série infinita de números. No entanto, torna-se uma série numérica quando damos à variável x um valor numérico, e, em geral, esperamos que uma tal série venha a convergir para alguns valores de x e divergir para outros valores.

Podemos usar o teste do n-ésimo termo para concluir que a série (1) diverge se $x \geqslant 1$ ou $x \leqslant -1$, pois nesses casos x^n não tende a zero. O fato de que essa série converge para todos os outros valores de x pode ser visto facilmente pela fórmula da n-ésima soma parcial,

$$s_n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}, \qquad (2)$$

pois para $|x| < 1$ temos evidentemente que $x^{n+1} \to 0$ e, portanto, $s_n \to 1/(1-x)$. Nosso propósito é lembrar aos estudantes essa fórmula, que necessitaremos mais tarde, e também reenunciar o fato central da Seção 13.2:

Se $-1 < x < 1$, a série (1) converge e sua soma é

$$1 + x + x^2 + \cdots = \frac{1}{1-x}; \tag{3}$$

para todos os outros valores de x *esta série diverge.*

O intervalo $-1 < x < 1$ chama-se *intervalo de convergência* da série.

A série geométrica (3) é um exemplo raro de série infinita cuja soma somos capazes de achar, achando primeiro uma fórmula mais simples para sua *n*-ésima soma parcial s_n. Parte da importância dessa série está no fato de que pode ser usada como um ponto de partida para determinar as somas de muitas outras séries interessantes. Uma maneira de fazer isto é substituir x em (3) por outras funções na série, e assim descobrir o intervalo, de convergência da nova série. Por exemplo, substituindo x por $-x$ dá

$$1 - x + x^2 - x^3 + \cdots = \frac{1}{1+x}, \qquad -1 < x < 1. \tag{4}$$

substituindo x por x^2 em (4) dá

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots = \frac{1}{1+x^2}, \qquad -1 < x < 1. \tag{5}$$

substituindo x por x^2 em (3), obtemos

$$1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots = \frac{1}{1-x^2}, \qquad -1 < x < 1. \tag{6}$$

Observe que essa série contém somente termos de (3) com expoentes *pares.* Para acharmos a soma da série formada apenas por potências ímpares, multiplicamos (6) por x e achamos

$$x + x^3 + x^5 + x^7 + \cdots = \frac{x}{1-x^2}, \qquad -1 < x < 1. \tag{7}$$

Substituindo x por $2x$ em (4), obtemos

$$1 - 2x + 4x^2 - 8x^3 + \cdots = \frac{1}{1+2x}, \tag{8}$$

que é válida para $|2x| < 1$ ou, de modo equivalente, $-1/2 < x < 1/2$. Se substituímos x por e^x em (3), com $e^x < 1$, achamos que

$$1 + e^x + e^{2x} + e^{3x} + \cdots = \frac{1}{1 - e^x}, \qquad x < 0.$$

E, finalmente, substituindo-se x por $2x - 1$ em (3), com $-1 < 2x-1$ H 1, obtemos

$$1 + (2x - 1) + (2x - 1)^2 + \cdots = \frac{1}{1 - (2x - 1)} = \frac{1}{2 - 2x}, \qquad 0 < x < 1.$$

É claro que muitas outras séries e suas correspondentes somas podem ser encontradas essencialmente da mesma maneira.

As séries de (3) a (8) têm todas a forma particular

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots, \tag{9}$$

e são conhecidas como *série de potências.* Os números a_0, a_1, a_2, a_3,... chamam-se *coeficientes* da série de potências (9). A série geométrica (3), na qual os coeficientes são todos iguais a 1, é evidentemente a série de potências mais simples e o protótipo de todas essas séries.

Aprendemos, vários capítulos atrás, que para calcular a derivada ou a integral da soma de um número finito de funções simplesmente calculamos as derivadas ou integrais dos termos individuais e somamos. Entretanto, quando aplicados às séries infinitas de funções, estes procedimentos de derivação ou integração termo a termo são perigosos e podem conduzir a conclusões falsas. É necessária uma análise cuidadosa para determinarmos se a série obtida por meio desses procedimentos converge, e, sendo assim, se sua soma é a derivada ou a integral da soma da série original. Todavia, se nesse momento não formos céticos e continuarmos despreocupadamente adiante só para ver o que acontece, acharemos que esses procedimentos levam a muitas fórmulas novas notáveis, que poderão ser colocadas posteriormente sobre uma sólida fundamentação.

Por exemplo, derivando (3), obtemos

$$1 + 2x + 3x^2 + \cdots = \frac{1}{(1 - x)^2}, \qquad -1 < x < 1. \tag{10}$$

Integrando os segundos membros de (4) e (5) recordamos as fórmulas familiares

$$\int \frac{dx}{1 + x} = \ln(1 + x) \qquad \text{e} \qquad \int \frac{dx}{1 + x^2} = \text{arc tg}\, x.$$

Integrando o primeiro membro de (4) termo a termo, obtemos a importante série

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots = \ln(1 + x). \tag{11}$$

Adiantando-nos um pouco verificamos que essa equação é válida não só no intervalo aberto $-1 < x < 1$ mas também na extremidade direita $x = 1$. No caso $x = 1$, (11) dá a série

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \ln 2, \tag{12}$$

que foi mencionada na Seção 13.2. Analogamente, integrando (5) termo a termo obtemos a série do arco tangente,

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots = \text{arc tg}\, x. \tag{13}$$

Verifica-se que essa equação é válida em todo o intervalo fechado $-1 \leqslant x \leqslant 1$ e, para $x = 1$, temos a famosa série de Leibniz

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}. \tag{14}$$

Essa equação, que liga π aos números ímpares positivos, foi uma das descobertas matemáticas mais significativas do século XVII, e causou profunda impressão nos primeiros pesquisadores no campo do Cálculo.

Enfatizamos novamente que essas deduções de (10), (11) e (13) têm apenas um caráter sugestivo; elas *não* se constituem em provas matematicamente aceitáveis. Fornecemos a seguir provas legítimas de (11) e (13), que, esperamos, ajudarão os estudantes a compreender o tipo de argumento necessário. Uma prova de (10) é esboçada nos Problemas Suplementares no final do capítulo.

A Série Logarítmica

Começamos nossa prova rigorosa de (11) com a seguinte forma ligeiramente alterada da equação (2):

$$\frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} + \frac{x^n}{1 - x}.$$

Substituindo x por $-t$, obtemos

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - \cdots + (-1)^{n-1}t^{n-1} + \frac{(-1)^n t^n}{1+t}. \tag{15}$$

Escolhemos agora qualquer número x tal que $-1 < x \leqslant 1$ e integramos ambos os membros de (15) de 0 a x. Todas as integrais, exceto a última, são fáceis de calcular e, assim, obtemos

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_n(x), \tag{16}$$

onde

$$R_n(x) = (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t}\,dt.$$

Recordamos que x está confinado no intervalo $-1 < x \leqslant 1$, onde a extremidade $x = 1$ está incluída, mas $x = -1$ não está. Provamos agora que $R_n(x) \to 0$ quando $n \to \infty$. Fazemos isto mostrando que $|R_n(x)|$ é menor que uma quantidade que visivelmente tende a zero quando $n \to \infty$. Desde que t varia de 0 a x, para o caso $0 \leqslant x \leqslant 1$, temos evidentemente $1 + t \leqslant 1$. Logo

$$|R_n(x)| = \int_0^x \frac{t^n}{1+t}\,dt \leq \int_0^x t^n\,dt = \frac{x^{n+1}}{n+1} \to 0.$$

Para $-1 < x < 0$, temos, analogamente, $1+t \geqslant 1+x$. Logo

$$|R_n(x)| = \left|\int_0^x \frac{t^n}{1+t}\,dt\right| \leq \left|\int_0^x \frac{t^n}{1+x}\,dt\right| = \frac{1}{1+x} \cdot \frac{|x|^{n+1}}{n+1} \to 0.$$

Como $R_n(x) \to 0$ para todos os valores de x considerados, podemos com segurança inferir de (16) que

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots, \qquad -1 < x \leq 1. \tag{17}$$

Sabemos que ln 0 não tem sentido, logo não existe evidentemente esperança de estender esse resultado para a outra extremidade $x = -1$. Salientamos também que a equação (12) é agora parte do conhecimento definitivo, e não mais uma conjectura plausível.

A série (17) não é um instrumento muito prático para se computar valores numéricos do logaritmo, pois $1 + x$ está restrito ao intervalo $0 < 1 + x \leqslant 2$, e a série converge tão devagar que devemos incluir um número muito grande de termos para obter um resultado razoavelmente preciso. Podemos achar uma série mais conveniente. Se $-1 < x < 1$, podemos substituir x por $-x$ em (17), obtendo

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots. \tag{18}$$

Subtraindo (18) de (17), obtemos

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots\right), \qquad -1 < x < 1.$$

Essa série não só converge muito mais rapidamente que (17), mas agora a forma do primeiro membro permite-nos calcular o logaritmo de qualquer número positivo; pois quando x varia no intervalo $-1 < x < 1$, a expressão $y = (1+x)/(1-x)$ percorre todos os números positivos.

A Série do Arco Tangente

Para dar uma prova rigorosa de (13), começamos substituindo t por t^2 em (15), o que dá

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - \cdots + (-1)^{n-1}t^{2n-2} + \frac{(-1)^n t^{2n}}{1+t^2}.$$

Integrando ambos os membros de $t = 0$ a $t = x$, obtemos

$$\text{arc tg } x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + R_n(x), \tag{19}$$

onde

$$R_n(x) = (-1)^n \int_0^x \frac{t^{2n}}{1+t^2}\,dt.$$

Usamos agora a mesma estratégia que anteriormente para provar que $R_n(x) \to 0$ quando $n \to \infty$, supondo $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Mas isto é fácil, pois a desigualdade $1 + t^2 \geqslant 1$ permite-nos escrever

$$|R_n(x)| = \left|\int_0^x \frac{t^{2n}}{1+t^2}\,dt\right| \leq \left|\int_0^x t^{2n}\,dt\right| = \frac{|x|^{2n+1}}{2n+1} \leq \frac{1}{2n+1} \to 0.$$

O fato de que $R_n(x) \to 0$ para os valores enunciados de x permite-nos concluir a partir de (19) que

$$\text{arc tg } x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots, \qquad -1 \leq x \leq 1. \tag{20}$$

A fórmula de Leibniz (14),

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots,$$

segue agora imediatamente de (20) para $x = 1$.

O Cálculo de π

Em princípio, a fórmula de Leibniz (14) pode ser usada para calcular o valor numérico de π, mas, em termos práticos a série converge tão lentamente que esse método é de pouco valor. Um modo mais eficiente é usar a fórmula

$$\frac{\pi}{4} = \text{arc tg } \frac{1}{2} + \text{arc tg } \frac{1}{3}, \tag{21}$$

depois computar os dois termos da direita por meio de (20).

Para estabelecer (21), observe que, se $A = \text{arc tg } 1/2$ e $B = \text{arc tg } \frac{1}{3}$, então

$$\text{tg}(A+B) = \frac{\text{tg } A + \text{tg } B}{1 - \text{tg } A \text{ tg } B} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{6}} = 1.]$$

Entretanto, a maioria dos cálculos extensos de π se baseia na fórmula

$$\frac{\pi}{4} = 4 \text{ arc tg } \frac{1}{5} - \text{arc tg } \frac{1}{239}, \tag{22}$$

que foi descoberta em 1706 por John Machin, um astrônomo escocês. Não prosseguiremos com os detalhes desse assunto. Em vez disso salientamos simplesmente que π foi calculado por esses métodos com mais de 500.000 casas decimais, das quais as vinte primeiras são:

$$\pi = 3{,}14159\ 26535\ 89793\ 23846\ldots.$$

Problemas

1. Determine o intervalo de convergência de cada uma das seguintes séries e também a soma s nesse intervalo:

   (a) $1 + (x+3)^2 + (x+3)^4 + (x+3)^6 + \cdots$;

   (b) $1 + \dfrac{1}{2x+3} + \dfrac{1}{(2x+3)^2} + \cdots$;

   (c) $1 + 2\,\text{sen}\,x + 4\,\text{sen}^2 x + 8\,\text{sen}^3 x + \cdots$;

   (d) $\dfrac{1}{3}\left[1 + \dfrac{4x}{3} + \left(\dfrac{4x}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{4x}{3}\right)^3 + \cdots\right]$;

   (e) $-\dfrac{1}{4x}\left[1 + \dfrac{3}{4x} + \left(\dfrac{3}{4x}\right)^2 + \left(\dfrac{3}{4x}\right)^3 + \cdots\right]$;

   (f) $\frac{1}{4}[1 + (x + \frac{1}{4}) + (x + \frac{1}{4})^2 + \cdots]$.

2. Mostre que $1 + 2\,\text{sen}^2\,\theta + 4\,\text{sen}^4\,\theta + 8\,\text{sen}^6\,\theta + \ldots = \sec 2\theta$ para valores convenientes de θ.

3. Agrupando os termos de maneira apropriada, some as equações (6) e (7) para obter (3).

4. Calcule a soma s da série no primeiro membro de (10),

$$s = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots,$$

   subtraindo dela a série xs.

5. Use (10) para calcular a soma da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots.$$

6. Calcule a soma da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} = \frac{1^2}{2^1} + \frac{2^2}{2^2} + \frac{3^2}{2^3} + \cdots$$

   por um método análogo ao usado no Problema 5. Sugestão: comece multiplicando (10) por x.

7. Obtenha as seguintes fórmulas sem tentar justificar os passos. Essas fórmulas são todas válidas, pelo menos no intervalo $-1 < x < 1$.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^n = \frac{x^2+x}{(1-x)^3}$.

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} n^3x^n = \frac{x^3+4x^2+x}{(1-x)^4}$.

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} n^4x^n = \frac{x^4+11x^3+11x^2+x}{(1-x)^5}$.

(e) $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2}$.

(f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2!} x^n = \frac{1}{(1-x)^3}$.

(g) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3!} x^n = \frac{1}{(1-x)^4}$.

8. Prove a fórmula (22) pondo A = arc tg 1/5, B = arc tg 1/239 e calculando sucessivamente tg $2A$, tg $4A$ e tg $(4A-B)$.

13.4 SÉRIES DE POTÊNCIAS CONSIDERADAS INFORMALMENTE

Observamos anteriormente que os polinômios são as funções mais simples de todas e as séries de potências podem ser encaradas como polinômios de grau infinito. Uma expansão de uma função $f(x)$ numa série de potências

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots \tag{1}$$

é, portanto, um modo de expressar $f(x)$ por meio de funções de uma espécie particularmente simples. Nossas investigações nas seções precedentes levaram-nos às seguintes expansões em série de potências:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots, \quad \text{válido para } -1 < x < 1; \tag{2}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots, \quad \text{válido para } -1 < x \leq 1; \tag{3}$$

$$\text{arc tg}\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots, \quad \text{válido para } -1 \leq x \leq 1; \tag{4}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots, \quad \text{válido para todo } x. \tag{5}$$

Provamos rigorosamente as fórmulas (2), (3) e (4), mas no presente estágio de nosso trabalho (5) está apoiada apenas no argumento de plausibilidade dado na Seção 13.1

Adicionamos agora as seguintes expansões importantes a essa lista:

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots, \quad \text{válido para todo } x; \tag{6}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots, \quad \text{válido para todo } x. \tag{7}$$

As provas não são difíceis e podem ser dadas em conjunto. Elas se baseiam nas fórmulas

$$\int_0^x \operatorname{sen} t\, dt = 1 - \cos x \quad \text{e} \quad \int_0^x \cos t\, dt = \operatorname{sen} x,$$

e também na seguinte propriedade óbvia de integrais definidas:

$$\text{Se } f(x) \leqslant g(x) \text{ e } a < b, \text{ então } \int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx.$$

Iniciamos a argumentação com a desigualdade

$$\cos x \leqslant 1.$$

Substituindo x por t e integrando ambos os membros da desigualdade $\cos t \leqslant 1$ de zero a um número positivo fixado x, obtemos

$$\operatorname{sen} x \leqslant x.$$

Integrando esta da mesma maneira sobre o mesmo intervalo, obtemos

$$1 - \cos x \leq \frac{x^2}{2},$$

que é equivalente a

$$\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}.$$

Uma outra integração análoga dará

$$\operatorname{sen} x \geq x - \frac{x^3}{2 \cdot 3} = x - \frac{x^3}{3!}.$$

Continuando esse processo indefinidamente, geramos os dois conjuntos de desigualdades

$$\begin{array}{ll}
\operatorname{sen} x \leq x & \cos x \leq 1 \\
\operatorname{sen} x \geq x - \frac{x^3}{3!} & \cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2!} \\
\operatorname{sen} x \leq x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} & \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \\
\operatorname{sen} x \geq x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} & \cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \\
\cdots & \cdots .
\end{array}$$

Para completar as provas de (6) e (7) para o valor positivo de x que estamos considerando, é suficiente mostrar que $x^n/n! \to 0$ quando $n \to \infty$. Para demonstrar, escolhemos um inteiro positivo fixado m suficientemente grande para que $x/m < 1/2$; depois fazemos $a = x^m/m!$. Para todo inteiro $n > m$, escrevemos $n = m + k$ e observamos que

$$0 < \frac{x^n}{n!} = a \cdot \frac{x}{m+1} \cdot \frac{x}{m+2} \cdots \frac{x}{m+k} < a\left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

Quando $n \to \infty$, k também $\to \infty$ logo $a\,(\frac{1}{2})^k \to 0$ e concluímos que $x^n/n! \to 0$. A extensão de (6) e (7) para valores negativos de x é deixada para os leitores, nos problemas.

As expansões em série de potências (2) a (7) mostram que diferentes tipos de funções podem ser expandidas em série de potências. Essas fórmulas são todas casos particulares de uma fórmula muito geral e poderosa que nos permite achar a única expansão em série de potências (1) de qualquer função de uma grande classe de funções $f(x)$, calculando os valores dos coeficientes a_n em termos da função $f(x)$ e suas derivadas. Não é possível provar aqui os teoremas que estabelecem a validade e unicidade das expansões formadas dessa maneira. Isto será feito no Capítulo 14.

Todavia, as seguintes considerações informais de plausibilidade irão sugerir a natureza desses teoremas; elas são úteis aos estudantes e matemáticos como um modo conveniente de rememorar os amplos delineamentos do assunto.

Portanto, vamos admitir que $f(x)$ possa ser expandida de uma série de potências da forma (1). Vamos ainda admitir que $f(x)$ tem derivada $f'(x)$, que $f'(x)$ tem derivada $f''(x)$ e assim por diante, de modo que toda seqüência infinita de derivadas

$$f'(x), f''(x), \ldots, f^{(n)}(x), \ldots$$

realmente exista. Finalmente, vamos admitir que cada uma dessas derivadas pode ser encontrada derivando-se a série (1) termo a termo um número adequado de vezes. Veremos agora que os valores dos coeficientes a_n são determinados pelos valores de $f(x)$ e de suas derivadas no ponto $x = 0$.

Fazendo $x = 0$ em (1), todos os termos contendo x desaparecem e teremos

$$a_0 = f(0). \tag{8}$$

A seguir, derivamos (1) para obter

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + na_nx^{n-1} + \cdots, \tag{9}$$

e fazendo $x = 0$, teremos

$$a_1 = f'(0).$$

Derivando (9), obtemos

$$f''(x) = 2a_2 + 2 \cdot 3a_3x + \cdots + (n-1)na_nx^{n-2} + \cdots, \tag{10}$$

e, novamente para $x = 0$, obtemos

$$a_2 = \frac{f''(0)}{2}.$$

Analogamente, derivando (10) e fazendo $x = 0$, achamos que

$$a_3 = \frac{f'''(0)}{2 \cdot 3} = \frac{f'''(0)}{3!}.$$

Continuando esse processo, obtemos evidentemente a seguinte fórmula geral para todos os coeficientes:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \tag{11}$$

onde $f^{(n)}(0)$ é o valor da n-ésima derivada de $f(x)$ em $x = 0$. Devemos notar, em particular, que essa fórmula inclui (8) se – como é usual – entendermos que a derivada *zero*-ésima $f^{(0)}(x)$ é a própria função $f(x)$ e também que 0! é definido como sendo 1, como foi obtido na Seção 13.1. A expansão (1) toma agora a forma

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n. \qquad (12)$$

Exemplo: Ilustramos esse método usando-o para obter outra dedução da fórmula (5). Os cálculos são muito fáceis. Nossa função $f(x)$ nesse caso é e^x. Calculando as derivadas sucessivas, obtemos

$$f(x) = e^x, \qquad f(0) = e^0 = 1,$$
$$f'(x) = e^x, \qquad f'(0) = e^0 = 1,$$
$$f''(x) = e^x, \qquad f''(0) = e^0 = 1,$$
$$f^{(n)}(x) = e^x, \qquad f^{(n)}(0) = e^0 = 1,$$

e assim por diante. A fórmula (11) dá, portanto, $a_n = 1/n!$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$. Logo, para essa função particular, a série (12) fica

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots,$$

que é (5).

Enfatizamos uma vez mais que a discussão das fórmulas (11) e (12) apresentada aqui tem apenas valor sugestivo e, de modo algum, constitui-se numa prova matemática legítima. Essas fórmulas não serão instrumentos de confiabilidade conhecida enquanto não fizermos a análise teórica cuidadosa no Capítulo 14.

Observação 1: No Problema 26 da Seção 8.3 pedimos aos estudantes que obtivessem a fórmula

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n. \qquad (13)$$

Essa expressão pode ser usada para deduzir a fórmula (5) de outra maneira. Pelo Teorema do Binômio de Newton, temos

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1 + n\left(\frac{x}{n}\right) + \frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{x}{n}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\left(\frac{x}{n}\right)^3 + \cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\cdots[n-(n-1)]}{n!}\left(\frac{x}{n}\right)^n,$$

ou, de modo equivalente,

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1 + x + \left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{x^2}{2!} + \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\frac{x^3}{3!} + \cdots + \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\frac{x^n}{n!}.$$

É plausível formar o limite dessa expressão para $n \to \infty$, substituindo-se simultaneamente cada uma das quantidades entre parênteses por 1 e ampliando-se a soma finita para uma série infinita. Aplicando estes procedimentos a (13) achamos

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots,$$

que é (5) novamente. Temos agora três maneiras diferentes de deduzir a fórmula (5), todas elas se constituindo mais como argumentos de plausibilidade do que provas genuínas. Essa fórmula importante é naturalmente verdadeira, mas sua verdade só será firmemente estabelecida no Capítulo 14.

Observação 2: No fim da Seção 13.2 mencionamos a fórmula memorável

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}.$$

Essa fórmula da soma dos inversos dos quadrados foi descoberta por Euler, em 1736. Seu método de descoberta foi baseado na série de potências (6) para sen x e é descrito no Apêndice A.7 do Volume II.

Problemas

1. O argumento dado no texto estabelece as fórmulas (6) e (7) para valores positivos de x e elas são obviamente verdadeiras para o caso $x = 0$. Mostre que essas fórmulas são também válidas para valores negativos de x. Sugestão: lembre-se das identidades $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$ e $\cos(-x) = \cos x$.

2. Mostre que a derivação da série de potências de $\operatorname{sen} x$ dá a série de potências de $\cos x$.

3. Mostre que a série de potências de e^x fica inalterada por derivação.

4. Obtenha as expansões (2), (3), (4), (6) e (7) usando as fórmulas (11) e (12). Observe que esses cálculos produzem as expansões, mas não dão qualquer informação acerca dos x para os quais essas expansões são válidas.

5. Use as fórmulas (11) e (12) para encontrar a expansão em série de potências da função $f(x) = x^3$.

6. Use as fórmulas (11) e (12) para obter os primeiros termos não-nulos da expansão em série de potências de $f(x) = \operatorname{tg} x$. Observe que não surge nenhum padrão simples para os coeficientes.

7. Seja p uma constante arbitrária, use as fórmulas (11) e (12) para obter a série binomial

$$\begin{aligned}(1+x)^p = 1 + px &+ \frac{p(p-1)}{2!}x^2 \\ &+ \frac{p(p-1)(p-2)}{3!}x^3 + \cdots \\ &+ \frac{p(p-1)(p-2)\cdots(p-n+1)}{n!}x^n + \cdots .\end{aligned}$$

   Observe que essa série de potências é um polinômio sempre que p é um inteiro não-negativo e somente nesse caso.

8. Deduza a fórmula (2) a partir da série binomial do Problema 7.

9. Deduza cada uma das seguintes séries a partir da série binomial do Problema 7.

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2\cdot 4}x^2 - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 - \cdots ;$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \cdots .$$

   Obtenha a segunda dessas séries por derivação da primeira.

10. Use a fórmula

$$\text{arc sen } x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

e o problema 9 para obter a série

$$\text{arc sen } x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^7}{7} + \cdots.$$

Problemas Suplementares do Capítulo 13

Seção 13.2

1. Calcule a soma de cada uma das seguintes séries

(a) $\dfrac{1+4}{9} + \dfrac{1+8}{27} + \dfrac{1+16}{81} + \cdots;$

(b) $18 - 6 + 2 - \frac{2}{3} + \cdots;$

(c) $\dfrac{\text{sen}\,\theta}{2} + \dfrac{\text{sen}^2\,\theta}{4} + \dfrac{\text{sen}^3\theta}{8} + \cdots;$

(d) $\dfrac{1}{2+x^2} + \dfrac{1}{(2+x^2)^2} + \dfrac{1}{(2+x^2)^3} + \cdots.$

2. Caracterize todas as séries convergentes cujos termos são inteiros.

3. Na série $1/3 - 2/5 + 3/7 - 4/9 + \ldots$, os numeradores formam a sucessão de inteiros positivos, os denominadores formam a sucessão de números ímpares começando em 3 e os termos têm sinais alternados.

(a) Escreva a série usando a notação de somatório.

(b) Mostre que a série diverge.

4. Expresse cada um dos seguintes números em representação decimal periódica:

(a) 3/5; (b) 5/3; (c) 27/25; (d) 27/24; (e) 27/26.

5. Mostre que o número racional positivo a/b (irredutível) tem uma expansão decimal finita se e somente se o inteiro positivo b tem a forma $b = 2^m 5^n$, onde os expoentes m e n são inteiros não-negativos. Confira essa afirmação com os resultados do Problema 4.

6. Um decimal finito tal como $3/8 = 0{,}375 = 0{,}375000\ldots$ pode também ser escrito como um decimal periódico terminando num bloco infinito de 9 se o último algarismo não-nulo é diminuído de uma unidade, como em $0{,}375000\ldots = 0{,}374999\ldots$. Prove isto usando a fórmula (5) da Seção 13.2.

7. Uma certa bola de borracha é largada de uma altura H. Cada vez que ela salta, sobe uma altura rh, onde h é a altura do salto anterior e r é uma constante. Mostre que a distância total que a bola percorre é $H(1+r)/(1-r)$.

8. O filósofo grego Zenão de Eléia (início do século V a.C.) precipitou uma profunda crise no pensamento ocidental, criando alguns paradoxos engenhosos. Um deles, chamado muitas vezes de *paradoxo da corrida* e destinado a provar que o movimento é impossível, pode ser enunciado como se segue:

   Não posso ir daqui para ali. Pois, para fazer isso, devo primeiro cobrir a metade da distância, depois a metade da distância que resta, depois a metade do que ainda resta e assim por diante. Esse processo pode sempre ser continuado e nunca pode ser completado num tempo finito.

   Refute Zenão.

9. Mostre que o número

$$0{,}12345678910111213141516 17\ldots,$$

em que todos os inteiros positivos são utilizados na ordem após a vírgula decimal, é irracional.

Seção 13.3

10. Para provar a equação (10) da Seção 13.3, admita que $-1 < x < 1$ e considere a identidade

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x}.$$

[Vimos que essa identidade conduz a (3) imediatamente, pois $x^{n+1} \to 0$ quando $n \to \infty$ (É claro que um número em módulo menor que 1, que é elevado a potências cada vez maiores, torna-se cada vez menor e tende a zero.)]
Derive ambos os membros para obter

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} + \frac{nx^n}{1-x} + \frac{x^n}{(1-x)^2}.$$

A equação (10) será uma conseqüência da expressão acima se puder ser provado que $nx^n \to 0$ quando $n \to \infty$. Veja o Problema 11.

11. (a) Prove o seguinte: se uma seqüência $s_1, s_2, ..., s_n, ...$ tem a propriedade de que para todos os índices suficientemente grandes, $n \geqslant n_0$, a razão $r_n = s_{n+1}/s_n$ dos termos sucessivos está entre $-r$ e r $(-r \leqslant r_n \leqslant r)$ para algum número r tal que $0 < r < 1$, então $s_n \to 0$. Sugestão: para qualquer $m \geqslant n_0$ fixado, temos $|s_{m+1}/s_m| \leqslant r$; logo $|s_{m+1}| \leqslant r |s_m|$; $|s_{m+2}/s_{m+1}| \leqslant r$, logo $|s_{m+2}| \leqslant r\, |s_{m+1}| \leqslant r^2\, |s_m|$; e, do mesmo modo, $|s_{m+n}| \leqslant r^n\, |s_m|$ para todo $N = 1$.

(b) Se $-1 < x < 1$, use a parte (a) para provar que $nx \to 0$ quando $n \to \infty$.

12. Use as idéias dos Problemas 10 e 11 para provar que, se a série geométrica $1 + x + x^2 + ..$ é derivada m vezes, termo a termo, a série resultante converge no intervalo $-1 < x < 1$ e tem como soma a m-ésima derivada de $1/(1-x)$. Sugestão: se $R = (1-x)^{-1}x^{n+1}$ é o último termo à direita na identidade do Problema 10, então sua m-ésima derivada tem a forma

$$R^{(m)} = f_0 x^{n+1} + f_1(n+1)x^n + f_2(n+1)nx^{n-1} + \cdots + f_m(n+1)n \cdots (n-m+2)x^{n-m+1},$$

onde os f são funções apenas de x e não dependem de n.

13. Considere uma série $\sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n$ em que o coeficiente de x^n é um polinômio em n de grau k. Mostre que $P(n)$ pode ser escrito na forma

$$P(n) = A_0 + A_1(n+1) + A_2(n+1)(n+2) + \cdots + A_k(n+1)(n+2) \cdots (n+k),$$

e que portanto a soma da série é

$$s = \frac{A_0}{1-x} + \frac{A_1}{(1-x)^2} + \frac{2!A_2}{(1-x)^3} + \cdots + \frac{k!A_k}{(1-x)^{k+1}}.$$

Sugestão: veja as partes (e), (f) e (g) do Problema 7 da Seção 13.3.

14. Usando apenas o primeiro termo da série de $\ln(1+x)$, temos a fórmula de aproximação.

$$\ln(1+x) \cong x \qquad \text{para } |x| \text{ pequeno.}$$

Como podemos explicar e compreender essa fórmula sem fazer uso de série infinita?

15. Usando apenas o primeiro termo da série para arc tg x, temos a fórmula de aproximação

$$\text{arc tg } x \cong x \qquad \text{para } |x| \text{ pequeno.}$$

Como podemos explicar e compreender essa fórmula sem fazer qualquer uso de séries infinitas?

Seção 13.4

16. Calcule os primeiros dois ou três termos não-nulos da expansão em série de potências de cada uma das seguintes funções, primeiro por substituição direta em uma das fórmulas (2) a (7) da Seção 13.4, depois usando fórmulas (11) e (12) daquela seção:

$$\text{(a) } \frac{1}{1+x^3}; \qquad \text{(b) sen } x^2.$$

17. Use a fórmula (5) da Seção 13.4 para calcular as somas das seguintes séries:

(a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{n!}$; (b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{n!}$;

(c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2-1}{n!}$.

CAPÍTULO

14

A TEORIA DAS SÉRIES INFINITAS

14.1 INTRODUÇÃO

No Capítulo 13 apresentamos um rápido esboço das séries infinitas em que somente alguns dos pontos de destaque foram mencionados. As provas de convergência que demos utilizavam métodos especiais de valor limitado que só se aplicam às séries particulares em questão. Descrevemos brevemente diversos métodos muito poderosos para se trabalhar com séries, mas essas observações foram bem informais e nada de substancial foi provado. Nosso objetivo principal naquele capítulo introdutório era ajudar os estudantes a entrarem no assunto e compreenderem suas principais linhas gerais tão rapidamente quanto possível, como viajantes inteligentes que fazem uma excursão preliminar, com guia, numa cidade grande, com o propósito de orientação geral antes de explorar minuciosamente suas ruas, praças, mercados e museus. Estamos agora prontos para essa segunda fase de nosso trabalho.

Os estudantes de Cálculo nem sempre compreendem que as séries infinitas são primordialmente instrumentos para o estudo de funções. Por exemplo, na Seção 13.4 estabelecemos as expansões em série de potências do seno e do co-seno:

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \qquad \text{e} \qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots,$$

mas, como essas funções eram presumivelmente bem conhecidas de antemão, pode não ter ficado claro o propósito de expressá-las dessa forma. Expansões de funções conhecidas têm sua própria importância, especialmente no cálculo de valores numéricos para essas funções. Entretanto, em trabalhos mais avançados é freqüente aparecer uma série de potências desconhecida, talvez como solução de uma equação diferencial. Em tal caso, a série é usada para *definir* a função desconhecida de outro modo, isto é, como uma soma, e assim a própria série fica sendo o único instrumento que temos para investigar as propriedades dessa função. A situação pode ser melhor compreendida

supondo-se que os fatos básicos acerca de sen x e cos x – sua continuidade, as identidades que satisfazem, suas propriedades a respeito de derivação e integração etc. – poderiam ser descobertos somente pelo exame das séries dadas acima. Para essas funções familiares, um tal processo tortuoso é naturalmente desnecessário, mas para muitas funções importantes da Matemática Avançada não há outra alternativa mais prática. Assim, abordaremos séries numéricas na primeira parte deste capítulo como um prelúdio para estudar séries de funções – especialmente séries de potências – nas seções posteriores; sendo que nosso objetivo final em estudar séries de funções é aprender tudo que pudermos acerca da soma de tais séries.

Todavia, nosso interesse em séries não está restrito a seu valor para essas aplicações, e no decorrer de nosso trabalho tocaremos em muitos tópicos fascinantes da Matemática Pura que vale a pena estudar por seu próprio interesse. Assim, veremos que o estudo de séries está ligado a algumas das partes mais interessantes da Teoria dos Números, tais como: os números primos, os números irracionais e transcendentes, a natureza das constantes e e π e assuntos semelhantes. Desejamos manter a estrutura deste capítulo tão simples quanto possível para que os leitores se sintam interessados. Por essa razão colocamos a maioria deste material opcional no Apêndice A, que poderá ser examinado ou não de acordo com a preferência de cada estudante.

Nossa intenção é começar tudo de novo e não omitir nada de essencial. Isto nos leva a repetir algumas idéias básicas já abordadas no Capítulo 13. Entretanto, seremos tão breves quanto possível, e os estudantes podem pensar que um sumário conciso dessas idéias seja uma maneira útil de começar a construir um sólido alicerce para uma compreensão ampla e profunda do assunto.

14.2 SEQÜÊNCIAS CONVERGENTES

Todo estudo razoavelmente satisfatório de séries deve estar baseado numa definição cuidadosa de convergência de seqüências. No entanto, o comportamento de muitas seqüências é fácil de ser entendido sem explanações elaboradas, e uma teoria maçante de seqüências convergentes seria um obstáculo indesejável, bloqueando nosso caminho para os principais conceitos deste capítulo. Discutiremos, portanto, as seqüências bem resumidamente e tentaremos nos manter num percurso intermediário entre informalidade excessiva e detalhes tediosos.

Se a cada inteiro positivo n corresponde um determinado valor x_n, então dizemos que os x_n's formam uma *seqüência*. Consideramos os x_n arranjados pela ordem de seus índices,

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots,$$

e, muitas vezes, abreviamos essa disposição por $\{x_n\}$ É claro que uma seqüência nada mais é que uma função definida para todos os inteiros positivos n, com a ênfase colocada na notação indexada x_n em vez de na notação funcional $x(n)$. Os números que constituem uma seqüência chamam-se *termos*. Assim, x_1 e x_2 são o primeiro e o segundo termos da seqüência dada, e x_n é o n-ésimo termo.

Exemplo 1 Em cada um dos seguintes itens, definimos uma seqüência $\{x_n\}$, dando uma fórmula para seu n-ésimo termo:

(a) $x_n = 1$, isto é, $1, 1, 1, \ldots$;
(b) $x_n = [1 - (-1)^n]/2$, isto é, $1, 0, 1, 0, \ldots$;
(c) $x_n = 1/n$, isto é, $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$;
(d) $x_n = (n - 1)/n$, isto é, $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots$;
(e) $x_n = (-1)^{n+1}/n$, isto é, $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots$;
(f) $x_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \cdots + \dfrac{1}{2^{n-1}}$;
(g) $x_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n}$;
(h) $x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$.

Uma seqüência como (a), em que todos os termos são iguais, chama-se *seqüência constante*. Nem toda seqüência tem uma fórmula simples, ou mesmo alguma fórmula. Isto é mostrado pela seqüência $\{d_n\}$, onde d_n é o n-ésimo algarismo após a vírgula na expansão decimal de π.

Às vezes convém relaxar a definição e permitir que uma seqüência comece com o zero-ésimo termo, x_0, ou mesmo com o segundo ou terceiro termo, x_2 ou x_3, em vez de exigir que comece com o primeiro termo, x_1. Uma razão para isto é que desejamos incluir seqüências como as definidas por $x_n = 1/\ln n$, onde x_1 não tem sentido. Em todo caso, continuamos a chamar o termo com o índice n de n-ésimo termo.

Uma seqüência $\{x_n\}$ diz-se *limitada* se existem dois números A e B tais que $A \leqslant x_n \leqslant B$ para todo n e, nesse caso, A chama-se *minorante* e B, *majorante* da seqüência. Uma seqüência que não é limitada diz-se *ilimitada*. No Exemplo 1 é fácil ver que as seqüências (a) a (f) são limitadas, mas é menos óbvio que (g) não seja (sugestão: $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$, e assim por diante). A seqüência (h) é também limitada, mas isto não é evidente por simples inspeção e será estabelecido mais tarde.

Nosso principal interesse está no conceito de limite de seqüência. *Grosso modo*, isto refere-se ao fato de que certas seqüências $\{x_n\}$ têm a propriedade de ter os números x_n cada vez mais próximos de algum número real L quando n cresce. Um outro modo de afirmar isto é dizer que $|x_n - L|$ fica cada vez menor quando n cresce. Como ilustração, considere a seqüência $\{x_n\}$, cujo n-ésimo termo é $x_n = (n - 1)/n$:

$$0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots .$$

Esses números parecem "tender" ao número 1 quando nos movemos cada vez mais para a direita. De fato, para cada n temos

$$|x_n - 1| = \left|\frac{n-1}{n} - 1\right| = \left|-\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n};$$

e o número $1/n$, e portanto $|x_n - 1|$, *pode ser tornado tão pequeno quanto quisermos, tomando* n *suficientemente grande.* Expressamos esse comportamento dizendo que a seqüência *tem o limite 1*, e escrevemos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = 1.$$

É muito útil visualizar esse comportamento da maneira sugerida pela Figura 14.1

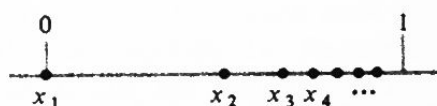



Figura 14.1

A definição geral é a seguinte: dizemos que uma seqüência $\{x_n\}$ tem um número L como *limite* se para cada número positivo ϵ existe um inteiro positivo n_0 com a propriedade

$$|x_n - L| < \epsilon \text{ para todo } n \geq n_0. \tag{1}$$

Quando L está relacionado a $\{x_n\}$ dessa maneira, escrevemos

$$\lim_{n\to\infty} x_n = L,$$

ou, mais resumidamente,

$$\lim x_n = L,$$

e dizemos que x_n *converge a L*. Isto é também expresso dizendo-se que x_n *tende a L quando n tende a infinito*, o que podemos escrever como

$$x_n \to L \qquad \text{quando} \qquad n \to \infty.$$

Essa notação é, muitas vezes, abreviada mais ainda para

$$x_n \to L$$

Essa definição exige que cada ϵ, não importa quão pequeno seja, tenha pelo menos um correspondente n_0 que "funcione" no sentido expresso por (1). Em geral esperamos que para ϵ's menores, sejam necessários n_0's maiores; isto é, quando a requerida medida de proximidade é tornada menor, devemos ir mais para frente na seqüência para satisfazê-la.

Dizemos que uma seqüência *converge* ou é *convergente* se tem um limite. Uma seqüência convergente não pode ter dois limites diferentes, pois não é possível x_n estar próximo tanto quanto queiramos de dois números diferentes para todos os n's suficientemente grandes.

Uma seqüência convergente é limitada, mas nem todas as seqüências limitadas são convergentes. A seqüência 1, 0, 1, 0, ... do Exemplo 1 (b) é um a seqüência limitada que não é convergente.

Nem sempre é fácil decidir se uma dada seqüência é convergente e, se for, achar seu limite. Os fatos seguintes são, muitas vezes, úteis nos problemas dessa natureza: se $x_n \to L$ e $y_n \to M$, então

$$\lim (x_n + y_n) = L + M, \qquad \lim (x_n - y_n) = L - M, \qquad \lim x_n y_n = LM,$$

e, com a hipótese adicional de que $M \neq 0$,

$$\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{L}{M}.$$

Esses fatos podem ser provados rigorosamente usando a definição e as propriedades de desigualdades. Omitimos esses detalhes. Usando essas regras podemos facilmente realizar façanhas tais como calcular

$$\lim \frac{2n^3 + n - 5}{7n^3 - 2n^2 + 4} = \lim \frac{2 + 1/n^2 - 5/n^3}{7 - 2/n + 4/n^3} = \frac{2 + 0 - 0}{7 - 0 + 0} = \frac{2}{7},$$

onde a primeira etapa essencial é dividir o numerador e o denominador pela potência mais alta de n que ocorre no denominador.

A idéia intuitiva usual de convergência – $x_n \to L$ significando que x_n pode ser tomado "tão próximo quanto se queira" de L tomando n "suficientemente grande" – é natural e necessária e é a maneira pela qual a maioria dos matemáticos realmente pensa acerca desse conceito. Conseqüentemente, na maior parte de nosso trabalho com seqüências confiaremos no senso comum para decidir quais detalhes são necessários para tornar um argumento convincente.

Exemplo 2 Se $|x| < 1$, então $\lim x^n = 0$. A maioria das pessoas aceita isto argumentando que "um número com valor absoluto menor que 1 que é elevado a uma potência cada vez maior torna-se cada vez menor". Mas se se deseja um argumento mais detalhado, este pode ser dado

como se segue. A asserção é clara se $x = 0$, logo suponhamos que $0 < |x| < 1$. Então $|x| = 1/(1 + a)$ para algum $a > 0$; assim, pelo Teorema do Binômio de Newton, temos

$$\frac{1}{|x^n|} = \frac{1}{|x|^n} = (1 + a)^n = 1 + na + \text{termos positivos} > na.$$

Vemos disto que $|x^n| < 1/na$; e como $1/na \to 0$, temos, evidentemente, $x^n \to 0$.

Exemplo 3 Para todo x, $\lim x^n/n! = 0$. Isto não é de modo algum óbvio, mas o breve argumento dado na Seção 13.4 é tanto convincente quanto satisfatório. Os estudantes devem reexaminar esse argumento.

Exemplo 4 O fato de que $\lim(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0$ provavelmente parecerá razoável após pensar um pouco (ele diz apenas que $\sqrt{n}$ é aproximadamente igual a $\sqrt{n+1}$ para n grande), mas um argumento definitivo pode não ser tão fácil de encontrar. Tal argumento pode ser construído escrevendo a quantidade $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ como uma fração com denominador 1 e racionalizando o numerador, como se segue:

$$\frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{1} = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{1} \cdot \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \to 0.$$

Ao trabalhar com seqüências ligadas às séries infinitas, precisaremos, muitas vezes, ser capazes de reconhecer quando uma seqüência é convergente, embora não saibamos nada acerca do valor numérico do limite. Em tal caso, não podemos fazer qualquer uso direto da definição de limite. Abordamos agora um método muito importante para manobrar essas situações.

Uma seqüência $\{x_n\}$ diz-se *crescente* se

$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_n \leq x_{n+1} \leq \cdots,$$

isto é, se cada termo é maior ou igual ao precedente*.

---

* Alguns escritores exigem que os termos de uma seqüência crescente satisfaçam a desigualdade estrita $x_n < x_{n+1}$, para todo n. Entretanto, nossa definição permite que uma seqüência crescente seja estacionária, no sentido de que termos adjacentes podem ser iguais.

Entre as seqüências listadas no Exemplo 1, (a), (d), (f) e (g) são evidentemente crescentes; (h) é também crescente, mas isto não é óbvio por inspeção.

Seqüências crescentes são mais agradáveis de trabalhar em virtude de seu comportamento de convergência ser particularmente fácil de determinar. Temos o seguinte critério simples: *uma seqüência crescente converge se e somente se é limitada.* Esse critério, além de simples, é também extremamente importante, porque a teoria de séries convergentes no restante deste capítulo origina-se diretamente dele.

Esse critério é bem fácil de estabelecer. Imagine que os termos da seqüência sejam plotados na reta real, como se mostra na Fig. 14.2, com cada termo à direita de (ou sobre) seu predecessor. Se a seqüência é ilimitada, então seus termos simplesmente marcham para fora da página, e a seqüência evidentemente não pode convergir.

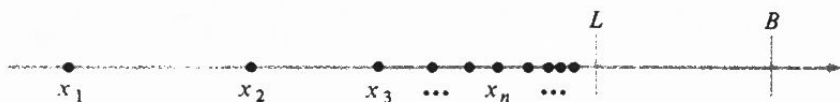



Figura 14.2

Isto prova a metade do critério, a parte "somente se". Para estabelecer a outra metade, assumimos que a seqüência é limitada com um majorante B, como se mostra na Fig. 14.2, e devemos produzir um limite da seqüência. De modo bastante resumido, vemos geometricamente que os x_n's que se movem uniformemente para a direita, não podendo ultrapassar a barreira em B, devem acumular em algum ponto $L \leqslant B$, logo L é o limite da seqüência e a seqüência converge a L*.

Esse critério de convergência tem muitas aplicações importantes, uma das quais é dada no exemplo seguinte. Para isto precisamos da fórmula da soma de uma progressão geométrica,

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} = \frac{1 - x^n}{1 - x}, \qquad x \neq 1. \tag{2}$$

---

* Um argumento mais detalhado pode ser dado como se segue. Todo número maior que B é também um majorante da seqüência, e talvez haja números menores que B também majorantes. Seja o número L o *menor* majorante da seqüência. Mostramos agora que L é o limite do qual a seqüência se aproxima, de modo que $x_n \to L$. Seja $\epsilon > 0$ dado. Como L é um majorante, temos $x_n \leqslant L$ para todo n. Entretanto, deve haver um n_0 tal que $L - \epsilon < x_{n_0}$; caso contrário, se para todo n $x_n \leqslant L - \epsilon$, então $L - \epsilon$ seria um majorante e L não seria o *menor* majorante. Como a seqüência é crescente, temos $L - \epsilon < x_n \leqslant L$ para todo $n \geqslant n_0$, logo $|x_n - L| < \epsilon$ para todo $n \geqslant n_0$, e concluímos que $x_n \to L$. Mesmo essa discussão pode ser considerada um argumento de plausibilidade e não uma prova, pois assumimos que o menor majorante L existe, e isto depende de uma propriedade crucial do sistema de números reais que está longe de ser óbvia. Para mais detalhes sobre menores majorantes (supremos), veja o Apêndice B.1 (Volume I).

Essa fórmula familiar já foi apresentada no Capítulo 13 e pode ser facilmente provada ainda de uma outra maneira, dividindo $x^n - 1$ por $x - 1$.

Exemplo 5 Nosso propósito aqui é provar que

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)=e. \tag{3}$$

Para isto discutimos conjuntamente as duas seqüências intimamente relacionadas $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ definidas por

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \qquad \text{e} \qquad y_n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}.$$

Demonstraremos que ambas as seqüências são crescentes e limitadas e, portanto, convergentes e além disso que elas convergem ao mesmo limite. Nosso primeiro passo é mostrar que $\{x_n\}$ é crescente e limitada. Pelo Teorema do Binômio de Newton, x_n pode ser expressa como a seguinte soma de $n+1$ termos:

$$\begin{aligned}
x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= 1+n\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3}+\cdots\\
&\qquad +\frac{n(n-1)\ldots[n-(n-1)]}{n!}\cdot\frac{1}{n^n}\\
&= 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots\\
&\qquad +\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).
\end{aligned} \tag{4}$$

Quando passamos de x_n a x_{n+1}, substituindo n por $n+1$, é fácil ver dessa soma que cada termo após $1 + 1$ cresce e também que um outro termo é somado, logo $x_n < x_{n+1}$. Além disso, uma comparação termo a termo de (4) com os y_n's mostra que $x_n \leqslant y_n$. Aplicando a fórmula (2), temos que os y_n's têm como um majorante o número 3, isto é,

$$\begin{aligned}
y_n &= 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{2\cdot 3\cdots n}\\
&\le 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}=1+2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)<3,
\end{aligned}$$

e portanto os x_n's também têm 3 como majorante. Visto que $\{x_n\}$ é uma seqüência crescente com 3 como majorante, sabemos que converge. Seu limite é o número e, que foi introduzido de um modo um pouco diferente na Seção 8.3,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\frac{1}{e}, \tag{5}$$

Como $x_n \leqslant y_n < y_{n+1} < 3$, vemos que $\{y_n\}$ é também uma seqüência crescente limitada que tende a um limite $y \geqslant e$; isto conduzirá a nossa principal conclusão: que $y = e$. Se $m < n$ e consideramos somente os primeiros $m + 1$ termos de (4), então teremos

$$1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots$$
$$+\frac{1}{m!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)<x_n<e.$$

Se m é mantido fixo e n cresce, então obtemos

$$y_m=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{m!}\leq e,$$

logo $y \leqslant e$. Concluímos a partir daí que $y = e$, ou

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)=e,$$

que é (3). Observamos também que

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e. \tag{6}$$

pois esse limite pode ser escrito como

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n/(n+1)}{(1+1/n)^n}=\frac{1}{e}.$$

O fato adicional de que

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}=e \tag{7}$$

é uma conseqüência imediata de (6).

Exemplo 6 A maioria dos estudantes se recorda que um *número primo*, ou simplesmente um *primo*, pode ser definido como um inteiro $p > 1$ que não tem fatores positivos (ou divisores) exceto 1 e p.

Esses números formam uma das seqüências mais interessantes

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, \ldots \tag{8}$$

O fato de que há infinitos primos, de modo que eles realmente constituem uma seqüência, é um famoso teorema da Teoria dos Números. A seqüência (8) é evidentemente não-convergente, e pode parecer que o conceito de seqüência convergente tem pouco ou nada de relevante com relação aos primos. No entanto, essa impressão é errônea, pois os estudantes que desejam prosseguir no assunto verão que o comportamento de convergência de certas seqüências está intimamente ligado à moderna Teoria dos Números Primos. Sustentamos essa observação enunciando, sem prova, o marcante teorema acerca do valor aproximado do n-ésimo primo: se p_n denota o n-ésimo número primo, então p_n é "assintoticamente igual" a $n \ln n$, no sentido de que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p_n}{n\ln n}=1.$$

Discutimos diversas propriedades dos primos no Apêndice A.1 (Volume I) e, para os leitores que estão interessados, continuamos essa discussão de maneira mais sistemática no Apêndice A.7, também do Volume I.

Problemas

1. Estabeleça se cada uma das seqüências indicadas converge ou diverge e, se convergir, determine o limite

(a) $\sqrt[3]{n}$; (b) $\dfrac{1+(-1)^n}{n}$;

(c) $\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{5n}$; (d) $\dfrac{10^{10^{10}}\sqrt{n}}{n+1}$;

(e) $\dfrac{3^n}{2^n+10^{10}}$; (f) $\dfrac{\sqrt{n+2}}{2\sqrt{n}}$;

(g) $\ln(n+1)-\ln n$; (h) $\dfrac{n^2}{\sqrt{4n^4+5}}$;

(i) $\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$; (j) $\cos n\pi$;

(k) $\cos\dfrac{(2n+1)^2\pi}{2}$; (l) $\dfrac{5n^3-2n}{n^4+3n^2-10}$;

(m) $n^{(-1)^n}$; (n) $\dfrac{\sqrt{n}\operatorname{sen}(n!e^n)}{n+1}$;

(o) $n\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{n}$; (p) $\dfrac{(2-\sqrt{n})(3+\sqrt{n})}{4n+5}$.

2. Mostre que $n!/n^n \to 0$. Sugestão: desenvolva e observe.

3. Os limites de muitas seqüências podem ser encontrados substituindo a variável discreta n por uma variável contínua x e aplicando a regra de L'Hospital para o caso $x \to \infty$. Use esse método para mostrar que

(a) $\dfrac{\ln n}{n} \to 0$;

(b) $\sqrt[n]{n} \to 1$;

(c) se $|a|<1$, então $na^n \to 0$;

(d) se k é um inteiro positivo qualquer, então $n^k/e^n \to 0$;

(e) se a é um número real qualquer, então $(1+a/n)^n \to e^a$.

4. Verifique se cada uma das seqüências indicadas converge ou diverge e, se convergir, determine seu limite.

(a) $3^{3/n}$; (b) $e^{-10/n}$;

(c) $n/2^n$; (d) $\dfrac{\ln(n+1)}{n}$;

(e) $n^2/3^n$; (f) $n^{1/(n+1)}$;

(g) $(n+10)^{1/(n+10)}$; (h) $n^2 \operatorname{sen} n\pi$;

(i) $n^2 \cos n\pi$.

5. Calcule $\lim x^n$ se

(a) $x_n = \sqrt{n}(\sqrt{n+a} - \sqrt{n})$;

(b) $x_n = n\left[\left(a + \dfrac{1}{n}\right)^4 - a^4\right]$.

6. Se $0 < a < b$, mostre que $\sqrt[n]{a^n + b^n} = b$.

7. Se $f(x) = \lim_{n\to\infty} (2/\pi) \operatorname{arc\,tg} nx$, mostre que $f(x) = x/|x|$ se $x \neq 0$ e $f(0) = 0$. Esboce o gráfico dessa função.

8. Se os termos de uma seqüência $\{x_n\}$ são números positivos, mostre que:

(a) a seqüência é crescente se $x_{n+1}/x_n \geqslant 1$ para todo n;

(b) a seqüência é decrescente se $x_{n+1}/x_n \leqslant 1$ para todo n*.

9. Use o Problema 8 para mostrar que $\lim x_n$ existe se

(a) $x_n = \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}$;

(b) $x_n = \dfrac{1}{n^2}\left[\dfrac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}\right]$;

(c) $x_n = \dfrac{1}{n}\left[\dfrac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}\right]^2$.

---

* Naturalmente, uma seqüência $\{x_n\}$ é tida *decrescente* se

$$x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \cdots \geq x_n \geq x_{n+1} \geq \cdots,$$

isto é, se cada termo é menor ou igual ao precedente.

10. Calcule o valor de

(a) $\lim \dfrac{(n+1)^n}{n^{n+1}}$;

(b) $\lim \dfrac{(n+1)\ln n - n\ln(n+1)}{\ln n}$.

11. Mostre que

$$\left[\frac{n+1}{n^2} + \frac{(n+1)^2}{n^3} + \cdots + \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}\right] \to e - 1.$$

12. Mostre que

(a) $\left(1 + \dfrac{1}{2n+3}\right)^{2n+3} \to e$;

(b) $\left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)^{n^2} \to e$;

(c) $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{2n} \to e^2$;

(d) $\left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)^{n} \to 1$;

(e) $\left(1 + \dfrac{1}{2n}\right)^{n} \to \sqrt{e}$.

13. Considere um número conveniente de círculos de tamanhos iguais agrupados em n fileiras dentro de um triângulo eqüilátero, como se mostra na Fig. 14.3.

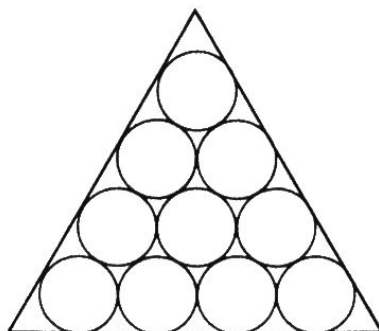



Figura 14.3

Se c_n denota o número desses círculos, então é claro, pela geometria da situação, que $c_1 = 1$, $c_2 = 1 + 2$, $c_3 = 1 + 2 + 3$ e assim por diante. Se A é a área do triângulo e A_n é a soma das áreas dos c_n círculos, mostre que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{A} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$$

14.3 PROPRIEDADES GERAIS DAS SÉRIES CONVERGENTES

Iniciamos com um breve resumo das principais idéias discutidas no Capítulo 13.

Muitas pessoas estão familiarizadas com o fato de que

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \cdots = 2. \tag{1}$$

No entanto, como não podemos somar um número infinito de números da mesma maneira que podemos somar um número finito, o significado de (1) é evidentemente bem diferente do significado de uma afirmação como

$$1 + 2 + 3 + 4 = 10.$$

O que (1) significa realmente é que a seqüência das somas parciais à esquerda, isto é, a seqüência de números

$$\begin{aligned}
&1,\\
&1 + \tfrac{1}{2} = 1\tfrac{1}{2},\\
&1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} = 1\tfrac{3}{4},\\
&1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} = 1\tfrac{7}{8},\\
&\quad \cdots,
\end{aligned}$$

converge para o número 2 à direita. Isto sugere a abordagem que adotamos no caso geral.

Se $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ é uma seqüência de números, então a expressão

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \tag{2}$$

é denominada *série infinita*, ou simplesmente *série*, e os a_n são seus *termos*. Enfatizamos que até que seja dado um significado a ela, com uma definição adequada, a expressão (2) é meramente uma coleção formal de símbolos arranjados de uma certa maneira, pois a operação indicada de somar uma quantidade infinita de números não tem significado por si mesma. Para associar um valor numérico para (2), de maneira natural e útil, como sugerido no parágrafo anterior, formamos a seqüência das *somas parciais*

$$s_1 = a_1,$$
$$s_2 = a_1 + a_2,$$
$$\cdots$$
$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$
$$\cdots .$$

Dizemos que a série (2) *converge* ou é *convergente* se a seqüência $\{s_n\}$ converge; e, se $\lim s_n = s$, dizemos que a série *converge para* s ou que s é a *soma* da série, e expressamos isto escrevendo

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = s \qquad \text{ou} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = s.$$

Se a série não converge, então dizemos que *diverge* ou é *divergente*, e não é atribuída nenhuma soma a ela.

Nesse ponto, algumas observações sobre a notação e uso são necessárias. Como indicamos, a afirmação de que a série $\Sigma_{n=1}^{\infty} a_n$ converge para a soma s escreve-se usualmente $\Sigma_{n=1}^{\infty} a_n = s$. Assim, a notação $\Sigma_{n=1}^{\infty} a_n$ é usada com um significado dual; para especificar uma série sem se importar com convergência ou divergência e também (se a série converge) para denotar sua soma. Os estudantes perceberão que essa ambigüidade não causa dificuldade na prática.

Um outro assunto se refere à indexação (ou numeração) dos termos. É, muitas vezes, mais natural numerar os termos de uma série iniciando com $n = 0$, isto é, escrevendo algumas séries na forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n + \cdots$$

(e nesse caso, escrevemos também $s_n = a_0 + a_1 + ... + a_n$). Por exemplo, a série à esquerda em (1) pode ser escrita como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} \qquad \text{ou} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n},$$

mas a última forma é um pouco mais nítida. É uma trivialidade que toda afirmação geral acerca de séries escritas como $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tem uma análoga para séries escritas como $\Sigma_{n=0}^{\infty} a_n$. Por esta razão, quando não há ambigüidade ou quando a distinção é imaterial, com freqüência omitimos os limites de soma e, por simplicidade, escrevemos Σa_n em vez de $\Sigma_{n=1}^{\infty} a_n$ ou $\Sigma_{n=0}^{\infty} a_n$. Estas observações também se aplicam às séries da forma $\Sigma_{n=k}^{\infty} a_n$ para todo inteiro $k \geq 2$.

Consideramos agora diversos exemplos fundamentais, alguns dos quais já encontramos no Capítulo 13.

Exemplo 1 Provavelmente a mais simples e mais importante de todas as séries infinitas é a conhecida *série geométrica*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots . \tag{3}$$

Pela equação (2) da Seção 14.2, a n-ésima soma parcial dessa série é dada pela fórmula fechada

$$s_n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

se $x \neq 1$. Se $|x| < 1$, temos que $s_n \to 1/(1-x)$; logo, para esses x temos

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x}.$$

A série (3), portanto, converge para a soma $1/(1-x)$ se $|x| < 1$, e é fácil ver que diverge para todos os outros valores de x.

Exemplo 2 Uma outra série cujo comportamento é particularmente simples é

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots = 1.$$

Para estabelecer a convergência e verificar que a soma é 1, usamos um truque engenhoso devido a Leibniz e observamos que

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Isto nos possibilita escrever a n-ésima soma parcial como

$$s_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1},$$

e assim é óbvio que $s_n \to 1$. Toda série cuja n-ésima soma parcial se divide dessa maneira numa fórmula fechada chama-se *série telescópica.*

Como esses exemplos sugerem, o método mais direto para estudar o comportamento de convergência de uma série é encontrar uma fórmula fechada para a n-ésima soma parcial. A principal desvantagem desta abordagem é que ela raramente funciona, porque geralmente é impossível encontrar uma tal fórmula. É essa situação que nos obriga a procurar muitas vezes métodos indiretos para estabelecer a convergência ou divergência da série.

O principal método indireto é relativo ao critério de convergência para as seqüências discutidas na Seção 14.2, isto é, usa o fato de que uma seqüência crescente converge se e somente se é limitada. Assim, se os termos de nossa série são todos números não-negativos, então temos claramente que $s_n \leqslant s_n + a_{n+1} = s_{n+1}$ para todo n e, portanto, os s_n formam uma seqüência crescente. Segue-se, nesse caso, que a seqüência $\{s_n\}$ de somas parciais – e *com ela a série* – converge se e somente se os s_n têm um majorante. Nossos próximos exemplos fornecem diversas ilustrações do uso dessa idéia simples mas importante.

Exemplo 3 A *série harmônica*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots \tag{4}$$

diverge porque suas somas parciais são ilimitadas, como vimos no início da Seção 14.2 Para estabelecer isto com um pouco mais de detalhes, considere m um inteiro positivo e escolha $n > 2^{m+1}$. Então,

$$\begin{aligned} s_n &> 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{m+1}} \\ &= \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^m + 1} + \cdots + \frac{1}{2^{m+1}}\right) \\ &> \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + \cdots + 2^m \cdot \frac{1}{2^{m+1}} = (m+1)\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Isto prova que s_n pode ser maior que a soma de qualquer número de 1/2 e portanto tão grande quanto se queira, tomando n suficientemente grande, e assim os s_n são ilimitados e (4) diverge. Uma série que se comporta dessa maneira é, com freqüência, dita *divergir para o infinito*, e expressamos este comportamento escrevendo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots = \infty.$$

Uma grande quantidade de séries interessantes – algumas convergentes e outras divergentes – pode ser obtida da série harmônica por eliminação, isto é, deixando de lado termos de acordo com um padrão sistemático. Por exemplo, se removemos todos os termos exceto os inversos de potências de 2, o que permanece é a série geométrica convergente

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots ;$$

e se removemos todos os termos exceto os inversos dos primos, então – como veremos numa seção posterior – a série resultante diverge

$$\sum \frac{1}{p_n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \cdots = \infty.$$

O princípio geral mais simples para decidir se uma série converge ou não é o *teste do n-ésimo termo: se Σa_n converge, então $a_n \to 0$*. Para provar isto, simplesmente observamos que $a_n = s_n - s_{n-1} \to s - s = 0$. Esse resultado mostra que $a_n \to 0$ é uma condição necessária para a convergência da série Σa_n. Infelizmente, no entanto, não é uma condição suficiente, isto é, não implica a convergência da série. Isto é fácil de ver, considerando a série harmônica $\Sigma 1/n$ que diverge, embora $1/n \to 0$. O teste do *n-ésimo* termo é essencialmente um teste de divergência, pois é equivalente à afirmação de que se a_n não tende a zero, então Σa_n deve divergir. Como exemplos de seu uso, mencionamos a série.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

e

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$$

A primeira diverge porque a seqüência $(-1)^{n+1}$ não converge de modo nenhum, e assim não pode convergir a zero, e a segunda diverge porque $n/(n+1) \to 1 \neq 0$.

Exemplo 4 A série dos inversos dos quadrados

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots, \tag{5}$$

é convergente. Como já vimos no terceiro rodapé da Seção 13.2, isto segue-se imediatamente do fato de que as somas parciais formam uma seqüência crescente tendo 2 como um majorante:

$$\begin{aligned} s_n &= 1 + \frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n \cdot n} \\ &< 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} \\ &= 1 + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) \\ &= 2 - \frac{1}{n} < 2. \end{aligned}$$

Dissemos antes que a soma da série (5) é $\pi^2/6$, e o argumento de plausibilidade de Euler para esse fato notável está descrito no Apêndice A.7 (Volume I). Uma prova moderna menos interessante – mas mais rigorosa e elementar – é dada no Apêndice A.8.

Exemplo 5 Se lembrarmos que $0! = 1$ e $1! = 1$, então é claro que a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

tem somas parciais $s_0 = 1$, $s_1 = 2$ e, para $n \geqslant 2$,

$$s_n = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdots n}.$$

Se cada fator nos denominadores é substituído por 2, então vemos que

$$s_n \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$$
$$= 1 + 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3;$$

logo a série converge com soma $\leqslant 3$. Pelo exemplo 5 da Seção 14.2 sabemos que a soma dessa série é realmente e:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots = e. \tag{6}$$

Utilizaremos esse fato proximamente para provar que e é um número irracional.

Esses exemplos fornecem um pequeno suprimento de séries específicas de comportamento de convergência conhecido, onde este comportamento é "decidível" por meios bastante elementares. O valor dessas séries particulares para determinar o comportamento de novas séries por vários métodos de comparação começará a aparecer na Seção 14.4. Primeiro, no entanto, há diversas propriedades simples de séries convergentes em geral que devem ser mencionadas explicitamente.

O uso efetivo das séries infinitas repousa na nossa liberdade de manipulá-las por vários processos da álgebra. Entretanto, logo veremos que a falta de cuidado pode levar facilmente à confusão e ao desastre. É portanto de importância primordial conhecer exatamente quais as operações permitidas e quais são armadilhas para o descuidado.

Se $\Sigma_{n=1}^{\infty} a_n$ converge a s, escrevemos

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = s \tag{7}$$

e chamamos s de "soma" da série. Essa terminologia bem estabelecida é talvez infeliz, pois tende a alimentar a crença de que uma série infinita pode ser tratada como se fosse uma soma finita ordinária. Na realidade, naturalmente, s não é obtida simplesmente por adição, mas é o limite de uma seqüência de somas finitas e as propriedades de séries devem ser baseadas nessa definição e não em qualquer analogia tentadora mas enganosa. Como veremos, muitas propriedades de somas finitas passam para as séries, mas devemos sempre ser cuidadosos em não assumir isto sem prova.

Como exemplo das ciladas que estão ao nosso redor, considere o fato familiar de que o rearranjo da ordem dos termos de uma soma finita não tem efeito no valor numérico da soma. Em contraste com isto, no Problema 10 pedimos aos estudantes que vejam por si mesmos que a soma de uma série infinita convergente pode ser alterada escrevendo seus termos – exatamente os mesmos termos! – em uma ordem diferente. Esse comportamento surpreendente (e fascinante) ilustra a necessidade de precaução. E também enfatiza a delicadeza dos conceitos com que estamos trabalhando, além de nos dar uma franca advertência de que não podemos esperar estudar séries infinitas com sucesso sem dar uma razoável atenção à teoria subjacente.

Começamos salientando que ao tratar com somas finitas podemos inserir ou remover parênteses livremente, como nas expressões

$$1-1+1=(1-1)+1=1-(1-1)=1,$$

mas isto não é verdadeiro para séries infinitas. Por exemplo, a série $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ evidentemente diverge, mas

$$(1-1)+(1-1)+\cdots=0+0+\cdots$$

converge a 0, e

$$1-(1-1)-(1-1)-\cdots=1-0-0-\cdots$$

converge a 1. Esses exemplos mostram que a inserção ou remoção de parênteses pode mudar a natureza de uma série infinita. Entretanto, no caso de uma série convergente como (7), qualquer série obtida dela, inserindo parênteses, tais como

$$a_1+(a_2+a_3)+(a_4+a_5+a_6)+\cdots,$$

ainda converge e tem a mesma soma. A razão para isto é que as somas parciais da nova série formam uma subseqüência da seqüência original de somas parciais e, portanto, converge necessariamente ao mesmo limite. Da mesma maneira, vemos que os parênteses podem ser removidos se a série resultante converge.

A seguir observamos que se $a_1 + a_2 + \ldots$ converge a s, então $a_1 + 0 + a_2 + 0 + \ldots$ também converge e tem a mesma soma, pois as duas seqüências de somas parciais são $s_1, s_2, \ldots$ e $s_1, s_1, s_2, s_2, \ldots$, e as repetições na última não interferem com sua convergência a s. Analogamente, número finito de 0 pode ser inserido ou removido em qualquer posição em uma série sem afetar seu comportamento de convergência ou (se convergir) sua soma.

É importante observar que quando duas séries convergentes são somadas, termo a termo, a série resultante converge à soma esperada, isto é, se $\Sigma_{n=1}^{\infty} a_n = s$ e $\Sigma_{n=1}^{\infty} b_n = t$, então $\Sigma_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = s + t$. Isto é fácil de provar, pois se s_n e t_n são as somas parciais, então

$$(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \cdots + (a_n + b_n) = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + (b_1 + b_2 + \cdots + b_n)$$
$$= s_n + t_n \rightarrow s + t.$$

Analogamente, $\Sigma_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n) = s - t$ e $\Sigma_{n=1}^{\infty} ca_n = cs$ para toda constante c. Convém também saber que se

$$a_1 + a_2 + \cdots = s,$$

então

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots = a_0 + s \qquad \text{e} \qquad a_2 + a_3 + \cdots = s - a_1.$$

A primeira afirmação é clara pelo fato de que

$$\lim\,(a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = \lim a_0 + \lim\,(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = a_0 + s,$$

e a segunda segue-se da mesma maneira. Assim, todo número finito de termos pode ser somado ou subtraído no começo de uma série convergente sem perturbar sua convergência, e as somas das várias séries são relacionadas da maneira esperada.

Usamos agora várias propriedades de séries, abordadas acima, para provar o seguinte teorema de Euler: *e é irracional.*

Nosso ponto de partida é a equação (6),

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots,$$

donde segue-se que o número

$$e - 1 - 1 - \frac{1}{2!} - \cdots - \frac{1}{n!} = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots \tag{8}$$

é positivo para todo inteiro positivo n. Suponhamos que e seja racional, de modo que $e = p/q$ para certos inteiros positivos p e q e deduzimos uma contradição dessa hipótese. Seja n em (8) escolhido tão grande que $n > q$ e definimos um número a por

$$a = n!\left[e - 1 - 1 - \frac{1}{2!} - \cdots - \frac{1}{n!}\right]$$

Como q divide $n!$, a é um inteiro positivo. Entretanto, (8) implica que

$$
\begin{aligned}
a &= n!\left[\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\cdots\right] \\
&= \frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots \\
&< \frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots \\
&= \frac{1}{n+1}\left[1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots\right] \\
&= \frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{1-1/(n+1)}=\frac{1}{n}.
\end{aligned}
$$

Essa contradição (não há número inteiro positivo $< 1/n$) completa o argumento.

Mais informações acerca de números irracionais (π é irracional etc.) são dadas no Apêndice A.8.

Problemas

1. Se Σa_n converge e Σb_n diverge, mostre que $\Sigma(a_n + b_n)$ diverge. Sugestão: suponha que convirja e deduza uma contradição.

2. Decida se cada uma das seguintes séries converge ou diverge e dê razões convincentes para sua resposta:

(a) $\frac{1}{500}+\frac{1}{505}+\frac{1}{510}+\cdots$;

(b) $\sum\left[\frac{2}{n}-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right]$; (c) $\sum\left(\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}\right)$;

(d) $\sum\left[\frac{2}{n(n+1)}-\frac{100}{n!}\right]$; (e) $\sum 2^{-1/n}$;

(f) $\sum\frac{1}{\ln 2^n}$; (g) $\sum\frac{1}{\ln 2^{n^2}}$;

(h) $\sum\cos\frac{(2n+1)\pi}{2}$; (i) $\sum\cos\frac{n\pi}{4}$.

3. Para cada uma das seguintes séries, determine os valores de x para os quais a série converge e expresse a soma como uma função simples de x:

   (a) $ax + ax^3 + ax^5 + \cdots, a \neq 0$;

   (b) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \cdots$;

   (c) $x + \frac{x}{1+x} + \frac{x}{(1+x)^2} + \cdots$;

   (d) $\ln x + (\ln x)^2 + (\ln x)^3 + \cdots$.

4. Mostre que

$$x^2 + \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{x^2}{(1+x^2)^2} + \cdots$$

converge para todo x e determine sua soma.

5. Mostre que $\Sigma 1/e^n$ converge mas que $\Sigma 1/(e^{\ln n})$ diverge. Para que valores de x, Σe^{nx} converge?

6. Mostre que

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} [\text{arc tg}^{-1} (n+1) - \text{arc tg}^{-1} n] = \pi/4$;

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \infty$.

7. Se $f(n) \to L$, mostre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} [f(n) - f(n+1)] = f(1) - L$$

e use isto para estabelecer as somas indicadas das seguintes séries telescópicas:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{2}$;

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{2n + 1}{n(n + 1)} = 1$;

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n + 1}{n^2(n + 1)^2} = 1$;

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n - 1)(4n + 3)} = \frac{1}{12}$.

8. Segue-se do Exemplo 4 que a série

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{11^2} + \cdots,$$

onde os denominadores são os quadrados dos primos sucessivos converge. Por quê?

9. Um *decimal* $a_0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$ é simplesmente um modo abreviado de escrever a série infinita.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots,$$

onde se supõe que a_0 seja um inteiro arbitrário e cada um dos a_n para $n \geqslant 1$ um dos algarismos 0, 1, 2, ..., 9. Mostre que todo decimal converge.

10. Considere a série familiar (Seção 13.3)

$$1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{8} + \cdots = \ln 2, \quad (*)$$

e escreva sob ela, como se segue, o resultado de multiplicar pelo fator 1/2:

$$\tfrac{1}{2} \qquad - \tfrac{1}{4} \qquad + \tfrac{1}{6} \qquad - \tfrac{1}{8} + \cdots = \tfrac{1}{2} \ln 2.$$

Agora some, combinando os termos colocados em colunas verticais, para obter a série

$$1 + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{4} + + - \cdots = \tfrac{3}{2} \ln 2. \quad (+)$$

---

* Esse fenômeno será explorado sob um ponto de vista diferente e esperamos que seja esclarecido nas Seções 14.5 e 14.7

Verifique (a) que (+) é válida; (b) que essa série pode ser obtida por rearranjo dos termos da série (*), de modo que os primeiros dois termos positivos de (*) são seguidos pelo primeiro termo negativo, depois os próximos dois termos positivos pelo segundo termo negativo etc.; e (c) que o valor da soma da série (*) foi misteriosamente multiplicado dessa maneira pelo fator 3/2*.

14.4 SÉRIES DE TERMOS NÃO-NEGATIVOS. TESTES DE COMPARAÇÃO

As séries infinitas mais fáceis de trabalhar são aquelas cujos termos são todos números não-negativos. A razão para isto – como vimos na Seção 14.3 – é que a teoria geral dessas séries pode ser expressa pela seguinte afirmação simples: *se* $a_n \geq 0$, *então a série* Σa_n *converge se e somente se sua seqüência* $\{s_n\}$ *de somas parciais é limitada.*

Assim, para estabelecer a convergência de uma série de termos não-negativos, é suficiente mostrar que seus termos tendem a zero suficientemente rápido para manter as somas parciais limitadas. Mas quão rápido é "suficientemente rápido"? Uma resposta a essa questão pode ser estabelecida informalmente como se segue: pelo menos tão rápido quando os termos de uma conhecida série convergente de termos não-negativos. Essa idéia está contida em uma afirmação formal chamada *teste de comparação:* se $0 \leq a_n \leq b_n$, então

Σan *converge se* Σb_n *converge;*
Σb_n *diverge se* Σa_n *diverge.*

A prova é fácil. A primeira etapa é observar que, se s_n e t_n são as somas parciais de Σa_n e Σb_n, então a hipótese implica

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq b_1 + b_2 + \cdots + b_n = t_n.$$

Nossa conclusão agora segue imediatamente dessa desigualdade e da afirmação do parágrafo anterior, pois, se os t_n são limitados, os s_n também são, e se os s_n são ilimitados, então os t_n também são ilimitados.

Exemplo 1 É fácil aplicar o teste de comparação para as séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n + 1} \quad \text{e} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}.$$

A primeira série converge, pois

$$\frac{1}{3^n + 1} \leq \frac{1}{3^n}$$

e $\Sigma 1/3^n$ converge; e a segunda diverge, pois

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{\ln n} \tag{1}$$

e $\Sigma 1/n$ diverge. [Para verificar (1) na forma equivalente $\ln n \leqslant n$, lembre-se de que o gráfico de $y = \ln x$ está abaixo do gráfico de $y = x$.]

Vale a pena observar que podemos desprezar qualquer número finito de termos no início de uma série se estamos interessados somente em decidir se essa série converge ou diverge*. Isto nos diz que a condição $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$ para o teste de comparação não precisa valer para todo n, mas somente para todo n de algum ponto em diante. Como ilustração, suponha que queremos mostrar que $\Sigma(n + 1)/n^n$ converge, por comparação com $\Sigma 1/n^2$. A desigualdade

$$\frac{n+1}{n^n} \leq \frac{1}{n^2}$$

não é verdadeira para todo n, mas é verdadeira para todo $n \geqslant 4$. A série, portanto, converge por comparação com a série convergente $\Sigma 1/n^2$.

O teste de comparação é muito simples em princípio, mas em casos complicados pode ser difícil estabelecer a desigualdade necessária entre os n-ésimos termos das duas séries comparadas. Como os limites são, com freqüência, mais fáceis de trabalhar do que desigualdades, o seguinte *teste de comparação de limite* é um instrumento mais conveniente para estudar muitas séries: *se Σa_n e Σb_n são séries com termos positivos tais que*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1, \tag{2}$$

então ambas convergem ou ambas divergem. Para provar isto, observamos que (2) implica que, para todo n suficientemente grande, temos

$$\frac{1}{2} \leq \frac{a_n}{b_n} \leq 2$$

---

* Por outro lado, se estamos interessados na soma de uma série convergente, então obviamente devemos levar em conta todos os seus termos.

ou

$$\frac{1}{2} b_n \leq a_n \leq 2b_n. \tag{3}$$

Como o comportamento de convergência de uma série não é afetado por multiplicação de cada um dos seus termos por uma mesma constante não-nula, nossa conclusão é uma conseqüência fácil das desigualdades (3) e do teste de comparação como foi estabelecido no parágrafo precedente. Assim, por exemplo, se Σb_n converge, então $\Sigma 2b_n$ converge e, pela segunda desigualdade em (3), Σa_n também converge etc.

Exemplo 2 A série $\Sigma(n+2)/(2n^3-3)$ converge, pois $\Sigma 1/2n^2$ converge e

$$\frac{(n+2)/(2n^3-3)}{1/2n^2} = \frac{2n^3+4n^2}{2n^3-3} \rightarrow 1 \quad \text{quando} \quad n \rightarrow \infty;$$

e Σ sen $(1/n)$ diverge, pois $\Sigma\ 1/n$ diverge e

$$\frac{\text{sen } 1/n}{1/n} \rightarrow 1 \quad \text{quando} \quad n \rightarrow \infty.$$

[Lembre-se de que lim (sen x)/x = 1; veja a Seção 9.2.]

O teste de comparação de limite é usado mais convenientemente se a condição (2) é substituída por

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = L,$$

onde $0 < L < \infty$. A prova é essencialmente a mesma e não será repetida.

O Exemplo 2 mostra que, ao usar o teste de comparação de limite, devemos tentar adivinhar o provável comportamento de Σa_n, estimando a "ordem de grandeza" do n-ésimo termo a_n. Isto é, devemos tentar julgar se a_n é aproximadamente igual a uma constante vezes o n-ésimo termo de alguma série cujo comportamento de convergência seja conhecido, tal como

$$\sum x^n, \quad \sum \frac{1}{n}, \quad \sum \frac{1}{n^2}, \quad \text{ou} \quad \sum \frac{1}{n!}.$$

Para aplicar esse método efetivamente, é evidentemente desejável ter a nossa disposição um estoque de séries de comparação de comportamento conhecido. O exemplo seguinte fornece uma família de séries que é particularmente significativa para esse propósito. Enfatizamos uma vez mais que o teste de comparação de limite é usado *somente se os termos da série testada são todos números positivos.*

Exemplo 3 Se p é uma constante positiva, então a *p-série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \cdots \tag{4}$$

diverge se $p \leqslant 1$ e converge se $p > 1$.

Para estabelecer isto, observamos primeiro que se $p \leqslant 1$, então $n^p \leqslant n$ ou $1/n \leqslant 1/n^p$, e assim (4) diverge por comparação com a série harmônica $\Sigma\, 1/n$. Provamos agora que (4) converge se $p > 1$ mostrando que suas somas parciais têm uma majorante. Seja n dado, escolha m de modo que $n < 2^m$. Então

$$s_n \leq s_{2^m-1} = 1 + \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p}\right) + \left(\frac{1}{4^p} + \cdots + \frac{1}{7^p}\right) + \cdots + \left[\frac{1}{(2^{m-1})^p} + \cdots + \frac{1}{(2^m - 1)^p}\right]$$

$$\leq 1 + \frac{2}{2^p} + \frac{4}{4^p} + \cdots + \frac{2^{m-1}}{(2^{m-1})^p}.$$

Se colocamos $a = 1/2^{p-1}$, então $a < 1$, pois $p > 1$, e

$$s_n \leq 1 + a + a^2 + \cdots + a^{m-1} = \frac{1 - a^m}{1 - a} < \frac{1}{1 - a}.$$

Isto fornece um majorante para os s_n's e o argumento está completo.

Como ilustração do uso dessa família de séries, vemos que

$$\sum \frac{1}{\sqrt{n^3 + 3}}$$

converge, pois a p-série (com $p = \frac{3}{2}$) $\Sigma 1/n^{3/2}$ converge e

$$\frac{1/\sqrt{n^3+3}}{1/n^{3/2}} = \sqrt{\frac{n^3}{n^3+3}} \to 1.$$

Vale a pena notar que $\Sigma 1/n^p$ não converge necessariamente se p é uma variável > 1. Isto é mostrado pela série

$$\sum \frac{1}{n^{1+1/n}},$$

que diverge, pois $\Sigma 1/n$ diverge e

$$\frac{1/n^{1+1/n}}{1/n} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \to 1.$$

(Lembre-se de que $\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1$.)

Concluímos esta seção com algumas observações sobre o processo de rearranjar os termos de uma série, discutido brevemente na Seção 14.3. Suponha que Σa_n seja uma série convergente de termos não-negativos cuja soma é s e forme uma nova série Σb_n rearranjando os a_n de qualquer maneira. Por exemplo, Σb_n pode ser a série

$$a_{10} + a_3 + a_5 + a_1 + a_6 + a_2 + \cdots .$$

Seja n um inteiro positivo dado e considere a n-ésima soma parcial $t_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$ da nova série. Como cada b é algum a, existe um m com a propriedade de que cada termo em t_n é um dos termos em $s_m = a_1 + a_2 + \ldots + a_m$. Isto nos diz que $t_n \leqslant s_m \leqslant s$, e assim Σb_n converge a uma soma $t \leqslant s$. Por outro lado, a primeira série é também um rearranjo da segunda, e assim, pelo mesmo raciocínio, temos $s \leqslant t$ e, portanto, $t \leqslant s$. Isto prova que *se uma série convergente de termos não-negativos é rearranjada de qualquer maneira, então a série resultante também converge e tem a mesma soma.* Se essa conclusão parece bem óbvia e trivial para os estudantes, recordem-se do Problema 10, da Seção 14.3, que não é verdadeira se retirarmos a hipótese de que os termos da série dada são números não-negativos.

Problemas

1. Estabeleça a convergência ou divergência das seguintes séries usando o teste de comparação:

(a) $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$; (b) $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n^2(n+1)}}$;

(c) $\sum \dfrac{1}{n^n}$; (d) $\sum \dfrac{1}{(\ln n)^n}$;

(e) $\sum \dfrac{1}{n^{\ln n}}$; (f) $\sum \dfrac{n+1}{n(n-1)}$;

(g) $\sum \dfrac{(2n+3)^n}{n^{2n}}$; (h) $\sum \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

Determine, por qualquer método, se cada uma das seguintes séries converge ou diverge:

2. $\sum \dfrac{3}{n^2+1}$.

3. $\sum \dfrac{1+3n^2}{n^3+700}$.

4. $\sum \sin \dfrac{1}{n^2}$.

5. $\sum \cos \dfrac{1}{n^2}$.

6. $\sum \dfrac{1}{3^n+9}$.

7. $\sum \dfrac{1}{(1+1/n)^n}$.

8. $\sum \dfrac{\sqrt{n}}{n^2+5}$.

9. $\sum \dfrac{\ln n}{n}$.

10. $\sum \dfrac{3n+2}{n} \cdot \dfrac{4^n}{5^n+1}$.

11. $\sum \dfrac{1}{n+\sqrt{n}}$.

12. $\sum \dfrac{\ln n}{n^3}$.

13. $\sum \dfrac{1000}{\sqrt[3]{n+1}\,\sqrt[4]{n^3+5}}$.

14. $\sum \dfrac{n^2}{n^2+100}$.

15. $\sum \dfrac{1}{n10^n}$.

16. $\sum \dfrac{1}{5000n}$.

17. $\sum \dfrac{n^2+3n-7}{n^3-2n+5}$.

18. $\sum \dfrac{\sqrt[3]{n+2}}{\sqrt[4]{n^3+3}\,\sqrt[5]{n^3+5}}$.

19. $\sum \dfrac{n^2}{n^5-\pi}$.

20. $\sum \dfrac{3+\cos n}{n^2}$.

21. $\sum \ln(1+1/n^p),\ p>0$.

22. $\sum \dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$.

23. $\sum (1-\cos 1/n)$.

24. $\sum \sqrt{n} \ln \frac{n+1}{n}$.

25. $\sum \frac{1}{n^p}\left(1+\frac{1}{2^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}\right), p>0.$

26. Se Σa_n é uma série convergente com termos não-negativos, mostre que Σa_n^2 também converge. Com as mesmas hipóteses, mostre com exemplos que $\Sigma\sqrt{a_n}$ pode ser convergente ou divergente.

27. Se p é uma constante positiva, mostre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^p} = 1+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{5^p}+\cdots$$

converge se $p>1$ e diverge se $p\leqslant 1$.

28. Mostre que $\Sigma 1/n$ diverge, comparando com a série divergente $\Sigma \ln(1+1/n)$ do Problema 6 (b) da Seção 14.3. Sugestão: compare os gráficos das funções $y = x$ e $y = \ln(1+x)$ para $x>0$.

29. Use a idéia do Problema 28 para mostrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$$

converge. Determine também a soma dessa série.

14.5 TESTE DA INTEGRAL. A CONSTANTE DE EULER

Entre as séries infinitas mais simples estão aquelas cujos termos formam uma seqüência decrescente de números positivos. Nesta seção estudaremos certas séries desse tipo por meio de integrais impróprias da forma

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx. \tag{1}$$

Recordamos que a integral à esquerda é dita *convergente* se o limite à direita existe (como um número finito) e, nesse caso, o valor da integral é, por definição, o valor do limite. Se esse limite não existe, então a integral é chamada *divergente*. Há uma analogia óbvia entre (1) e a correspondente definição para as séries,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{k \to \infty} \sum_{n=1}^{k} a_n.$$

Nosso propósito é explorar essa analogia utilizando integrais para obter informações acerca de séries.

Considere uma série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \tag{2}$$

cujos termos são positivos e decrescentes. Na maioria dos casos, o n-ésimo termo a_n é uma função de n dada por uma fórmula simples, $a_n = f(n)$. Suponha que a função $y = f(x)$, obtida substituindo a variável contínua x no lugar da variável discreta n, seja uma função de x decrescente para $x \geqslant 1$, como é mostrado na Fig. 14.4.

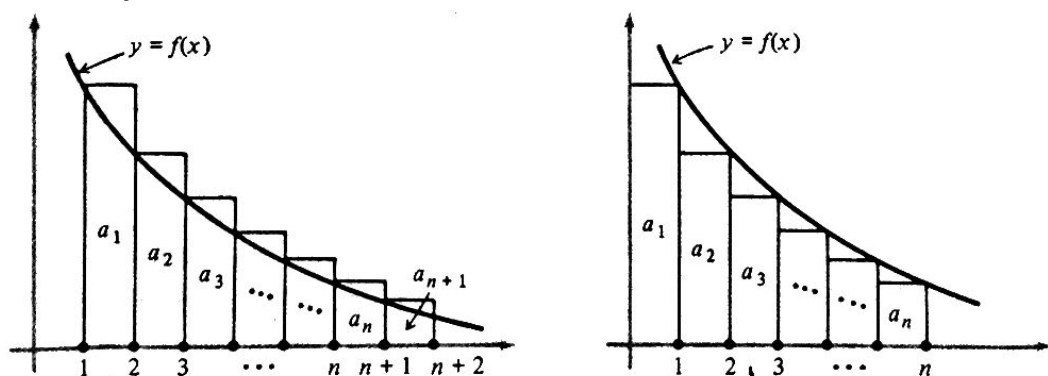



Figura 14.4

À esquerda na figura vemos que os retângulos de áreas $a_1, a_2 \ldots, a_n$ têm uma área total maior que a área sob a curva de $x = 1$ a $x = n + 1$; logo,

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq \int_1^{n+1} f(x)\, dx \geq \int_1^{n} f(x)\, dx. \tag{3}$$

Na figura à direita fazemos os retângulos se orientarem para a esquerda, de modo que fiquem sob a curva. Se ignoramos momentaneamente o primeiro retângulo, com área a_1, então vemos que

$$a_2 + a_3 + \cdots + a_n \leq \int_1^n f(x)\,dx;$$

e incluindo a_1 temos

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq a_1 + \int_1^n f(x)\,dx. \tag{4}$$

Combinando (3) e (4), obtemos

$$\int_1^n f(x)\,dx \leq a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq a_1 + \int_1^n f(x)\,dx. \tag{5}$$

O ponto principal de tudo isto é que as desigualdades (5) permitem-nos estabelecer o *teste da integral:*

Se $f(x)$ é uma função decrescente e positiva para $x \geqslant 1$, com a propriedade de que $f(n) = a_n$, para cada inteiro positivo n, então a série e a integral

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{e} \quad \int_1^{\infty} f(x)\,dx$$

*ambas convergem ou ambas divergem**.

O argumento é fácil, pois, se a série converge, então a desigualdade à esquerda de (5) mostra que a integral também converge; e se a integral converge, então a desigualdade à direita mostra que a série também converge.

Exemplo 1 (Novamente a p-série) Se p é uma constante positiva, então sabemos, pela Seção 14.4, que a p-série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots \tag{6}$$

* Esse teste é, muitas vezes, chamado de *Teste da Integral de Cauchy*, devido a seu descobridor, o eminente matemático francês do século XIX Augustin Louis Cauchy (pronuncia-se Côchi).

converge se $p > 1$ e diverge se $p \leqslant 1$. Há interesse em dar uma outra prova disso como ilustração do teste da integral. Como $a_n = 1/n^p$, consideramos a função $f(x) = 1/x^p$ (que evidentemente satisfaz todas as condições enunciadas) e examinamos a integral

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}.$$

Se $p = 1$, então essa integral diverge, pois

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty} \ln b = \infty.$$

Se $p \neq 1$, então

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to\infty} \int_1^b x^{-p}\, dx = \lim_{b\to\infty} \left(\frac{b^{1-p} - 1}{1 - p}\right),$$

e a questão de convergência depende do comportamento de b^{1-p} quando $b \to \infty$. Se $p < 1$, de modo que $1 - p > 0$, então $b^{1-p} \to \infty$ e a integral diverge. Se $p > 1$, de modo que $1 - p < 0$, então $b^{1-p} \to 0$ e a integral converge. Pelo teste da integral concluímos novamente que a p-série (6) converge se $p > 1$ e diverge se $p \leqslant 1$.

É claro que o teste da integral vale para qualquer intervalo da forma $x \geqslant k$, não só para $x \geqslant 1$. Faremos uso dessa observação em nosso próximo exemplo, que trata de uma classe de séries cujo comportamento não é revelado por nenhum de nossos testes anteriores.

Exemplo 2 Os termos da série

$$\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n \ln n} \tag{7}$$

decrescem mais rapidamente que os da série harmônica. Contudo, é fácil ver, pelo teste da integral, que (7) diverge, pois

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{b\to\infty} \int_2^b \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{b\to\infty} [\ln \ln x]_2^b$$
$$= \lim_{b\to\infty} (\ln \ln b - \ln \ln 2) = \infty.$$

De modo mais geral, se p é uma constante positiva, então

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$$

converge se $p > 1$ e diverge se $p \leqslant 1$; pois, se $p \neq 1$, temos

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^p} = \lim_{b\to\infty} \int_2^b \frac{dx}{x(\ln x)^p} = \lim_{b\to\infty} \left[\frac{(\ln x)^{1-p}}{1-p}\right]_2^b = \lim_{b\to\infty} \left[\frac{(\ln b)^{1-p} - (\ln 2)^{1-p}}{1-p}\right],$$

e esse limite existe se e somente se $p > 1$*.

Retornamos agora à série (2) para obter alguma informação adicional das desigualdades (5). Subtraindo a integral que ocorre à esquerda, essas desigualdades podem ser escritas como

$$0 \leq a_1 + a_2 + \cdots + a_n - \int_1^n f(x)\,dx \leq a_1, \tag{8}$$

e isto serve para focalizar nossa atenção sobre a quantidade do meio. Se denotarmos essa quantidade por $F(n)$, de modo que

$$F(n) = a_1 + a_2 + \cdots + a_n - \int_1^n f(x)\,dx,$$

então (8) torna-se

$$0 \leq F(n) \leq a_1.$$

De nosso ponto de vista, a chave para essa situação é o fato de que $\{F(n)\}$ é uma seqüência decrescente. Isto segue do cálculo

$$F(n) - F(n+1) = \left[a_1 + a_2 + \cdots + a_n - \int_1^n f(x)\,dx\right] - \left[a_1 + a_2 + \cdots + a_{n+1} - \int_1^{n+1} f(x)\,dx\right]$$

$$= \int_n^{n+1} f(x)\,dx - a_{n+1} \geq 0,$$

* As séries desse exemplo são chamadas *séries de Abel*, devido ao grande matemático norueguês Niels Henrik Abel, que foi o primeiro a investigá-las e determinar seu comportamento de convergência.

onde a razão para a última desigualdade pode ser entendida examinando-se o lado esquerdo da Fig. 14.4. Como toda seqüência decrescente de números não-negativos converge, o limite

$$L = \lim_{n\to\infty} F(n) = \lim_{n\to\infty} \left[a_1 + a_2 + \cdots + a_n - \int_1^n f(x)\,dx \right] \tag{9}$$

existe e satisfaz as desigualdades $0 \leqslant L \leqslant a_1$.

Como principal aplicação dessas idéias, deduzimos a existência do importante limite

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \right). \tag{10}$$

É fácil ver que isto é um caso especial de (9) em que $a_n = 1/n$ e $f(x) = 1/x$, pois

$$\int_1^n \frac{dx}{x} = \ln x \Big]_1^n = \ln n.$$

O valor do limite (10) é usualmente denotado pela letra grega γ (gama) e chama-se *constante de Euler:*

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \right). \tag{11}$$

Essa constante ocorre em diversas partes do cálculo avançado, especialmente na Teoria da Função Gama e é, junto com π e e, um dos números especiais mais importantes da Matemática. Seu valor numérico, $\gamma = 0, 57721566490153286060...$, foi calculado com várias centenas de casas decimais. Todavia, ninguém sabe se γ é racional ou irracional.

Para descrever algumas aplicações da constante de Euler, convém introduzir uma notação que foi amplamente aceita na Matemática do século XX. Sejam $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ duas seqüências e suponha que $b_n > 0$. Dizemos que "a_n é bem menor que b_n" e simbolizamos isto escrevendo

$$a_n = o(b_n),$$

se $a_n/b_n \to 0$. Em particular, $a_n = o(1)$ significa que $a_n \to 0$. Uma equação da forma $a_n = b_n + o(1)$ significa que $a_n - b_n = 0(1)$, e assim a_n e b_n diferem por uma quantidade que tende a zero, quando $n \to \infty$, como no cálculo

$$[a + o(1)] + 2[b + o(1)] = a + 2b + o(1).$$

Com a ajuda desta notação, (11) pode ser escrita na forma

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}=\ln n+\gamma+o(1). \tag{12}$$

Como $\ln n \to \infty$ quando $n \to \infty$, essa fórmula exibe de um modo muito transparente a razão para a divergência da série harmônica. É também útil para muitos outros propósitos, como mostram os seguintes exemplos.

Exemplo 3 Podemos usar (12) para dar uma prova simples da fórmula

$$1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}+\cdots=\ln 2. \tag{13}$$

Seja s_n a n-ésima soma parcial dessa série e observe que

$$\begin{aligned}
s_{2n} &= 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\\
&=\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)\\
&=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)\\
&=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\\
&=[\ln 2n+\gamma+o(1)]-[\ln n+\gamma+o(1)]\\
&=\ln 2+o(1)\to \ln 2.
\end{aligned}$$

As somas parciais ímpares tendem ao mesmo limite, pois

$$s_{2n+1}=s_{2n}+\frac{1}{2n+1}\to \lim s_{2n}=\ln 2,$$

logo a prova de (13) está completa. Enfatizamos que esse método estabelece (13) baseado em (12) apenas, sem fazer qualquer uso da expansão em série de potências de $\ln(1+x)$, como é dado na Seção 13.3.

Exemplo 4 Podemos também usar (12) para obter a notável fórmula

$$1 + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{4} + + - \cdots = \tfrac{3}{2} \ln 2, \tag{14}$$

que foi o assunto do Problema 10 da Seção 14.3. Esse método é semelhante ao do Exemplo 3. Se s_n é a n-ésima soma parcial de (14), então, como $2n$ é o n-ésimo número par e $2n - 1$ é o n-ésimo número ímpar, temos

$$\begin{aligned}
s_{3n} &= \left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n}\right) \\
&= \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{4n-1}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) \\
&= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{4n}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{4n}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) \\
&= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{4n}\right) - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) \\
&= [\ln 4n + \gamma + o(1)] - \tfrac{1}{2}[\ln 2n + \gamma + o(1)] - \tfrac{1}{2}[\ln n + \gamma + o(1)] \\
&= \ln 4n - \frac{1}{2} \ln 2n^2 + o(1) = \ln \frac{4n}{\sqrt{2}\, n} + o(1) \\
&= \ln 2^{3/2} + o(1) \to \ln 2^{3/2} = \tfrac{3}{2} \ln 2.
\end{aligned}$$

É fácil ver que as somas parciais

$$s_{3n+1} = s_{3n} + \frac{1}{4n+1} \qquad \text{e} \qquad s_{3n+2} = s_{3n} + \frac{1}{4n+1} + \frac{1}{4n+3}$$

tendem ao mesmo limite, logo a prova de (14) está completa.

Observação A idéia básica do teste da integral é comparar somas com integrais, olhando seus significados geométricos em termos de áreas. Essa idéia pode também ser usada para provar a divergência da série dos inversos dos primos, como foi mencionado na Seção 14.3:

$$\sum \frac{1}{p_n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \cdots = \infty.$$

Essa prova é um tanto complicada e, como não é essencial à linha principal de pensamento deste capítulo, será vista no Apêndice A.11.

Problemas

Use o teste da integral para determinar se cada uma das seguintes séries converge ou diverge:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^{n^2}}$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$.
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$.
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^4+1}$.
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+1}$.
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tan^{-1} n}{1+n^2}$.
8. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$.

9. (a) A série $\Sigma_{n=3}^{\infty} (\ln n)/n$ diverge por comparação com a série harmônica, pois

$$\frac{1}{n} \leq \frac{\ln n}{n}$$

para $n \geqslant 3$. Estabeleça essa divergência por meio do teste da integral.

(b) Se p é uma constante positiva, mostre que $\Sigma_{n=3}^{\infty} (\ln n)/n^p$ converge se $p > 1$ e diverge se $p \leqslant 1$.

10. (a) Use o teste da integral para mostrar que a série $\Sigma_{n=1}^{\infty} n/e^n$ converge.

(b) Qual a soma da série em (a)? Sugestão: assuma que a série geométrica $\Sigma_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots = 1/(1-x)$ pode legitimamente ser derivada termo a termo no intervalo $-1 < x < 1$.

11. A curva na Fig. 14.5 é o gráfico de $y = 1/x$. Convença-se de que a área total de todas as infinitas regiões sombreadas é a constante de Euler γ. Por inspeção da figura, mostre que o valor de γ está entre 1/2 e 1 e que é só um pouco maior que 1/2.

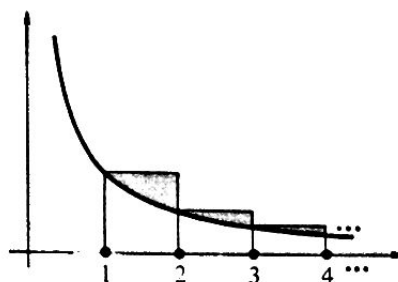



Figura 14.5

12. Use (12) para mostrar que

$$1 + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{2}{6} + + - \cdots = \ln 3.$$

13. Se $\{x_n\}$ é a seqüência definida por

$$x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n},$$

então $x_n \to \ln 2$, pois

$$x_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1+1/n} + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1+2/n} + \cdots + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1+n/n} \to \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2.$$

Estabeleça esse fato usando a fórmula (12).

14. A série harmônica

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

diverge muito lentamente. Para compreender quão lentamente, use (12) para mostrar que, a fim de fazer s_n exceder 10, devemos adicionar cerca de 12.000 termos.

14.6 TESTE DA RAZÃO E TESTE DA RAIZ

No caso da série geométrica Σr^n com $r > 0$, a razão a_{n+1}/a_n do $(n + 1)$-ésimo termo pelo n-ésimo termo tem o valor constante r, pois

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{r^{n+1}}{r^n} = r. \tag{1}$$

Sabemos que essa série converge se $r < 1$, essencialmente porque, para esses r's, a condição (1) garante que os termos decrescem rapidamente. A analogia nos leva a esperar que toda série Σa_n de termos positivos também converge se a razão a_{n+1}/a_n é pequena para n grande, embora essa razão possa não ter um valor constante.

Essas idéias são tornadas precisas no *teste da razão:*

Se Σa_n é uma série de termos positivos tal que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L, \tag{2}$$

então

(a) *se $L < 1$, a série converge;*

(b) *se $L > 1$, a série diverge;*

(c) *se $L = 1$, o teste não é conclusivo.*

Para estabelecer (a), assumimos que $L < 1$ e escolhemos um número qualquer r entre L e 1, de modo que $L < r < 1$. Então o significado de (2) nos diz que existe um n_0 tal que $a_{n+1}/a_n \leqslant r$ para todo $n \geqslant n_0$, logo

$$\frac{a_{n+1}}{r^{n+1}} \leq \frac{a_n}{r^n} \quad \text{para } n \geq n_0.$$

Isto implica que a seqüência $\{a_n/r^n\}$ é decrescente para $n \geqslant n_0$; em particular, $a_n/r^n \leqslant a_{n_0}/r^{n_0}$ para $n \geqslant n_0$. Assim, se fizermos $K = a_{n_0}/r^{n_0}$, teremos

$$a_n \leq Kr^n \quad \text{para } n \geq n_0. \tag{3}$$

Mas Σkr^n converge, pois $r < 1$ e, portanto, pelo teste da comparação, (3) implica que Σa_n converge. Para provar (b), observamos simplesmente que $L > 1$ implica que $a_{n+1}/a_n \geqslant 1$, ou, de modo equivalente, $a_{n+1} \geqslant a_n$ de algum ponto em diante; logo, a_n não pode tender a zero e, pelo teste do n-ésimo termo, sabemos que a série diverge. A parte (c) diz que se $L = 1$, então nenhuma conclusão pode ser tirada, isto é, às vezes a série converge e às vezes diverge. Para demonstrar isto, consideramos a p-série $\Sigma 1/n^p$. É claro que, para todos os valores de p, temos

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^p}{(n+1)^p} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^p \to 1,$$

e ainda essa série converge se $p > 1$ e diverge se $p \leqslant 1$.

O teste da razão é especialmente útil para manipular séries cujo n-ésimo termo a_n é dado por uma fórmula que envolve vários produtos, pois mesmo que o próprio a_n seja complicado, a razão a_{n+1}/a_n pode, muitas vezes, ser simplificada por cancelamentos.

Exemplo 1 Sabemos que a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

converge pelo argumento dado na Seção 14.3. O teste da razão conduz à mesma conclusão muito mais facilmente, pois

$$L = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{1/(n+1)!}{1/n!} = \lim \frac{n!}{(n+1)!} = \lim \frac{1}{n+1} = 0.$$

Como $L < 1$, a série converge.

Os estudantes devem observar o uso da equação $(n + 1)! = (n + 1)n!$ nesse exemplo; esse fato será, com freqüência, necessário em nosso trabalho futuro.

Exemplo 2 No caso da série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!}, \tag{4}$$

é fácil ver que

$$L = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{3^n} = \lim \frac{3}{n+1} = 0.$$

Novamente temos $L < 1$, logo a série converge.

Desde que o n-ésimo termo de qualquer série convergente tende a zero e portanto a convergência de (4) nos diz que $3^n/n! \to 0$, sabemos que $n!$ cresce mais rápido que 3^n quando $n \to \infty$. Os estudantes devem tentar desenvolver um sentimento intuitivo para as taxas relativas de crescimento de expressões como essas como uma ajuda para formar julgamentos rápidos mas confiáveis acerca do comportamento provável da série. Nessa ligação salientamos que o numerador 3^n do n-ésimo termo da série (4) contribui com o 3 no numerador da razão a_{n+1}/a_n após simplificação, e que o $n!$ no denominador contribui com o $n + 1$ no denominador dessa razão.

Exemplo 3 Para a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{3^n},$$

temos

$$L = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{(n+1)^{10}}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n^{10}} = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{10} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

Novamente temos $L < 1$, logo a série converge, pelo teste da razão.

Nesse exemplo, a convergência da série nos diz que 3^n cresce mais rápido que n^{10} e vemos do cálculo de L que a série comporta-se como a série geométrica com $r = 1/3$. Observamos também que o fator polinomial n^{10} contribui com o fator 1 para o cálculo de L, e assim nenhum fator polinomial como este tem qualquer efeito sobre o resultado do teste da razão.

Exemplo 4 A observação que precede o Exemplo 1 é ilustrada com clareza especial pela série

$$\frac{1}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 5 \cdot 8} + \cdots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n-1)} + \cdots.$$

Aqui o cancelamento de fatores leva a

$$L = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)(2n+1)}{2 \cdot 5 \cdots (3n-1)(3n+2)} \cdot \frac{2 \cdot 5 \cdots (3n-1)}{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)} = \lim \frac{2n+1}{3n+2} = \frac{2}{3},$$

e a série converge, pois $L < 1$.

Discutimos agora o chamado teste da raiz, que é um outro instrumento conveniente para estudar o comportamento de convergência de séries.

Suponha que Σa_n seja uma série de termos não-negativos com a propriedade de que a partir de algum n temos

$$a_n \le r^n, \qquad \text{onde } 0 < r < 1. \tag{5}$$

A série geométrica Σr^n evidentemente converge, logo Σa_n também converge pelo teste da comparação. O fato de que as desigualdades (5) podem ser escritas na forma

$$\sqrt[n]{a_n} \le r < 1 \tag{6}$$

dá-nos um enunciado conveniente do *teste da raiz:*

Se Σa_n *é uma série de termos não-negativos tais que*

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = L, \tag{7}$$

então

(a) *se* $L < 1$, *a série converge;*

(b) *se* $L > 1$, *a série diverge;*

(c) *se* $L = 1$, *o teste não é conclusivo.*

A prova repousa nas observações precedentes. Para (a), se $L < 1$ e r é um número qualquer tal que $L < r < 1$, então o significado de (7) nos diz que (6) vale para todos os n suficientemente grandes, e assim Σa_n converge. Para (b), se $L > 1$, então $\sqrt[n]{a_n} \ge 1$ de algum ponto em diante, e assim $a_n \geqslant 1$ para todos os n suficientemente grandes e a série diverge, pois a_n não tende a zero. Finalmente, estabelecemos (c) observando que $L = 1$ para a série divergente $\Sigma 1/n$ e a série convergente $\Sigma 1/n^2$, pois $\sqrt[n]{n} \to 1$ quando $n \to \infty$.

Exemplo 5 No caso da série

$$\sum \frac{1}{(\ln n)^n},$$

temos

$$L = \lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \frac{1}{\ln n} = 0.$$

Como $L < 1$, a série converge.

Em geral, o teste da raiz é provavelmente mais útil para tratar séries em que a_n é complicado mas $\sqrt[n]{a_n}$ é simples, de modo que lim $\sqrt[n]{a_n}$ é fácil de calcular. Entretanto, o valor prático do teste da raiz é excedido por seu significado teórico, e isto fica evidenciado principalmente na Teoria Avançada de Série de Potências.

Observação 1 O teste da razão e o teste da raiz foram primeiro estabelecidos e corretamente provados por Cauchy, em 1821, como parte da primeira exposição satisfatória dos conceitos básicos da Teoria das Séries.

Observação 2 Vimos que o teste da razão não é conclusivo quando $\lim a_{n+1}/a_n = 1$, mas isto está longe do final da história. Se $a_{n+1}/a_n \to 1$ por valores superiores, então temos $a_{n+1}/a_n \geqslant 1$ ou $a_{n+1} \geqslant a_n$, e Σa_n certamente diverge, pois a_n não tende a zero. Mas se $a_{n+1}/a_n \to 1$ por valores inferiores então há diversos testes mais delicados que são capazes de trazer informações adicionais. O leitor curioso encontrará alguns desses testes discutidos no Apêndice B.1.

Problemas

Use o teste da razão para determinar o comportamento das seguintes séries:

1. $\sum \frac{n}{2^n}$.

2. $\sum \frac{n^2}{2^n}$.

3. $\sum \frac{n^n}{2^n}$.

4. $\sum \frac{n!}{2^n}$.

5. $\sum \frac{n!}{n^n}$.

6. $\sum \frac{n!}{(2n)!}$.

7. $\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

8. $\sum \frac{(n!)^3}{(2n)!}$.

9. $\sum \frac{3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}{n!}$.

10. $\sum \frac{2^{2n}}{(2n+1)!}$.

11. $\sum \frac{2^{3n}}{3^{2n}}$.

12. $\sum \frac{(2n+2)!}{3^n(n!)^2}$.

13. $1 + \frac{1 \cdot 3}{2!} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{3!} + \cdots$
$+ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{n!} + \cdots$.

14. $\sum \frac{(n!)^2 3^n}{(2n)!}$.

15. Seja Σa_n uma série de termos positivos com a seguinte propriedade: existe um número $r < 1$ e um inteiro positivo n_0 tal que $a_{n+1}/a_n \geqslant r$ para todo $n \geqslant n_0$. Mostre que Σa_n converge embora $\lim a_{n+1}/a_n$ possa não existir.

Use o teste da raiz para determinar o comportamento das seguintes séries:

16. $\Sigma(\sqrt[n]{n} - 1)^n$.

17. $\sum \sqrt{n} \left(\frac{2n-1}{n+13}\right)^n$.

18. $\sum \frac{e^n}{n^n}$.

19. $\sum \left(\frac{n+1}{n}\right)^{3n} \cdot \frac{1}{3^n}$.

20. $\sum e^{2n} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

21. $\sum e^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

22. $\sum \frac{n^3}{(\ln 2)^n}$.

23. $\sum \frac{n^{10}}{(\ln 3)^n}$.

14.7 TESTE DA SÉRIE ALTERNADA. CONVERGÊNCIA ABSOLUTA

A maior parte de nossa atenção até agora foi dirigida para séries de termos positivos. Desejamos agora considerar séries com termos positivos e negativos. As mais simples são aquelas cujos termos são alternadamente positivos e negativos. Estas são chamadas *séries alternadas* e podem ser escritas na forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots, \tag{1}$$

onde os a_n são todos números positivos. Como exemplos que já são familiares em nosso trabalho prévio, mencionamos a série do ln 2

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \ln 2, \tag{2}$$

e também a série

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}, \tag{3}$$

cuja soma foi descoberta por Leibniz em 1673.

É fácil ver que as duas séries alternadas (2) e (3) têm a propriedade de que os a_n formam uma seqüência decrescente que tende a zero:

(i) $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots$;
(ii) $a_n \to 0$.

Em 1705 Leibniz observou que essas duas condições simples são suficientes para garantir que *toda* série alternada (1) converge. Esse fato chama-se *teste da série alternada*.

A essência da situação está no movimento para frente e para trás das somas parciais da série (1) sob as hipóteses estabelecidas, como está ilustrado na Fig. 14.6.

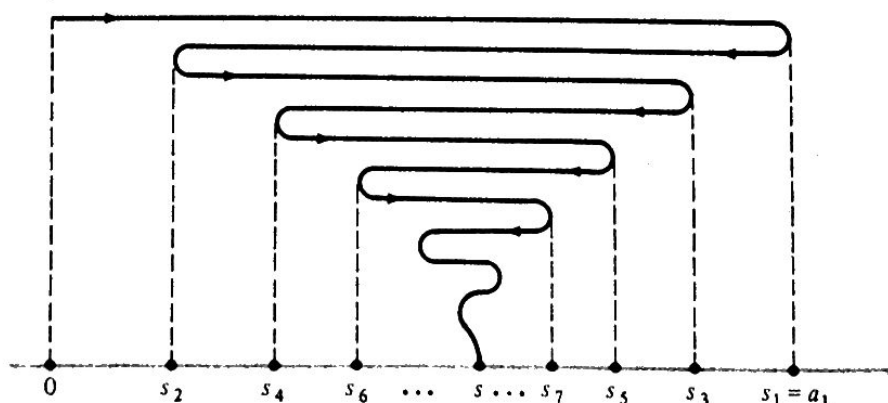



Figura 14.6 O teste da série alternada.

Para localizar as somas parciais $s_1, s_2, s_3, \ldots$, começamos na origem e vamos para a direita uma distância a_1 para atingir s_1, então vamos para a esquerda uma distância menor a_2 para atingir s_2, depois vamos para a direita uma distância ainda menor a_3 para atingir s_3 e assim por diante. O comportamento dessas somas parciais é semelhante ao de um pêndulo que oscila para frente e para trás e vagarosamente se aproxima de uma posição de equilíbrio que representa a soma s da série. Sugerimos que os estudantes tenham essa figura em mente ao ler a prova no parágrafo seguinte.

Agora os detalhes do argumento. Uma típica soma parcial par s_{2n} pode ser escrita de duas maneiras:

$$\begin{aligned} s_{2n} &= (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2n-1} - a_{2n}) \\ &= a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n}, \end{aligned}$$

onde cada expressão entre parênteses é não-negativa, pois os a_n formam uma seqüência decrescente. A primeira maneira de escrever s_{2n} exibe-a como a soma de n termos não-negativos, logo $s_{2n} \leqslant s_{2n+2}$ e as somas parciais pares formam uma seqüência crescente, como se mostra na figura. A segunda maneira de escrever s_{2n} mostra que $s_{2n} \leqslant a_1$, logo os s_{2n} têm um majorante. Como toda seqüência crescente limitada converge, existe um número s tal que

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n} = s.$$

Mas as somas parciais ímpares tendem ao mesmo limite, pois

$$s_{2n+1} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots - a_{2n} + a_{2n+1} = s_{2n} + a_{2n+1}.$$

e, portanto,

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} s_{2n} + \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = s + 0 = s,$$

pois $a_{2n+1} \to 0$ quando $n \to \infty$. Isto nos diz que a seqüência $\{s_n\}$ de *todas* as somas parciais converge ao limite s e, portanto, a série alternada (1) converge à soma s sob as condições estabelecidas.

Exemplo 1 O teste da série alternada evidentemente implica a convergência das séries (2) e (3),

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \ln 2 \qquad \text{e} \qquad 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4},$$

pois $1/n$ e $1/(2n - 1)$ ambos decrescem a zero. No entanto, esse teste não nos dá informação, de modo algum, acerca das somas dessas séries, e os estudantes se lembrarão de que as somas indicadas aqui foram estabelecidas em discussões prévias usando métodos muito diferentes de provar convergência.

Exemplo 2 Determine o comportamento de convergência das séries alternadas

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{1000 + 5n}; \qquad \text{(b)} \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln n}{n}.$$

Solução (a) Apesar dessa série ser alternada, temos que $a_n = n/(1000 + 5n) \to 1/5$ quando $n \to \infty$, logo a série diverge pelo teste do n-ésimo termo.

(b) Para provar que essa série converge, usando o teste da série alternada, devemos mostrar que $a_n = (\ln n)/n$ decresce a zero. Sabemos que $(\ln n)/n \to 0$ pelo Problema 3(a) da Seção 14.2. Para demonstrar que os a_n's são decrescentes, observamos que a função

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad \text{tem derivada} \quad f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

Essa derivada é negativa para $x > e$, logo $f(x)$ é também uma função decrescente para $x > e$, e, portanto, $a_n \geqslant a_{n+1}$ para $n \geqslant 3$. (Como é usual ao considerar o assunto de convergência, podemos desprezar os primeiros termos da série.) Nesse caso – e em outros – podemos estar convencidos de que a_n decresce a zero sem sentir nenhuma necessidade de uma verificação detalhada. Entretanto, se existir qualquer dúvida, devemos estar preparados para fornecer uma tal verificação.

Convergência Absoluta

Por que a série harmônica alternada

$$1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \cdots$$

converge enquanto a série harmônica

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \cdots$$

diverge? A razão essencial para a divergência da série harmônica é que seus termos não decrescem suficientemente rápido, como o fazem os termos da série convergente $\Sigma 1/2^n$, por exemplo. As somas parciais de $\Sigma 1/n$ consistem em muitos termos pequenos que somados dão um total grande, enquanto os termos de $\Sigma 1/2^n$ decrescem tão rapidamente que nenhuma soma de qualquer número deles pode mesmo atingir 2.

Em contraste com o comportamento relativamente simples dessas séries, a série harmônica alternada converge, não só porque seus termos ficam pequenos mas também porque os sinais de menos bem colocados impedem que as somas parciais cresçam muito e permitem que elas se aproximem de um limite finito.

Algumas séries com termos de sinais mistos não precisam da existência dos sinais de menos para a convergência, mas convergem apenas por causa da pequenez de seus termos; elas ainda convergiriam mesmo que todos os sinais de menos fossem substituídos por sinais de mais. Séries dessa natureza são particularmente importantes e são chamadas absolutamente convergentes, isto é, uma série Σa_n diz-se *absolutamente convergente* se $\Sigma |a_n|$ converge.

Essas observações sugerem que convergência absoluta é uma propriedade mais forte que convergência ordinária, no sentido de que *convergência absoluta implica convergência.* Isto é verdade e é fácil de provar, como se segue. Suponha que Σa_n seja uma série absolutamente convergente, de modo que $\Sigma |a_n|$ converge. As desigualdades $0 \leqslant a_n + |a_n| \leqslant 2\,|a_n|$ são evidentemente válidas, pois $a_n + |a_n|$ é igual a 0 ou $2\,|a_n|$ conforme $a_n < 0$ ou $a_n \geqslant 0$; e como $\Sigma 2\,|a_n|$ converge, sabemos que $\Sigma(a_n + |a_n|)$ também converge pelo teste de comparação. Como $\Sigma(a_n + |a_n|)$ e $\Sigma |a_n|$ convergem, sua diferença, que é Σa_n, também converge.

Quando tentamos estabelecer a convergência de uma série cujos termos têm sinais misturados, testar convergência absoluta é um bom primeiro passo, pois (como acabamos de ver) isto implica convergência. Para fazer isto, simplesmente trocamos todos os sinais de menos por sinais de mais e testamos a série resultante de termos não-negativos. Recordamos aos estudantes que nossos testes prévios – testes de comparação, teste da integral, teste da razão e teste da raiz – se aplicam apenas a séries de termos positivos (ou não-negativos) e são, portanto, essencialmente testes de convergência absoluta.

Exemplo 3 Teste as seguintes séries para convergência absoluta e também para convergência:

(a) $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots;$

(b) $1 \pm \frac{1}{2^2} \pm \frac{1}{3^2} \pm \frac{1}{4^2} \pm \cdots;$

(c) $1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots.$

Solução (a) Aqui a série $\Sigma|a_n|$ dos valores absolutos é $\Sigma 1/n^2$, que converge. Isto nos diz que a série (a) é absolutamente convergente e, portanto, convergente. Essa série também converge pelo teste da série alternada.

(b) O intento aqui é que os sinais de mais e de menos devem ser inseridos de qualquer maneira, ou aleatoriamente ou de acordo com algum padrão sistemático. Em qualquer caso, é claro que, exatamente como em (a), a série é absolutamente convergente e, portanto, convergente. Entretanto, sem o conceito de convergência absoluta não teríamos meios para determinar o comportamento de convergência dessa série.

(c) Nesse caso, a série dos valores absolutos é $\Sigma 1/\sqrt{n}$, que é uma p-série divergente. A série (c) é, portanto, não absolutamente convergente. Todavia, essa série é claramente convergente pelo teste da série alternada.

Observação 1 Uma série convergente que não é absolutamente convergente diz-se *condicionalmente convergente*. Como exemplo, mencionamos as séries (2) e (3) e também a série do Exemplo 3 (c). Todas as séries dessa natureza são propensas a ter um mau comportamento, surpreendente mas fascinante, e devem ser classificadas como "maneje com cuidado". Por exemplo, toda série desse tipo pode ser convergente a qualquer número dado ou mesmo divergente, por convenientes mudanças na ordem de seus termos. Por outro lado, toda série absolutamente convergente pode ser rearranjada de qualquer maneira sem alterar seu comportamento de convergência ou sua soma. Numa seção anterior dissemos que "o uso efetivo de séries infinitas repousa em nossa liberdade de manipulá-las pelos vários métodos da álgebra". De modo geral, essa liberdade é disponível somente quando estamos trabalhando com séries absolutamente convergentes. Esses itens e outros que não são normalmente partes de um primeiro curso serão abordados com detalhes no Apêndice B.2.

Observação 2 O único teste disponível que estabelece convergência diferente da convergência absoluta é o teste da série alternada. Diversos outros testes dessa espécie são apresentados no Apêndice B.3.

Observação 3 Os estudantes podem ter notado que quase todo o nosso trabalho nas seções precedentes deste capítulo foi devotado a mostrar se uma série converge ou diverge, e que muito pouco foi feito para achar a soma de uma série convergente. Uma boa razão para isto é que o segundo problema é usualmente muito mais difícil que o primeiro. Por exemplo, a convergência da série dos inversos dos quadrados é bem fácil de estabelecer, mas o valor exato de sua soma, ou seja, o fato de que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6},$$

está longe de ser óbvio e pode ser descoberto somente com alguma engenhosidade. Além disso, a convergência da série dos inversos dos cubos é igualmente fácil de estabelecer, mas sua soma *jamais* foi descoberta e permanece até hoje um dos problemas não resolvidos mais atormentadores da Matemática:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots = ?$$

Uma segunda e talvez mais importante razão para não forçarmos inicialmente o cálculo da soma de uma série convergente é que esse problema estará constantemente diante de nós nas aplicações que discutiremos no restante do capítulo. Isto é, estaremos "representando" uma dada função por uma certa espécie de série e sempre daremos atenção especial ao fato de provar que essa série realmente converge a uma dada função como sua soma. Dessa maneira, as somas de muitas séries numéricas convergentes serão conhecidas como uma conseqüência imediata de nosso trabalho sobre séries convergentes de funções.

Problemas

Classifique cada uma das seguintes séries como absolutamente convergente, condicionalmente convergente ou divergente:

1. $\sum (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n+10}}$.
2. $\sum (-1)^{n+1} \frac{1}{n\sqrt{n}}$.
3. $\sum (-1)^{n+1} \frac{n}{n+2}$.
4. $\sum (-1)^{n+1} \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n}}$.
5. $\sum (-1)^{n+1} \frac{2^n}{n!}$.
6. $\sum (-1)^{n+1} \frac{1}{3^{1/n}}$.
7. $\sum (-1)^{n+1} \frac{n^3}{1+n^5}$.
8. $\sum (-1)^{n+1} \frac{1}{\ln (n+2)}$.
9. $\sum (-1)^{n+1} \frac{\sqrt{n}}{\ln n}$.
10. $\sum (-1)^{n+1} \ln \frac{1}{n}$.
11. $\sum (-1)^{n+1} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$.
12. $\sum (-1)^{2n+1} \frac{1}{\sqrt{n}}$.
13. $\sum (-1)^{n+1} \frac{\sqrt{n}}{n+3}$.
14. $\sum (-1)^{n+1} \frac{1}{5n}$.
15. $\sum (-1)^{n+1} \frac{2}{3n^2}$.
16. $\sum (-1)^{n+1} \sin n\pi$.

17. $\sum (-1)^{n+1} \dfrac{\sin^2 n}{n^2}$.

18. $\sum (-1)^{n+1} \dfrac{\sin^2 n}{n^{5/2}}$.

19. $\sum (-1)^{n+1} \dfrac{\sin^2 n}{n^{9/2}}$.

20. $\sum (-1)^{n+1} \ln \sqrt[n]{n}$.

21. $\sum (-1)^{n+1} \dfrac{1}{\sqrt[5]{n^4}}$.

22. $\sum (-1)^{n+1} \dfrac{n^4 3^n}{n!}$.

23. $1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3!} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5!} - \dfrac{1}{6} + \cdots$.

24. $1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} - \cdots$.

25. $1 + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{7} - \dfrac{1}{8} + \cdots$.

26. Sabemos que se $\{a_n\}$ é uma seqüência decrescente de números positivos tais que $a_n \to 0$, então a série alternada (1) converge a algum número s como sua soma. Mostre que s está entre as somas parciais consecutivas s_n e s_{n+1} e que $|s_n - s| \leq a_{n+1}$.

27. Verifique se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira ou falsa:

    (a) toda série alternada convergente é condicionalmente convergente;

    (b) toda série absolutamente convergente é convergente;

    (c) toda série convergente é absolutamente convergente;

    (d) toda série alternada converge;

    (e) se Σa_n é condicionalmente convergente, então $\Sigma |a_n|$ diverge;

    (f) se $\Sigma |a_n|$ diverge, então Σa_n é condicionalmente convergente.

28. Se os a_n's são todos números positivos, mostre que a série $-a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \ldots$ converge se e somente se a série $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots$ converge. [Isto mostra que começar uma série alternada com um termo positivo, como em (1), é simplesmente uma conveniência, não uma necessidade.]

29. Se Σa_n e Σb_n são absolutamente convergentes, mostre que

    (a) $\Sigma (a_n + b_n)$ é absolutamente convergente;

    (b) $\Sigma c a_n$ é absolutamente convergente, para toda constante c.

30. Se Σa_n^2 e Σb_n^2 convergem, mostre que $\Sigma a_n b_n$ é absolutamente convergente. Sugestão: $(a-b)^2 \geq 0$, logo $2ab \leq a^2 + b^2$.

31. Use o Problema 30 para mostrar que, se Σa_n^2 converge, então $\Sigma a_n/n$ é absolutamente convergente.

32. Ao usar o teste da série alternada, é um erro comum verificar apenas se $a_n \to 0$, pois isto não é suficiente e a convergência não pode ser deduzida a menos que ambas as condições (i) e (ii) sejam verificadas. Demonstre esse fato no caso da série alternada

$$\frac{2}{1} - \frac{1}{1} + \frac{2}{2} - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} + \cdots$$

mostrando que

(a) $a_n \to 0$;

(b) os a_n não formam uma seqüência decrescente;

(c) a série diverge (sugestão: considere s_{2n}).

33. Se s é um número dado qualquer, mostre que a série harmônica alternada $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$ pode ser rearranjada (isto é, seus termos podem ser escritos numa ordem diferente) de tal modo que a série resultante convirja a s. Sugestão: tome um número suficiente de termos positivos para ficar acima de s, depois um número suficiente de termos para ficar abaixo de s etc.

14.8 SÉRIES DE POTÊNCIAS, NOVAMENTE. INTERVALO DE CONVERGÊNCIA

Nas seções anteriores deste capítulo concentramos nossa atenção sobre séries cujos termos são constantes. Nas cinco próximas seções voltaremos ao estudo de séries de potências cujos termos são funções muito simples de uma variável x. Já tomamos algum contato com as séries de potências no Capítulo 13, principalmente com aquelas que aparecem de um modo bem direto da série geométrica $1 + x + x^2 + \ldots$ Entretanto abordaremos agora esse assunto de um ponto de vista diferente, sendo que raramente teremos ocasião de nos referir ao trabalho anterior.

Lembramos que uma *série de potências* é uma série da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots, \qquad (1)$$

onde os coeficientes a_n são constantes e x é uma variável. Como as séries de potências são quase sempre indexadas de $n = 0$ a $n = \infty$, freqüentemente simplificamos a notação escrevendo (1) como $\Sigma a_n x^n$.

As séries de potências servem a muitos propósitos importantes tanto na teoria como nas aplicações da Matemática. Primeiro, elas são particularmente adequadas para o cálculo e são, portanto, úteis em muitos problemas numéricos. Segundo, fornecem um caminho alternativo para expressar muitas funções familiares e, muitas vezes, contribuem para nossa compreensão dessas funções. E, finalmente, no estudo das equações diferenciais, com freqüência descobrimos que as séries de potências são usadas para definir funções que são difíceis ou impossíveis de definir de qualquer modo. Para ser mais explícito acerca disso, uma equação diferencial pode, muitas vezes, ser usada para gerar uma solução na forma de série de potências, como ilustrado na Seção 13.1; é então não só conveniente mas perfeitamente razoável definir uma função $f(x)$ dizendo que é a soma de uma série de potências

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots,$$

supondo, é claro, que a série converge.

A série geométrica

$$\sum x^n = 1 + x + x^2 + \cdots \tag{2}$$

é evidentemente a série de potências mais simples. Sabemos que essa série converge para $|x| < 1$ e diverge para $|x| \geqslant 1$. Em geral, esperamos que uma série de potências convirja para alguns valores de x e divirja para outros.

Estaremos certamente muito interessados em conhecer os valores de x para os quais uma dada série de potências $\Sigma a_n x^n$ converge. Para tais x, a soma da série é um número cujo valor depende de x e é, portanto, uma função de x. Se denotamos essa função por $f(x)$, então $f(x)$ pode ser encarada como definida pela equação

$$f(x) = \sum a_n x^n. \tag{3}$$

Às vezes uma série de potências tem uma função conhecida como sua soma. Por exemplo, se $|x| < 1$, sabemos que a série (2) tem $(1/1 - x)$ como sua soma. Entretanto, em geral não há razão para esperar que a soma de uma série de potências convergente venha a ser uma função que possamos reconhecer facilmente.

Trataremos de dois grandes grupos de questões: Primeiro, que propriedades tem a função $f(x)$ definida por (3)? É contínua? É derivável? Se é derivável, sua derivada pode ser calculada derivando (3) termo a termo? E segundo – invertendo a situação – se uma função $f(x)$ é dada de antemão, sob que circunstâncias ela tem uma expansão em série de potências da forma (3)? Como podemos calcular essa expansão e o que pode ser dito acerca dos valores de x para os quais a expansão é válida? Estes são alguns dos pontos que estudaremos nas próximas seções.

Começamos determinando a natureza do conjunto de pontos para os quais uma série de potências arbitrária converge.

Primeiro, alguns exemplos. É claro que toda série de potências converge quando $x = 0$. Algumas séries convergem *somente* para esse valor de x, por exemplo,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n = x + 2^2x^2 + 3^3x^3 + 4^4x^4 + \cdots .^* \tag{4}$$

Para ver isso, basta observar que, para todo $x \neq 0$, temos $|nx| > 1$ se n é suficientemente grande, de modo que o n-ésimo termo $(nx)^n$ não tende a zero e a série não pode convergir. Em contrapartida, existem séries como

$$\sum \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots, \tag{5}$$

que convergem para todos os valores de x. Estabelecemos isto mostrando que (5) é absolutamente convergente para todo x e isto é fácil de provar pelo teste da razão:

$$\frac{|x^{n+1}/(n+1)!|}{|x^n/n!|} = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{|x|^n} = \frac{|x|}{n+1} \to 0.$$

(Quando se usa o teste da razão, é necessário testar convergência absoluta, pois esse teste se aplica somente a séries de termos positivos.) Como um exemplo simples que está entre esses extremos, temos a série geométrica (2), que converge no intervalo $|x| < 1$ e diverge fora desse intervalo.

Nossa tarefa é descobrir a estrutura do conjunto dos x para os quais uma dada série converge. Os exemplos discutidos acima mostram que há pelo menos três possibilidades: esse conjunto pode consistir no único ponto $x = 0$ ou ser a reta toda ou um intervalo limitado centrado na origem. Provaremos que estas são as *únicas* possibilidades.

A fim de estabelecer isto, precisamos do seguinte lema:

Se uma série de potências $\Sigma a_n x^n$ converge em x_1, $x_1 \neq 0$, *então ela converge absolutamente em todo* x *com* $|x| < x_1$; *e se ela diverge em* x_1, *então diverge em todo* x *com* $|x| > x_1$.

A prova é bem fácil. Se $\Sigma a_n x_1^n$ converge, então $a_n x_1^n \to 0$. Em particular, se n é suficientemente grande, temos $|a_n x_1^n| < 1$ e, portanto,

$$|a_n x^n| = |a_n x_1^n| \left|\frac{x}{x_1}\right|^n < r^n, \tag{6}$$

onde $r = |x/x_1|$. Agora suponha que $|x| < |x_1|$. Então, temos

$$r = \left|\frac{x}{x_1}\right| < 1,$$

* Essa série é indexada de $n = 1$ a $n = \infty$, pois n^n não tem sentido quando $n = 0$.

e a desigualdade (6) nos diz que $\Sigma|a_n x^n|$ converge por comparação com a série geométrica convergente Σr^n. Isto prova a primeira afirmação. Para provar a segunda afirmação, assumimos que $\Sigma a_n x_1^n$ diverge. Então $\Sigma a_n x^n$ não pode convergir para todo x com $|x| < x_1$, pois, de conformidade com o que foi provado anteriormente, implicaria a convergência absoluta – e, portanto, a convergência de $\Sigma a_n x_1^n$, e isto contradiz a nossa hipótese.

Estamos agora em posição de enunciar e provar os principais fatos acerca do comportamento de convergência de uma série de potências arbitrária.

Dada uma série de potências $\Sigma a_n x^n$, exatamente uma das seguintes afirmações é verdadeira:

(i) *A série converge somente para $x = 0$.*

(ii) *A série é absolutamente convergente para todo x.*

(iii) *Existe um número real positivo R tal que a série é absolutamente convergente para $|x| < R$ e divergente para $|x| > R$.*

O argumento segue o seguinte caminho. Se (i) não é verdade, então a série converge para algum $x_1 \neq 0$ e, pelo lema anterior, sabemos que, se $r = |x_1|$, então $\Sigma a_n x^n$ é absolutamente convergente sobre o intervalo $-r < x < r$. Seja S o conjunto de todos os números positivos r com a propriedade anterior. Se S é ilimitado, então (ii) é verdadeira. Agora, suponha que nem (i) nem (ii) sejam verdadeiras, de modo que S é um conjunto não-vazio de números positivos que tem um majorante. Pela propriedade básica de completividade do sistema de números reais, S tem supremo. Isto significa que existe um menor número R tal que $r < R$ para todos os valores r de S*. Agora é fácil ver que R tem as propriedades enunciadas em (iii).

O número real positivo R no caso (iii) chama-se *raio de convergência* da série de potências. Vimos que a série converge absolutamente em todo ponto do intervalo aberto $(-R,R)$ e diverge fora do intervalo fechado $[-R,R]$. Nenhuma afirmação geral pode ser feita acerca do comportamento da série nas extremidades R e $-R$. Há exemplos de séries que convergem em ambas as extremidades, ou divergem em ambas ou, ainda, convergem em uma e divergem na outra; para determinar o que acontece com qualquer série particular, devemos testar cada extremidade separadamente. O conjunto de todos os x para os quais uma série de potências converge chama-se *intervalo de convergência*. Essas idéias são ilustradas na Fig. 14.7.

Figura 14.7

* Veja o Apêndice B.1 (Volume 1) para uma discussão geral de supremos.

É costume tomar $R = 0$ quando a série converge somente para $x = 0$ e $R = \infty$ quando converge para todo x. Essa convenção permite-nos cobrir todas as possibilidades (exceto o comportamento nas extremidades) em uma única afirmação:

Toda série de potências $\Sigma a_n x^n$ tem um raio de convergência R, onde $0 \leqslant R \leqslant \infty$, com a propriedade de que a série converge absolutamente se $|x| < R$ e diverge se $|x| > R$. Deve ser observado que se $R = 0$, então nenhum x satisfaz a condição $|x| < R$, e se $R = \infty$, então nenhum x satisfaz a condição $|x| > R$; logo, em ambos esses casos, nossa afirmação geral é verdadeira por vacuidade.

Se uma série de potências $\Sigma a_n x^n$ é dada, como achar o seu intervalo de convergência?

A primeira etapa é achar o raio de convergência R. Há uma fórmula simples para R que funciona em muitas situações:

$$R = \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|, \tag{7}$$

supondo que esse limite exista – podendo eventualmente valer $+\infty$. Isto segue-se diretamente do teste da razão, pois a série converge absolutamente ou diverge, conforme o número

$$\lim \frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = \lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \cdot |x| = \frac{|x|}{\lim |a_n/a_{n+1}|}$$

seja < 1 ou > 1, isto é, conforme

$$|x| < \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \quad \text{ou} \quad |x| > \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

Isto estabelece (7).

A segunda etapa é testar o comportamento da série nas extremidades.

Exemplo 1 Determine o intervalo de convergência da série

$$\sum \frac{x^n}{n^2} = x + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \cdots$$

como indicado, essa série é entendida como sendo indexada de $n = 1$ a $n = \infty$, pois $a_n = 1/n^2$ não tem significado para $n = 0$.

Solução Aqui temos

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{1/n^2}{1/(n+1)^2} = \frac{(n+1)^2}{n^2} \to 1,$$

logo $R = 1$. Nesse exemplo, a série converge em ambas as extremidades: em $x = 1$, a série é $\Sigma 1/n^2$, que é uma p-série convergente, em $x = -1$, é $\Sigma(-1)^n/n^2$, que converge pelo teste da série alternada. O intervalo de convergência é portanto o intervalo fechado inteiro $[-1,1]$.

Exemplo 2 Determine o intervalo de convergência da série

$$\sum \frac{n+2}{3^n} x^n = 2 + \frac{3}{3}x + \frac{4}{3^2}x^2 + \cdots .$$

Solução Desta vez temos

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{n+2}{3^n} \cdot \frac{3^{n+1}}{n+3} = \frac{n+2}{n+3} \cdot 3 \to 3,$$

logo $R = 3$. Nesse caso, a série diverge em ambas as extremidades: em $x = 3$, é o mesmo que $2 + 3 + 4 + \ldots$ e em $x = -3$ torna-se $2 - 3 + 4 - \ldots$ O intervalo de convergência é, portanto, $(-3,3)$.

Exemplo 3 Determine o intervalo de convergência da série

$$\sum \frac{x^n}{n+1} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \cdots .$$

Solução Aqui temos

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{1/(n+1)}{1/(n+2)} = \frac{n+2}{n+1} \to 1,$$

logo $R = 1$. Em $x = 1$, a série é a harmônica $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$, que diverge, e em $x = -1$, é a série harmônica alternada $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots$, que converge. O intervalo de convergência é, portanto, $[-1,1]$.

Exemplo 4 Determine o intervalo de convergência da série

$$\sum (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots . \tag{8}$$

Solução A fórmula (7) não se aplica diretamente, pois a metade dos coeficientes dessa série de potências é zero. Todavia, a série pode ser escrita na forma

$$1 - \frac{y}{2!} + \frac{y^2}{4!} - \cdots,$$

onde $y = x^2$. Nossa fórmula pode ser aplicada a essa série e acarreta

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{1/(2n)!}{1/(2n+2)!} = \frac{(2n+2)!}{(2n)!} = (2n+1)(2n+2) \to \infty,$$

logo $R = +\infty$ para a y-série. Segue-se que a x-série também converge para todo x, logo o intervalo de convergência desejado para (8) é $(-\infty, \infty)$.

Se a é um número real, a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots \tag{9}$$

chama-se *série de potências em* $(x - a)$. Para efeito de ênfase, o caso particular (1) em que $a = 0$ chama-se, muitas vezes, *série de potências em* x. Se colocamos $z = x - a$, então (9) torna-se $\Sigma a_n z^n$, que é uma série de potências em z. Se podemos determinar o intervalo de convergência dessa última série pelos métodos previamente descritos, então essa informação pode ser utilizada para determinar o intervalo de convergência de (9). Por exemplo, se $\Sigma a_n z^n$ tem $[-R, R)$ como seu intervalo de convergência, então ela converge para $-R \leqslant z < R$. Isto significa que $-R \leqslant x - a < R$ ou $a - R \leqslant x < a + R$. Dizemos então que $[a - R, a + R)$ é o *intervalo de convergência* e que R é o *raio de convergência* da série de potências (9).

Para efeito de simplicidade de notação, limitaremos a maioria de nossas discussões detalhadas a séries de potências em x.

Problemas

Determine o intervalo de convergência de cada uma das seguintes séries de potências.

1. $\sum \frac{n}{4^n} x^n$.
2. $\sum n! x^n$.
3. $\sum \frac{n!}{100^n} x^n$.
4. $\sum \frac{2^n}{n^2} x^n$.

5. $\sum \frac{x^n}{n+4}$.

6. $\sum (-1)^{n+1} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$.

7. $\sum \frac{x^n}{n^3+1}$.

8. $\sum \frac{2^n}{(2n)!} x^{2n}$.

9. $\sum \frac{(3n)!}{(2n)!} x^n$.

10. $\sum \frac{x^n}{n(n+1)}$.

11. $\sum \frac{x^{2n+1}}{(-3)^n}$.

12. $\sum \frac{x^n}{n2^n}$.

13. $\sum \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$.

14. $\sum n^2 x^n$.

15. $\sum \frac{(-2)^n}{n} x^n$.

16. $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{n}\, 2^n} x^n$.

17. $\sum \frac{x^n}{\ln n}$.

18. $\sum \frac{\ln n}{n} x^n$.

19. $\sum \frac{(-1)^n}{n(\ln n)^2} x^n$.

20. $\sum \frac{3^n}{n4^n} x^n$.

21. $\sum \frac{n^2}{2^n} (x-4)^n$.

22. $\sum \frac{3^n}{n^2+1} (x-1)^n$.

23. $\sum \frac{10^n}{(2n)!} (x-7)^n$.

24. $\sum \frac{(x-3)^n}{n^2 2^n}$.

25. $\sum \frac{(2n)!}{n!} (x-10)^n$.

26. $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n \ln n} (x-3)^n$.

27. $\sum \frac{\ln n}{e^n} (x-e)^n$.

28. $\sum \frac{n^2}{2^{3n}} (x+2)^n$.

29. Determine o raio de convergência da

(a) série hipergeométrica

$$1 + \frac{ab}{c} x + \frac{a(a+1)b(b+1)}{2!c(c+1)} x^2 + \frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{3!c(c+1)(c+2)} x^3 + \cdots;$$

(b) função de Bessel

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \cdots.$$

30. Dê um exemplo de uma série de potências com $R = \pi$.

31. Se infinitos coeficientes de uma série de potências são inteiros não-nulos, mostre que $R \leq 1$.

14.9 DERIVAÇÃO E INTEGRAÇÃO DE SÉRIES DE POTÊNCIAS

Considere uma série de potências $\Sigma a_n x^n$ com um raio de convergência positivo R. Vimos na Seção 14.8 que essa série pode ser usada para definir uma função $f(x)$ cujo domínio de definição é o intervalo de convergência da série. Especificamente, para cada x nesse intervalo, definimos $f(x)$ como sendo a soma da série

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots . \quad (1)$$

Essa relação entre a série e a função á expressa, com freqüência, dizendo-se que $\Sigma a_n x^n$ é uma *expansão em série de potências* de $f(x)$. Por exemplo, sabemos que se $|x| < 1$, então

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots , \quad (2)$$

pois a série geométrica $\Sigma(-1)^n x^n$ converge e tem a soma $1/(1+x)$. Conseqüentemente, a função $f(x) = 1/(1+x)$ tem a série à direita de (2) como uma expansão em série de potências.

Os polinômios, que são somas finitas de termos da forma $a_n x^n$, são funções muito simples. Elas são contínuas em toda parte e podem ser derivadas e integradas termo a termo. Como vimos no Capítulo 13, a soma de uma série de potências pode ser uma função muito mais complicada, mas é ainda suficientemente simples para gozar dessas três propriedades em comum com os polinômios, dentro do intervalo de convergência.

Damos o seguinte enunciado formal desses fatos muito importantes:

(i) *A função $f(x)$ definida por (1) é contínua no intervalo aberto $(-R,R)$.*

(ii) *A função $f(x)$ é derivável em $(-R,R)$ e sua derivada é dada pela fórmula.*

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + na_n x^{n-1} + \cdots . \quad (3)$$

(iii) *Se x é um ponto qualquer de $(-R,R)$, então*

$$\int_0^x f(t)\,dt = a_0 x + \frac{1}{2} a_1 x^2 + \frac{1}{3} a_2 x^3 + \cdots + \frac{1}{n+1} a_n x^{n+1} + \cdots . \quad (4)$$

As provas dessas afirmações dependem de uma natureza especial de convergência chamada *convergência uniforme*. Os detalhes podem ser encontrados no Apêndice B.4.

Vários comentários são feitos a seguir.

Primeiro, observamos que se (ii) é aplicada à função $f'(x)$ em (3), então segue-se que $f'(x)$ é também derivável. Isto, por sua vez, implica que $f''(x)$ é derivável e assim por diante. Assim, a função original $f(x)$ tem derivadas de todas as ordens. Podemos resumir a situação dessa maneira: *no interior de seu intervalo de convergência, uma série de potências define uma função infinitamente derivável cujas derivadas podem ser calculadas derivando-se a série termo a termo.* A derivação termo a termo pode ser enfatizada escrevendo-se (3) como

$$\frac{d}{dx}\left(\sum a_n x^n\right) = \sum \frac{d}{dx}(a_n x^n).$$

Vale a pena observar que a derivabilidade termo a termo de uma série convergente de funções é, em geral, falsa; ela é verdadeira aqui apenas porque estamos tratando de uma espécie particular de séries. Como exemplo simples da falha dessa propriedade, mencionamos a série $\sum_{n=1}^{\infty} (\text{sen } nx)/n^2$, que é absolutamente convergente para todo x por comparação com a série convergente $\Sigma\, 1/n^2$, pois $|(\text{sen } nx)/n^2| \leqslant 1/n^2$. A dificuldade aparece com a série derivada termo a termo $\Sigma\,(\cos nx)/n$, pois essa série diverge para $x = 0$.

No caso de (iii), se preferirmos evitar o uso da variável t, então (4) pode ser escrita na forma

$$\int f(x)\, dx = a_0 x + \frac{1}{2} a_1 x^2 + \frac{1}{3} a_2 x^3 + \cdots + \frac{1}{n+1} a_n x^{n+1} + \cdots, \qquad (5)$$

supondo que achamos uma integral indefinida à esquerda que é igual a zero quando $x = 0$. A integração termo a termo da série de potências pode ser enfatizada escrevendo-se (5) como

$$\int \left(\sum a_n x^n\right) dx = \sum \left(\int a_n x^n\, dx\right).$$

Salientamos também que é parte do significado de (3) e (4) que as séries derivada e integrada nos primeiros membros dessas equações convergem no intervalo (R,R). Provaremos isto no fim desta seção. Entretanto, antes disso, damos diversos exemplos do valor prático dos procedimentos discutidos aqui.

Exemplo 1 Determine uma expansão em série de potências de $\ln(1 + x)$.

Solução Nosso ponto de partida é o fato de que a derivada de $\ln(1+x)$ é $1/(1+x)$ e para $|x|<1$ essa função tem a expansão em série de potências dada por (2). Agora, usando (5) e o fato de que $\ln(1+x)$ é igual a zero quando $x=0$, e integrando (2) termo a termo obtemos imediatamente

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}.$$

Sabemos a partir da discussão anterior que essa expansão é válida para $|x|<1$. Como vimos na Seção 13.3, é também válida para $x = 1$, mas nossos métodos presentes não dão informação sobre esse fato.

Exemplo 2 Determine a expansão em série de potências de arc tg x.

Solução A derivada dessa função é $1/(1+x^2)$ e vemos, substituindo x por x^2 em (2), que

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots$$

se $|x|<1$. Usando (4), temos

$$\begin{aligned}\text{arc tg}\, x &= \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x (1 - t^2 + t^4 - t^6 + \cdots)\, dt \\ &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\end{aligned}$$

para $|x|<1$. Novamente, nossos métodos presentes não dão informação acerca do que acontece nas extremidades $x = \pm 1$.

Exemplo 3 Determine a expansão em série de potências de e^x.

Solução Na Seção 8.3 provamos que e^x é a única função que é igual a sua própria derivada em toda parte e tem o valor 1 em $x = 0$. Para construir uma série de potências igual a sua própria derivada, usamos o fato de que, quando tal série é derivada, o grau de cada termo diminui de 1. Queremos, portanto, que cada termo seja a derivada de um termo que o segue começando com 1 como o termo constante, o próximo devendo ser x, depois $\frac{1}{2}x^2$, depois $\frac{1}{2 \cdot 3}x^3$ e assim por diante. Isto produz a série

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, \tag{6}$$

que converge para todo x, pois

$$R = \lim \frac{1/n!}{1/(n+1)!} = \lim (n+1) = \infty.$$

Construímos a série (6) de modo que sua soma fique inalterada por derivação e tenha o valor 1 em $x = 0$. Em vista da observação acima, isto estabelece a validade da expansão

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

para todo x.

Exemplo 4 Determine as expansões em séries de potências de $1/(1-x)^2$ e $1/(1-x)^3$.

Solução Começamos notando que

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right).$$

As próximas etapas são expandir $1/(1-x)$ na série de potências Σx^n para $|x| < 1$ e depois derivar essa série termo a termo:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{d}{dx}(1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots) = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} + \cdots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n.$$

Uma outra derivação dá

$$\frac{2}{(1-x)^3} = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{(1-x)^2}\right] = \frac{d}{dx}(1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} + \cdots)$$

$$= 2 + 3 \cdot 2x + 4 \cdot 3x^2 + \cdots + n(n-1)x^{n-2} + \cdots,$$

logo

$$\frac{1}{(1-x)^3} = \frac{1}{2}[2 + 3 \cdot 2x + 4 \cdot 3x^2 + \cdots + n(n-1)x^{n-2} + \cdots]$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)(n+1)}{2} x^n.$$

Exemplo 5 Determine a soma da série

$$x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}.$$

Solução É fácil ver que $R = 1$, logo a série converge a alguma função $f(x)$ para $|x| < 1$. Derivando essa série, obtém-se a forma simplificada

$$f'(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x}.$$

Como $f(0) = 0$, a integração agora acarreta

$$f(x) = -\ln(1-x).$$

Exemplo 6 Calcule a soma

$$x + 4x^2 + 9x^3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} n^2x^n.$$

Solução Novamente temos $R = 1$, logo a série converge a alguma função $f(x)$ para $|x| < 1$. Podemos escrever

$$f(x) = x + 4x^2 + 9x^3 + \cdots + n^2x^n + \cdots = xg(x),$$

onde

$$g(x) = 1 + 2^2x + 3^2x^2 + \cdots + n^2x^{n-1} + \cdots.$$

Nesse ponto observamos que

$$g(x) = \frac{d}{dx}(x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + nx^n + \cdots) = \frac{d}{dx}[x(1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} + \cdots)].$$

Pelo Exemplo 4,

$$1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} + \cdots = \frac{1}{(1-x)^2},$$

logo

$$g(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{x}{(1-x)^2}\right] = \frac{1+x}{(1-x)^3}$$

e

$$f(x) = \frac{x+x^2}{(1-x)^3}.$$

Em conclusão, devemos agora mostrar que as séries (3) e (4) convergem no intervalo $(-R,R)$.

A prova de (4) é fácil: como $\Sigma |a_n x^n|$ converge e

$$\left|\frac{a_n x^n}{n+1}\right| \leq |a_n x^n|,$$

o teste de comparação implica que $\sum \left|\frac{a_n x^n}{n+1}\right|$ converge e, portanto,

$$x \sum \frac{a_n x^n}{n+1} = \sum \frac{1}{n+1} a_n x^{n+1}$$

também converge.

A prova de (3) é um pouco mais complicada. Seja x um ponto no intervalo $(-R,R)$ e escolha $\epsilon > 0$ de modo que $|x| + \epsilon < R$. Como $|x| + \epsilon$ está no intervalo, $\Sigma |a_n(|x| + \epsilon)^n|$ converge. No Problema 7 é pedido aos estudantes mostrar que a desigualdade

$$|nx^{n-1}| \leq (|x| + \epsilon)^n$$

é verdadeira para todos os valores de n suficientemente grandes. Isto implica que

$$|na_n x^{n-1}| \leq |a_n(|x| + \epsilon)^n|,$$

logo a série $\Sigma |na_n x^{n-1}|$ converge pelo teste da comparação.

Problemas

1. Determine as expansões em séries de potências das seguintes funções e os valores de x para os quais essas expansões são válidas:

(a) $\dfrac{1}{(1+x)^2}$; (b) $\dfrac{1}{(1+x)^3}$.

2. Mostre que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6} x^n = \frac{1}{(1-x)^4}.$$

3. Calcule a soma de cada uma das seguintes séries:

(a) $x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$;

(b) $1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{n!} + \cdots$;

(c) $x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + nx^n + \cdots$;
(d) $x + 2x^3 + 3x^5 + \cdots + nx^{2n-1} + \cdots$.

4. Mostre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} = -\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}\, dt.$$

5. Mostre que a função de Bessel

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \cdots$$

satisfaz a equação diferencial $xy'' + y' + xy = 0$.

6. Obtenha a série

$$\ln(x + \sqrt{1+x^2}) = x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^7}{7} + \cdots$$

integrando uma outra série.

7. Se $\epsilon > 0$, mostre que a desigualdade $|nx^{n-1}| \leqslant (|x| + \epsilon)^n$ é verdadeira para todos os valores de n suficientemente grandes. Sugestão: $n^{1/n}|x|^{1-(1/n)} \to |x|$.

14.10 SÉRIE DE TAYLOR E FÓRMULA DE TAYLOR

Já resolvemos o problema de determinar a natureza geral da soma de uma série de potências: dentro do intervalo de convergência, ela é uma função contínua com derivadas de todas as ordens. Investigaremos agora o problema inverso de começar com uma dada função infinitamente derivável e expandi-la em uma série de potências. Na Seção 14.9 estabelecemos várias expansões desse tipo para algumas funções especiais com derivadas particularmente simples. Nosso propósito aqui é considerar um método de maior generalidade.

Pode parecer que os coeficientes de uma série de potências não têm necessariamente ligação entre si. Entretanto, na verdade, eles são ligados por uma cadeia invisível, que esclarecemos agora.

Com esse fim, vamos assumir que uma função $f(x)$ seja a soma de uma série de potências com raio de convergência positivo,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots, \qquad R > 0. \tag{1}$$

Pelos resultados da Seção 14.9, a repetida derivação termo a termo é legítima e acarreta

$$\begin{aligned} f'(x) &= a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots, \\ f''(x) &= 1\cdot 2a_2 + 2\cdot 3a_3 x + 3\cdot 4a_4 x^2 + \cdots, \\ f'''(x) &= 1\cdot 2\cdot 3a_3 + 2\cdot 3\cdot 4a_4 x + 3\cdot 4\cdot 5a_5 x^2 + \cdots, \end{aligned}$$

e em geral

$$f^{(n)}(x) = n!a_n + \text{ termos contendo } x \text{ como fator}$$

Sabemos que essas expansões das derivadas em série de potências são válidas no intervalo aberto $|x| < R$. Colocando $x = 0$ nessas equações obtemos

$$\begin{aligned} &f(0) = a_0, \qquad f'(0) = a_1, \qquad f''(0) = 1\cdot 2a_2, \\ &f'''(0) = 1\cdot 2\cdot 3a_3, \qquad \ldots, \qquad f^{(n)}(0) = n!a_n, \end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned} &a_0 = f(0), \qquad a_1 = f'(0), \\ &a_2 = \frac{f''(0)}{2!}, \qquad a_3 = \frac{f'''(0)}{3!}, \qquad \ldots, \qquad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}. \end{aligned} \tag{2}$$

Essas fórmulas são realmente notáveis, pois nos dizem que se $f(x)$ tem uma expansão em série de potências da forma (1), então seus coeficientes devem ser os números dados por (2). A série (1) torna-se, portanto,

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots. \tag{3}$$

A série de potências à direita de (3) chama-se *série de Taylor de f(x)* [em $x = 0$]. A conclusão seguinte está implícita nessa discussão:

Se uma função é representada por uma série de potências com raio de convergência positivo, então existe somente uma série como essa e deve ser a série de Taylor da função.

Resumidamente, as expansões em série de potências são únicas, pois (2) nos diz que os coeficientes são univocamente determinados pela própria função. Se usarmos as convenções-padrão mencionadas anteriormente, que $0! = 1$ e que a *zero*-ésima derivada de $f(x)$ é a própria $f(x)$ $[f^{(0)}(x) = f(x)]$, então (3) pode ser escrita como

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n. \tag{4}$$

Os números $a_n = f^{(n)}(0)/n!$ chamam-se *coeficientes de Taylor* de $f(x)$*.

A equação (3) era verdadeira na discussão precedente porque começamos com uma série convergente tendo $f(x)$ como sua soma. Começamos agora com uma função $f(x)$ que tem derivadas de todas as ordens em algum intervalo aberto I contendo o ponto $x = 0$. Podemos formar a série de Taylor à direita de (3) e colocar a questão: é a equação (3) uma expansão válida de $f(x)$ no intervalo I? Para que não haja qualquer má compreensão, estabelecemos tão claramente quanto possível que essa equação nem sempre é válida e se é ou não é depende inteiramente da natureza individual da função $f(x)$. Na Observação 2, daremos um exemplo de uma função infinitamente derivável cuja série de Taylor converge em toda parte, mas não ao valor da função; logo, nesse caso particular, a equação (3) é falsa.

A fim de esclarecer melhor nossas idéias, procedemos como se segue. Paramos a série de Taylor, à direita de (3), no termo contendo x^n e definimos o resto $R_n(x)$ pela equação

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x). \tag{5}$$

---

* Brook Taylor (1685-1731) foi secretário da Royal Society e um entusiástico defensor de Newton em sua controvérsia acrimoniosa com Leibniz e os irmãos Bernoulli acerca da invenção do Cálculo. Taylor publicou sua expansão em série de potências de uma função em 1715, mas simplesmente como uma fórmula e sem qualquer consideração de convergência. Essa expansão já tinha sido publicada por John Bernoulli em 1694. Taylor estava totalmente ciente desse fato, mas preferiu ignorá-lo. Naqueles dias a ciência despertava paixões que hoje vemos somente em política e religião.

Então a série de Taylor, à direita em (3), converge à função $f(x)$ exatamente quando

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0. \tag{6}$$

Essas equações realmente não resolvem nada, porque $R_n(x)$ é definida como sendo o que torna (5) verdadeira, e (6) é simplesmente o significado da afirmação de que a série de Taylor converge à função. Essa abordagem é útil apenas quando podemos mostrar que $R_n(x)$ pode ser expressa em uma forma que torna viável a prova de (6) no caso de funções particulares. Enfatizamos que (6) nem sempre é verdadeira, porque (3) não é sempre verdadeira. A fórmula geral mais conveniente para $R_n(x)$ é

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1}, \tag{7}$$

onde c é algum número entre 0 e x. Quando $R_n(x)$ é expressa dessa maneira, (5), chama-se a *fórmula de Taylor com resto na forma de derivada**. A prova de (7) é razoavelmente técnica e é dada na Observação 3, de modo que os estudantes que desejarem ignorá-la podem fazê-lo tranqüilamente.

Damos agora diversas ilustrações do uso de (6) e (7). Primeiro, no entanto, observamos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^n}{n!} = 0 \tag{8}$$

para todo x, pois a série $\Sigma x^n/n!$ é absolutamente convergente em toda parte. Precisaremos desse fato em nossos dois primeiros exemplos.

Exemplo 1 Determine a série de Taylor para a função $f(x) = e^x$ e use (6) e (7) para provar que converge a e^x para todo x.

Solução Temos claramente

$$f(x) = e^x, \qquad f(0) = 1;$$
$$f'(x) = e^x, \qquad f'(0) = 1;$$
$$f''(x) = e^x, \qquad f''(0) = 1;$$

* Há outras formas do resto que não abordaremos.

e assim por diante. Por substituição em (3), obtemos

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}; \tag{9}$$

e para provar a validade da expansão pelos nossos métodos presentes, examinamos o resto $R_n(x)$. Para todo x, é fácil ver que o valor máximo da função exponencial no intervalo de 0 a x é seu valor M na extremidade direita. Por (7) e (8) temos, portanto,

$$|R_n(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1}\right| = \left|\frac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1}\right| \leq M \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0,$$

logo (9) é válida. Naturalmente, estabelecemos (9) de uma outra maneira na Seção 14.9.

Exemplo 2 Determine a série de Taylor para $f(x) = \text{sen}\, x$ e use (6) e (7) para provar que converge a sen x para todo x.

Solução Podemos esquematizar nosso trabalho como se segue:

$$\begin{aligned} f(x) &= \text{sen}\, x, & f(0) &= 0; \\ f'(x) &= \cos x, & f'(0) &= 1; \\ f''(x) &= -\text{sen}\, x, & f''(0) &= 0; \\ f'''(x) &= -\cos x, & f'''(0) &= -1; \end{aligned}$$

e as derivadas subseqüentes seguem esse mesmo padrão. Por substituição em (3), obtemos

$$\text{sen}\, x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}. \tag{10}$$

Até agora, tudo que sabemos é que se sen x tem uma expansão em série de potências, então essa expansão deve ser (10). Para provar que (10) é realmente verdadeira para todo x, usamos (6) e (7). Como

$$|f^{(n+1)}(x)| = |\text{sen}\, x| \qquad \text{ou} \qquad |f^{(n+1)}(x)| = |\cos x|,$$

é claro que $|f^{(n+1)}(c)| \leq 1$ para todo número c. Portanto, por (7) e (8), temos

$$|R_n(x)| = |f^{(n+1)}(c)| \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0,$$

logo (10) é verdadeira. Os estudantes devem recordar que provamos (10) na Seção 13.4 por um método muito diferente, exigindo considerável engenhosidade. Nosso método presente tem a vantagem de ser direto e sistemático.

Exemplo 3 Determine a série de Taylor para $\cos x$ e prove que converge a $\cos x$ para todo x.

Solução Poderíamos proceder de modo direto, como no Exemplo 2. Em vez disso, que é deixado aos estudantes para ser feito nos problemas, obtemos a série desejada derivando (10),

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}. \tag{11}$$

A validade dessa expansão é garantida pelos resultados da Seção 14.9. Como já encontramos a expansão em série de potências de $\cos x$, sabemos, pela discussão da unicidade feita anteriormente, que essa deve ser a série de Taylor.

As três séries estabelecidas nesses exemplos podem ser usadas para determinar expansões em série de potências para muitas outras funções. Assim, como (9) é verdadeira para todo x, uma representação em série de potências de e^{-x^2} pode ser encontrada substituindo $-x^2$ por x. Isto acarreta

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \cdots. \tag{12}$$

Podemos aplicar essa fórmula para calcular a integral definida

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx,$$

mesmo que a correspondente integral indefinida não possa ser calculada em termos de funções elementares*. Integração termo a termo dá

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx = \left[x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \cdots\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5 \cdot 2!} - \frac{1}{7 \cdot 3!} + \cdots.$$

Essa expressão para o valor da integral como uma série numérica é exata e pode ser usada para obter esse valor em forma decimal com qualquer grau de precisão.

---

* Veja a Seção 10.8 (Volume I).

Observação 1 Dada uma função $f(x)$ que é infinitamente derivável em algum intervalo contendo o ponto $x = 0$, examinamos a possibilidade de expandir essa função como série de potências em x. De modo mais geral, se $f(x)$ é infinitamente derivável em algum intervalo contendo o ponto $x = a$, podemos perguntar acerca de sua possível expansão como uma série de potências em $x - a$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots . \tag{13}$$

Esse problema é equivalente ao primeiro, porque (13) é o mesmo que a série $g(w) = a_0 + a_1 w + a_2 w^2 + \ldots$, onde $w = x - a$ e $g(w) = f(x)$, e portanto nenhuma discussão separada é exigida. Como $g^{(n)}(0) = f^{(n)}(a)$, a *série de Taylor de $f(x)$ em potências de $x - a$* (ou em $x = a$) é

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots . \tag{14}$$

Alguns autores referem-se a (3), que é o caso especial de (14) correspondente a $a = 0$, como a *série de Maclaurin.* Entretanto esse costume não tem justificativa histórica e está sendo rapidamente abandonado. Sempre que usarmos a frase "série de Taylor" sem qualquer especificação, estaremos querendo dizer "série de Taylor em potências de x" ou em $x = 0$.

Observação 2 No Problema 42 da Seção 12.3 pedimos aos estudantes para considerar a função $f(x)$ definida para todos os números reais x por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Essa função é contínua e tem derivadas de todas as ordens para todos os valores de x. Além disso, toda derivada se anula em $x = 0$, isto é, $f^{(n)}(0) = 0$ para todo inteiro positivo n. Isto significa que o gráfico da função (Fig. 14.8) é extremamente achatado na origem – poderíamos dizer "infinitamente achatado". Para essa função, a fórmula de Taylor (5) torna-se

$$f(x) = 0 + 0 + \cdots + 0 + R_n(x).$$

A série de Taylor da função é, portanto, a série

$$0 + 0 + \cdots + 0 + \cdots ,$$

que converge para todo x mas converge a $f(x)$ apenas para $x = 0$.

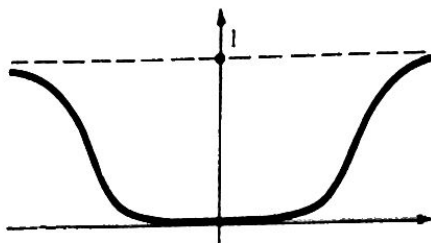



Figura 14.8

Assim, embora a função tenha derivadas de todas as ordens em toda parte, ainda não é necessariamente representada por sua série de Taylor, e se desejamos estabelecer a validade de uma tal representação, devemos invocar outros argumentos sólidos de alguma natureza, como é ilustrado nos três exemplos discutidos acima.

Observação 3 Damos agora uma prova da fórmula (7) para o resto $R_n(x)$. Primeiro, definimos $s_n(x)$ escrevendo

$$R_n(x) = S_n(x)x^{n+1}$$

para $x \neq 0$. A seguir, mantemos x fixo e definimos uma função $F(t)$ para $0 \leqslant t \leqslant x$ (ou $x \leqslant t \leqslant 0$) escrevendo

$$F(t) = f(x) - f(t) - f'(t)(x-t) - \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 - \cdots - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n - S_n(x)(x-t)^{n+1}.$$

A equação (5) mostra que $F(0) = 0$. Também é óbvio que $F(x) = 0$. Segue-se que $F'(c) = 0$ para algum número c entre 0 e x*. Derivando $F(t)$ com relação a t, cancelando e substituindo t por c, obtemos

$$F'(c) = -\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n + S_n(x)(n+1)(x-c)^n = 0,$$

logo

$$S_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$$

e a prova de (7) está completa.

---

* Em palavras, se o gráfico de nossa função $F(t)$ toca o eixo t em dois pontos, então deve ter uma tangente horizontal em algum ponto entre eles. Essa inferência repousa no fato de que $F(t)$ é contínua no intervalo fechado $0 \leqslant t \leqslant x$ (ou $x \leqslant t \leqslant 0$) e derivável no interior desse intervalo. Veja o teorema de Rolle no Apêndice B.4 (Volume I).

Problemas

1. Use (3) para determinar a série de Taylor de cada uma das seguintes funções e depois use (6) e (7) para provar que cada uma dessas expansões é válida para todo x:

   (a) $\cos x$; (b) e^{-x}; (c) e^{3x}.

2. Obtenha a série (11) para $\cos x$ a partir da série (10) para $\operatorname{sen} x$, integrando termo a termo. Sugestão: lembre-se de que a integral indefinida deve ser igual a zero quando $x = 0$.

3. Obtenha a série (10) para $\operatorname{sen} x$ derivando a série (11) para $\cos x$.

4. Determine a expansão em série de Taylor de cada uma das seguintes funções (sugestão: toda série de potências que converge a uma função num intervalo centrado em $x = 0$ deve ser a série de Taylor dessa função):

   (a) $x^2 e^x$;
   (b) xe^{-3x};
   (c) $\cos \sqrt{x}$;
   (d) $x \operatorname{sen} 5x$;
   (e) $\operatorname{sen} x^2$;
   (f) $\cos^2 x$ [sugestão: $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$];
   (g) $\operatorname{sen}^2 x$;
   (h) $1 - 7 \operatorname{sen}^2 x$;

   (i) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ para $x \neq 0, f(0) = 1$.

Nos Problemas de 5 a 9, use qualquer método para obter cada uma das expansões dadas em série de Taylor como estão indicados, sem se preocupar com convergência.

5. $\operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \cdots$.
6. $\sec^2 x = 1 + x^2 + \frac{2}{3}x^4 + \cdots$.
7. $\ln(\cos x) = -\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{12} - \dfrac{x^6}{45} - \cdots$.
8. $\ln(1 + \operatorname{sen} x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{12}x^4 + \cdots$.
9. $\ln(1 + e^x) = \ln 2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{192}x^4 + \cdots$.

10. Mostre que um polinômio $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$ é sua própria série de Taylor.

11. Se $P(x)$ é um polinômio de grau n e a é um número qualquer, mostre que

$$P(x) = P(a) + \frac{P'(a)}{1!}(x - a) + \cdots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n.$$

12. Determine a expansão em série de Taylor de

(a) $3x^2 - 5x + 7$ em potências de $x - 1$;

(b) x^3 em potências de $x + 2$.

Confira as expansões em (a) e (b) usando álgebra.

13. (a) Seja p uma constante arbitrária. Use (3) para obter a *série binomial*

$$(1 + x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2!}x^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{p(p-1)(p-2)\cdots(p-n+1)}{n!}x^n + \cdots .$$

(b) Observe que essa série termina e é um polinômio sempre que p é um inteiro não-negativo e somente nesse caso. Em todos os outros casos, mostre que essa série tem raio de convergência $R = 1$. O fato de que a expansão em (a) é válida para $|x| < 1$ não é fácil de provar pelos métodos dessa seção; um tipo diferente de prova é esboçado no Problema Suplementar 75, no fim deste capítulo.

14. Use o Problema 13 para escrever a expansão em série de Taylor de $(1 - x^2)^{-1/2}$ e integre esta para obter a série de Taylor de arc sen x.

15. Determine as representações em série de potências para

(a) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$; (b) $\displaystyle\int \sqrt{1 + x^3}\,dx$;

(c) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1 + x^4}}$.

14.11 (OPCIONAL) OPERAÇÕES COM SÉRIES DE POTÊNCIAS

Na Seção 14.10 obtivemos a série de Taylor para várias funções usando a fórmula $a_n = f^{(n)}(0)/n!$ para achar os coeficientes. Entretanto, computar derivadas sucessivas pode ser um trabalho difícil e desencorajador se não tiver algum padrão simples. Podemos observar facilmente esse fato no cálculo da 7ª derivada de uma função, tal como tg x ou $x^5/(1 - x^4)$, pois os cálculos visivelmente afundam-nos cada vez mais no pântano a cada etapa. Para algumas funções fomos capazes de estabelecer a validade de suas expansões de Taylor, provando que $R_n(x) \to 0$ quando

$n \to \infty$, mas isto também pode ser difícil. Para evitar tais problemas, discutimos agora diversos métodos algébricos para obter novas expansões de Taylor válidas a partir de outras que já conhecemos.

Antes de começar, lembramos aos estudantes que as expansões em série de Taylor são únicas. Isto significa que se uma função $f(x)$ pode ser expressa como a soma de uma série de potências *por qualquer método*, então essa deve ser a série de Taylor de $f(x)$. Por exemplo, sabemos da Seção 14.3 que

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots, \qquad |x| < 1; \tag{1}$$

e substituindo x por x^4 e depois multiplicando por x^5 obtemos

$$\frac{1}{1-x^4} = 1 + x^4 + x^8 + x^{12} + \cdots, \qquad |x| < 1,$$

e

$$\frac{x^5}{1-x^4} = x^5 + x^9 + x^{13} + x^{17} + \cdots, \qquad |x| < 1.$$

Evitamos deliberadamente a tarefa muito laboriosa de usar a fórmula $a_n = f^{(n)}(0)/n!$ para verificar que as três séries à direita são realmente as séries de Taylor das funções à esquerda. Mas essas verificações não são necessárias, porque essa conclusão segue-se automaticamente do princípio enunciado acima.

Multiplicação

Suponha que sejam dadas duas expansões em série de potências,

$$f(x) = \Sigma a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots \tag{2}$$

e

$$g(x) = \Sigma b_n x^n = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \cdots, \tag{3}$$

ambas válidas num intervalo $|x| < R$. Se ignoramos a questão de convergência por um momento, então podemos multiplicar essas séries da mesma maneira que multiplicamos dois polinômios. Ou seja, multiplicamos sistematicamente cada termo da primeira série e depois juntamos os termos envolvendo as mesmas potências de x. Primeiro, a multiplicação termo a termo:

$$\begin{array}{rl}
a_0: & a_0b_0 + a_0b_1x + a_0b_2x^2 + a_0b_3x^3 + \cdots \\
a_1x: & \qquad a_1b_0x + a_1b_1x^2 + a_1b_2x^3 + \cdots \\
a_2x^2: & \qquad\qquad a_2b_0x^2 + a_2b_1x^3 + \cdots \\
a_3x^3: & \qquad\qquad\qquad a_3b_0x^3 + \cdots \\
 & \cdots .
\end{array}$$

Somando essas colunas, obtemos a série de potências

$$a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + (a_0b_3 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_0)x^3 + \cdots . \tag{4}$$

A forma do coeficiente de x^n em (4) é evidente: os índices dos a crescem quando os índices dos b decrescem, e a sua soma permanece constante e é igual ao expoente n de x^n. Resumindo, multiplicamos (2) e (3) obtendo

$$f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_kb_{n-k}\right)x^n. \tag{5}$$

Afirmamos que o *produto* das séries (2) e (3) realmente converge no intervalo $|x| < R$ ao produto das funções $f(x)$ e $g(x)$, como foi indicado em (5). A prova não é fácil e depende da convergência absoluta das duas séries no intervalo dado. Os detalhes podem ser encontrados no Apêndice B.2.

Exemplo 1 Determine a série de Taylor para e^x sen x.

Solução Sabemos que

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \tag{6}$$

e

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots . \tag{7}$$

Nosso trabalho pode ser realizado como se segue:

$$e^x \operatorname{sen} x = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots\right)\left(x - \frac{x^3}{6} + \cdots\right)$$

$$\begin{aligned} = x \quad & - \frac{x^3}{6} + \cdots \\ + x^2 \quad & - \frac{x^4}{6} + \cdots \\ + \frac{x^3}{2} \quad & - \frac{x^5}{12} + \cdots \\ \cdots & \\ = x + x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 + \cdots & . \end{aligned}$$

Como as duas séries dadas (6) e (7) convergem para todo x, o mesmo é verdadeiro para a série produto. Não é fácil – e usualmente é quase impossível – reconhecer a fórmula para o termo geral da série produto nesse processo.

Exemplo 2 Determine a série de Taylor de $[\ln(1 - x)]/(x - 1)$.

Solução Sabemos que

$$\ln(1 - x) = -\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots\right), \qquad |x| < 1,$$

logo

$$\frac{\ln(1-x)}{x-1} = \left(\frac{1}{1-x}\right)[-\ln(1-x)] = (1 + x + x^2 + \cdots)\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots\right)$$

$$= x + (1 + \tfrac{1}{2})x^2 + (1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3})x^3 + \cdots \quad = \sum_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)x^n, \qquad |x| < 1.$$

Este é um dos raros casos em que o termo geral da série produto é fácil de reconhecer.

Divisão

Duas séries de potências podem ser divididas pelo processo da divisão longa, utilizada em álgebra elementar para dividir polinômios. Como estamos trabalhando com séries de potências, os termos são naturalmente arranjados em ordem de expoentes crescentes, em vez de em ordem de expoentes decrescentes como é usual com polinômios. Em casos particulares, no entanto, uma ou ambas as séries dadas podem ser um polinômio.

Exemplo 3 Determine a série de Taylor de tg x dividindo a série de sen x pela série de cos x.

Solução Temos

$$\begin{array}{r|l} & x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \cdots \\ \hline 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \cdots & x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \cdots \\ & \underline{x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{24} - \cdots} \\ & \quad \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5 + \cdots \\ & \quad \underline{\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^5 + \cdots} \\ & \qquad \frac{2}{15}x^5 + \cdots , \end{array}$$

logo

$$\operatorname{tg} x = x + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{2}{15}x^5 + \cdots . \tag{8}$$

Pode ser mostrado que essa expansão é válida no intervalo $|x| < y/2$. Como este é o maior intervalo com centro $x = 0$ no qual o denominador cos x é não-nulo, a série (8) tem raio de convergência $R = \llbracket/2$. Como descobrir uma fórmula para o termo geral dessa série foi resolvido por Euler em 1748. Sua solução depende das idéias da Seção 14.12 e é esboçada no Apêndice A.12.

O processo usado para dividir uma série de potências por outra certamente não é muito difícil. A teoria que justifica esse processo é dada no Apêndice B.5.

Substituição

Este é um método que já usamos: se uma série de potências

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \tag{9}$$

converge para $|x| < R$ e se $|g(x)| < R$, então podemos certamente achar $f[g(x)]$ substituindo x por $g(x)$ em (9). Por exemplo, não há problema em usar as séries (1), (6) e (7) para obter

$$\frac{1}{1 + 2x^2} = \frac{1}{1 - (-2x^2)} = 1 + (-2x^2) + (-2x^2)^2 + \cdots = 1 - 2x^2 + 4x^4 - \cdots , \qquad |2x^2| < 1;$$

$$e^{x^4} = 1 + x^4 + \frac{(x^4)^2}{2!} + \frac{(x^4)^3}{3!} + \cdots = 1 + x^4 + \frac{x^8}{2!} + \frac{x^{12}}{3!} + \cdots , \qquad \text{todo } x;$$

e

$$\sin 3x = 3x - \frac{(3x)^3}{3!} + \frac{(3x)^5}{5!} - \cdots = 3x - \frac{27}{3!}x^3 + \frac{243}{5!}x^5 - \cdots, \quad \text{todo } x.$$

Nesses exemplos, substituímos as funções simples $g(x) = -2x^2$, x^4 e $3x$ por séries de potências apropriadas, mas muito mais é possível. Sob condições adequadas, podemos realmente substituir uma série de potências por outra! Assim, suponha que a função $g(x)$ seja dada por uma série de potências

$$g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots, \tag{10}$$

e substitua essa série inteira no lugar de x em (9)

$$\begin{aligned} f[g(x)] &= a_0 + a_1 g(x) + a_2[g(x)]^2 + \cdots \\ &= a_0 + a_1[b_0 + b_1 x + \cdots] + a_2[b_0 + b_1 x + \cdots]^2 + \cdots. \end{aligned} \tag{11}$$

Novamente isto é perfeitamente legítimo contanto que $|g(x)| < R$. Entretanto, a série à direita de (11) pode agora ser convertida em uma série de potências em x elevando ao quadrado, ao cubo etc., e colecionando as mesmas potências de x e, pode ser provado que a série de potências formada dessa maneira converge a $f[g(x)]$ sempre que (10) seja absolutamente convergente e $|g(x)| < R$*.

Exemplo 4 Aplique o método de substituição para determinar a série de Taylor de $e^{\text{sen}\,x}$ até o termo que contém x^4.

Solução Podemos usar (6) e (7) para escrever

$$\begin{aligned} \text{sen}\,x &= 1 + \left(x - \frac{x^3}{6} + \cdots\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6} + \cdots\right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{6}\left(x - \frac{x^3}{6} + \cdots\right)^3 + \frac{1}{24}\left(x - \frac{x^3}{6} + \cdots\right)^4 + \cdots \\ &= 1 + \left(x - \frac{x^3}{6} + \cdots\right) + \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \cdots\right) + \frac{1}{6}(x^3 + \cdots) + \frac{1}{24}(x^4 + \cdots) + \cdots \\ &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + \cdots. \end{aligned}$$

* Veja p. 180 de K. Knopp, *Theory and Applications of Infinite Series*, Hafner, 1951.

Se tentamos aplicar esse método a $e^{\cos x}$, vemos que infinitos termos contribuem para a formação de cada coeficiente, o que é uma situação difícil de ser tratada. Por essa razão, o método da substituição não é um instrumento prático a menos que $b_0 = 0$ na série (10).

Funções Pares e Ímpares

Uma função $f(x)$ definida num intervalo $|x| < R$ é *par* se $f(-x) = f(x)$ e *ímpar* se $f(-x) = -f(x)$. A série de Taylor da função par $\cos x$ contém somente potências pares de x e a série de Taylor da função ímpar $\operatorname{sen} x$ contém somente potências ímpares de x. Esses fatos são casos particulares de um princípio geral: se $f(x)$ é uma função par, então sua série de Taylor tem a forma

$$a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + a_6x^6 + \cdots ;$$

e se $f(x)$ é uma função ímpar, então sua série de Taylor tem a forma

$$a_1x + a_3x^3 + a_5x^5 + a_7x^7 + \cdots .$$

Ou seja, a série de Taylor de uma função par (ímpar) contém somente potências pares (ímpares) de x. Isto é muito fácil de provar a partir da unicidade de expansões em série de potências*. Como um outro exemplo desse fenômeno, sabemos de antemão que a série à direita em (8) contém somente potências ímpares de x, porque $\operatorname{tg} x$ é uma função ímpar.

Muitas funções são pares e muitas são ímpares, mas a maioria não é nenhuma das duas. Entretanto, toda função definida num intervalo $|x| < R$ pode ser expressa como a soma de uma função par e de uma função ímpar:

$$f(x) = \tfrac{1}{2}[f(x) + f(-x)] + \tfrac{1}{2}[f(x) - f(-x)] = g(x) + h(x),$$

onde, como é facilmente verificado,

$$g(x) = \tfrac{1}{2}[f(x) + f(-x)] \qquad \text{é par}$$

e

$$h(x) = \tfrac{1}{2}[f(x) - f(-x)] \qquad \text{é ímpar.}$$

---

* Temos apenas de salientar que se $f(x) = \Sigma a_n x^n$, pela unicidade temos $a_n = (-1)^n a_n$ e, portanto, $a_n = -a_n$, ou $a_n = 0$ se n é ímpar. Raciocínio análogo se aplica quando $f(x)$ é ímpar.

Além disso, se $f(x) = \Sigma_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, então

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} x^{2n} \qquad \text{e} \qquad h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} x^{2n+1}.$$

Assim, a série de Taylor de $f(x)$ é dividida em duas séries de potências, uma com expoentes pares representando a parte par de $f(x)$ e uma com expoentes ímpares representando a parte ímpar.

Exemplo 5 A parte par e a parte ímpar de

$$f(x) = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

são

$$g(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

e

$$h(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

Estas são as duas funções hiperbólicas $\cosh x$ e $\operatorname{senh} x$ que já foram definidas na Seção 9.7.

Exemplo 6 Determine a soma da série

$$\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \cdots .$$

Solução Esta é a parte par da série familiar

$$f(x) = -\ln(1 - x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \cdots .$$

A soma da série dada é, portanto,

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}[f(x) + f(-x)] &= \tfrac{1}{2}[-\ln(1 - x) - \ln(1 + x)] \\ &= -\tfrac{1}{2}\ln(1 - x^2) = -\ln\sqrt{1 - x^2}. \end{aligned}$$

Problemas

1. No Exemplo 1, continue o cálculo e determine os termos da série produto até o termo contendo x^6.

Nos Problemas 2 a 13, use a multiplicação para mostrar que a função dada tem a expansão em série de potências indicada.

2. $\dfrac{\operatorname{sen} x}{1-x} = x + x^2 + \dfrac{5}{6}x^3 + \dfrac{5}{6}x^4 + \dfrac{101}{120}x^5 + \cdots$.
3. $e^{x+x^2} = 1 + x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{7}{6}x^3 + \frac{25}{24}x^4 + \cdots$.
4. $e^x \cos x = 1 + x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{30}x^5 + \cdots$.
5. $\dfrac{\operatorname{arc\,tg} x}{1-x} = x + x^2 + \dfrac{2}{3}x^3 + \dfrac{2}{3}x^4 + \dfrac{13}{15}x^5 + \cdots$.
6. $\ln^2(1-x) = x^2 + x^3 + \frac{11}{12}x^4 + \frac{5}{6}x^5 + \cdots$.
7. $\dfrac{\cos x}{1-x} = 1 + x + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{2}x^3 + \dfrac{13}{24}x^4 + \dfrac{13}{24}x^5 + \cdots$.
8. $\operatorname{tg}^2 x = x^2 + \frac{2}{3}x^4 + \frac{17}{45}x^6 + \cdots$.
9. $\dfrac{e^x}{2+x} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{8}x^2 + \dfrac{1}{48}x^3 + \dfrac{1}{96}x^4 + \cdots$.
10. $\sqrt{1+x}\,\ln(1+x) = x - \frac{1}{24}x^3 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{71}{1920}x^5 + \cdots$.
11. $e^{-x}\operatorname{tg} x = x - x^2 + \frac{5}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{41}{120}x^5 + \cdots$.
12. $\dfrac{1-x}{1-x^3} = \dfrac{1}{1+x+x^2} = 1 - x + x^3 - x^4 + x^6 - x^7 + x^9 - x^{10} + \cdots$.
13. $\dfrac{\operatorname{sen} x}{1+x} = x - x^2 + \dfrac{5}{6}x^3 - \dfrac{5}{6}x^4 + \dfrac{101}{120}x^5 + \cdots$.
14. Elevando ao quadrado a série de sen x e cos x, mostre que $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ pelo menos até o termo x^6.
15. Se $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, use multiplicação de séries para mostrar que

$$\frac{1}{1-x}f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_0 + a_1 + \cdots + a_n)x^n.$$

Use esse resultado para escrever as séries nos Problemas 2, 5 e 7 por inspeção.

16. Use o Problema 15 para determinar a soma da série

$$\Sigma_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n.$$

17. A expansão em série binomial de $1/\sqrt{1-x}$ é

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}x^2 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!}x^3 + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2^4\cdot 4!}x^4 + \cdots.$$

Confira isto elevando ao quadrado a série e mostrando que o resultado é $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots$, pelo menos até o termo x^4.

18. No Exemplo 3, continue o cálculo e determine a série de tg x até o termo contendo x^7.

19. Use divisão para obter as expansões em série dadas nos Problemas 2, 5, 7, 9, 12 e 13.

Nos Problemas 20 a 27, use divisão para obter as expansões dadas.

20. $\dfrac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots.$

21. $\dfrac{1-x}{1-x+x^2} = 1 - x^2 - x^3 + x^5 + x^6 - x^8 - x^9 + \cdots.$

22. $\dfrac{x^2}{1-x+x^2-x^3} = x^2 + x^3 + x^6 + x^7 + \cdots.$

23. $\dfrac{x}{\operatorname{sen} x} = 1 + \dfrac{1}{6}x^2 + \dfrac{7}{360}x^4 + \cdots.$

24. $\dfrac{1}{1+x+x^2+x^3+\cdots} = 1 - x.$

25. $\dfrac{\operatorname{sen} x}{\ln(1+x)} = 1 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4}x^2 - \dfrac{1}{24}x^3 + \cdots.$

26. $\sec x = \dfrac{1}{\cos x} = 1 + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{5}{24}x^4 + \cdots.$

27. $\dfrac{\operatorname{arc\,sen} x}{\cos x} = x + \dfrac{2}{3}x^3 + \dfrac{11}{30}x^5 + \cdots.$

Nos Problemas 28 e 29, use o método da substituição para determinar a série de Taylor dada.

28. $\ln(1+\operatorname{sen} x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \cdots$.

29. $\dfrac{1}{1-x^2e^x} = 1 + x^2 + x^3 + \dfrac{3}{2}x^4 + \dfrac{13}{6}x^5 + \dfrac{73}{24}x^6 + \cdots$.

30. Use substituição e o fato de que $\sec x = 1/\cos x = 1/(1-(1-\cos x))$ para determinar a série de Taylor de $\sec x$ até o termo contendo x^6. Qual o raio de convergência?

31. Use multiplicação e o resultado do Problema 30 para determinar a série de Taylor de $\operatorname{tg} x$ até o termo contendo x^7.

32. (a) Determine a série de Taylor de $\sec^2 x$ até o termo contendo x^6, expandindo $\sec^2 x = 1/\cos^2 x = 1/(1-\operatorname{sen}^2 x)$ como uma série geométrica em $\operatorname{sen}^2 x$.
    (b) Determine a mesma série elevando ao quadrado a série encontrada no Problema 30.
    (c) Determine a mesma série derivando a série encontrada no Problema 31.

33. Mostre que uma função $f(x)$ definida num intervalo $|x| < R$ pode ser expressa *de uma única maneira* como a soma de uma função par $g(x)$ e uma função ímpar $h(x)$.

34. Calcule a soma da série $+\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \cdots$.

35. Calcule cada um dos seguintes limites determinando primeiro a série de Taylor da função dada:

$$\text{(a)}\ \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}; \qquad \text{(b)}\ \lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^3}.$$

Dessa maneira, o uso da série de Taylor fornece, com freqüência, uma alternativa conveniente para o uso da regra de L'Hospital.

36. Calcule a soma de cada uma das seguintes séries:

(a) $x + x^2 - x^3 + x^4 + x^5 - x^6 + + - \cdots$;
(b) $x^2 + x^3 + x^4 - x^5 + x^6 + x^7 + x^8 - x^9 + + + - \cdots$;
(c) $\dfrac{x}{2!} + \dfrac{x^2}{3!} + \dfrac{x^3}{4!} + \dfrac{x^4}{5!} + \cdots$;
(d) $1 + \dfrac{x^4}{4!} + \dfrac{x^8}{8!} + \dfrac{x^{12}}{12!} + \cdots$.

37. Calcule $f^{(7)}(0)$ se $f(x) = \operatorname{tg} x$ e use isto para obter o coeficiente de x^7 na expansão encontrada no Problema 18.

14.12 (OPCIONAL) NÚMEROS COMPLEXOS E FÓRMULA DE EULER

Considere as três conhecidas expansões em série de potências

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots, \tag{1}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots \tag{2}$$

e

$$\text{sen}\, x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots. \tag{3}$$

A segunda e a terceira dessas séries parecem ser partes da primeira série de algum modo não óbvio que envolve mudanças nos sinais de alguns dos termos. Isto, por sua vez, sugere que as três funções à esquerda sejam provavelmente relacionadas entre si. Existe mesmo tal relação, que é conhecida como *fórmula de Euler:*

$$e^{ix} = \cos x + i \,\text{sen}\, x, \tag{4}$$

onde $i = -1$ é a chamada unidade imaginária. Essa fórmula vem a ser um dos resultados mais importantes de toda a Matemática, com implicações que influenciam profundamente a própria Matemática e também muitas de suas aplicações, particularmente nos campos da Física e Engenharia Elétrica. Uma explanação completa da fórmula de Euler exigiria o desenvolvimento de uma teoria bastante completa dos números complexos e funções de uma variável complexa. Deixamos essa tarefa para um curso mais avançado e esboçamos resumidamente algumas das idéias necessárias, de modo muito incompleto, que, pelo menos, tem o mérito de emprestar um pouco de credibilidade à fórmula (4).

Até este ponto, todo nosso trabalho neste livro esteve no contexto do conjunto dos números reais. Contudo, os números reais têm uma deficiência – nem toda equação polinomial tem solução. Assim, a equação quadrática $x^2 + 1 = 0$ não tem solução no sistema de números reais porque não existe número real cujo quadrado seja igual a -1. Essa deficiência foi tão enfraquecedora que várias centenas de anos atrás os matemáticos sentiram a necessidade de usar o símbolo aparentemente contraditório $\sqrt{-1}$ para significar uma solução de $x^2 + 1 = 0$. Esse símbolo foi mais tarde denotado pela letra i e foi encarado como um número imaginário ou fictício que podia ser manipulado algebricamente assim como um número real ordinário, exceto que $i^2 = -1$. Quaisquer escrúpulos que esses primeiros matemáticos possam ter sentido acerca da natureza desafiadora desse "número" foram deixados de lado, porque ele era muito útil para ser ignorado. Assim, por exemplo, a equação $x^2 + 1 = 0$ era fatorada escrevendo-a na forma equivalente $x^2 - i^2 = 0$ ou $(x + i)(x - i) = 0$, e suas soluções foram exibidas com os números $x = \pm i$.

Sem entrar nos detalhes que seriam necessários para dar uma respeitabilidade matemática a nossa discussão, descrevemos agora, simplesmente, os *números complexos* como todas as expressões formais $a + bi$, onde a e b são números reais e i é a unidade imaginária para a qual $i^2 = -1$. Os números complexos tomam o caráter de um legítimo sistema de números por meio da seguinte regra geral para realizar cálculos: na adição, multiplicação e divisão siga todas as regras familiares da álgebra elementar e depois simplifique sempre que possível, usando a equação $i^2 = -1$ para eliminar todas as potências de i maiores que a primeira, como em

$$i^3 = i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i, \qquad i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1) = 1, \qquad i^5 = i^4 \cdot i = i, \tag{5}$$

e assim por diante.

Os números complexos $a + bi$ podem ser identificados com os números reais a se $b = 0$; logo, o conjunto dos números complexos constitui-se numa ampliação do sistema dos números reais. Não só a equação $x^2 + 1 = 0$ possui as duas soluções i e $-i$ dessa maneira, mas também toda equação quadrática $ax^2 + bx + c = 0$ tem as duas soluções familiares

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

que são reais e distintas se $b^2 - 4ac > 0$, reais e iguais se $b^2 - 4ac = 0$, e complexas e distintas se $b^2 - 4ac < 0$. Por exemplo, a equação $x^3 - 6x + 13 = 0$ tem as raízes complexas distintas

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 52}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{6 \pm 4\sqrt{-1}}{2} = \frac{6 \pm 4i}{2} = 3 \pm 2i.$$

Além disso outras propriedades são válidas, pois toda equação polinomial da forma

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0,$$

onde n é um inteiro positivo e os a são números reais arbitrários com $a_n \neq 0$, tem exatamente n raízes (algumas das quais podem ser iguais) entre os números complexos. Mais ainda, isto é verdadeiro mesmo que os coeficientes sejam complexos. Este fato é conhecido como *Teorema Fundamental da Álgebra.* Ele mostra que não há necessidade de se construir ampliações do conjunto de números complexos a fim de resolver todas as equações polinomiais com coeficientes complexos*.

Retornamos agora ao nosso propósito original, que era ganhar um pouco de discernimento sobre a validade da fórmula de Euler.

---

* Há muitas provas deste teorema importante, em vários níveis de sofisticação. Veja, por exemplo, pp. 269-271 de R. Courant e H. Robbins, *That is Mathematics?*, Oxford University Press, 1941.

Uma teoria perfeitamente satisfatória de série de potências pode ser construída na qual a variável é permitida ser um número complexo em vez de meramente um número real. Dentro dessa teoria, toda as séries (1), (2) e (3) convergem para todos os valores complexos da variável. Se substituímos x em (1) por ix e usamos (5), então obtemos

$$\begin{aligned} e^{ix} &= 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \cdots \\ &= 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} - \cdots \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\right), \end{aligned}$$

que dá a fórmula de Euler

$$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x.$$

Se agora substituímos x por $-x$ e usamos o fato de que $\cos(-x) = \cos x$ e $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$, obtemos

$$e^{-ix} = \cos x - i \operatorname{sen} x;$$

e somando primeiro e depois subtraindo membro a membro as duas equações, obtemos imediatamente

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen} x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Essas fórmulas têm várias aplicações na Matemática Avançada. Uma aplicação particularmente interessante é esboçada no Apêndice A.12. Salientamos também que se pomos $x = \pi$ na fórmula de Euler, temos

$$e^{\pi i} = \cos \pi + i \operatorname{sen} \pi$$

ou

$$e^{\pi i} = -1.$$

Essa bela equação, que liga os números misteriosos e difundidos π, e e i, é um dos fatos mais notáveis da Matemática.

As idéias desta seção são esboçadas de maneira tão superficiais que elas são limitadas a serem mais sugestivas do que convincentes. O eminente matemático britânico E. C. Titchmarsh observou certa vez: "Encontrei-me com uma pessoa, recentemente, que me contou que estava demasiado longe de acreditar na raiz quadrada de menos um, pois não acreditava nem mesmo no menos um. Esta é, de qualquer modo, uma atitude consistente". Há só um modo de passar esses conceitos do *status* de especulações razoáveis para o reino da certeza, e este é empreender um estudo cuidadoso da teoria das funções de uma variável complexa. Esse assunto é um dos ramos mais ricos e mais compensadores da Matemática e nós recomendamos o seu estudo, de coração.

Problemas Suplementares do Capítulo 14

Seção 14.2

1. Determine $\lim x_n$ se

(a) $x_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n}\right);$

(b) $x_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right);$

(c) $x_n = \frac{1}{n^2 + 1} + \frac{1}{n^2 + 2} + \cdots + \frac{1}{n^2 + n};$

(d) $x_n = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}}.$

2. Se $f(x) = \lim_{n\to\infty} [\lim_{m\to\infty} (2/\pi) \text{ arc tg } (m \text{ sen}^2 [n!\pi x])]$, mostre que $f(x) = 0$ quando x é racional e 1 quando x é irracional.

3. Se $f(x) = \lim_{n\to\infty} [\lim_{m\to\infty} \cos^m(n!\pi x)]$, mostre que $f(x) = 1$ quando x é racional e 0 quando x é irracional.

4. Determine o valor de cada um dos seguintes limites:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{x^n + x^{-n}} \; (x > 0);$ (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^{n+1} + n}{x^n + 2n}.$

5. Para cada seqüência $\{x_n\}$ cujo n-ésimo termo é dado, verifique que os três primeiros termos são $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ e calcule o quarto termo:

(a) $x_n = \frac{1}{n}$; (b) $x_n = \frac{1}{2n^3 - 12n^2 + 23n - 12}$;

(c) $x_n = \frac{1}{n2^{(n-1)(n-2)(n-3)}}$.

6. Se a é um número dado qualquer, defina uma seqüência $\{x_n\}$ (construindo uma fórmula adequada para x_n em termos de n) que tem a propriedade de que

$$x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = \frac{1}{3} \text{ e } x_4 = a.$$

7. A chamada *seqüência de Fibonacci* 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... é definida recursivamente pondo $x_1 = 1, x_2 = 1$ e $x_n = x_{n-2} + x_{n-1}$ para $n > 2$*. Determine uma fórmula para x_n em termos de n. Sugestão: faça a conjectura engenhosa de que x_n tem a forma $\alpha A^n + \beta B^n$ para valores convenientes de α, β, A, B; daí, determine A e B de modo que a fórmula de recorrência seja verdadeira para todos os α e β e, finalmente, determine α e β de modo que $x_1 = 1$ e $x_2 = 1$.

8. Se $\{x_n\}$ é a seqüência de Fibonacci definida no Problema 7, mostre que

$$\lim x_{n+1}/x_n = (1 + \sqrt{5})/2.$$

9. A seqüência $\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \ldots$ pode ser definida recursivamente pondo $x_1 = \sqrt{2}$ e $x_{n+1} = \sqrt{2x_n}$ para $n \geqslant 1$.

(a) Use indução matemática para provar que $x_n < x_{n+1} < 2$ para todo n**. Isto mostra que a seqüência é crescente e tem 2 como um majorante e, portanto, converge a um limite $x \leqslant 2$.

(b) Mostre que $x = 2$ usando a fórmula de recorrência.

(c) Mostre que $x = 2$ determinando uma fórmula explícita para x_n em termos de n.

---

* Fibonacci ou Leonardo de Pisa (1170-1230) foi um homem de negócios italiano que viajava por todo o Oriente Médio, tendo sido o principal responsável pela introdução dos numerais indo-arábicos (isto é, 1, 2, 3, ...) na Europa. Ele encontrou sua seqüência num problema sobre a prole de coelhos. Ela tem sido aplicada amplamente (e excentricamente) à religião, arte, formas de caracóis do mar etc.

** O princípio de indução garante o seguinte: uma afirmação $S(n)$ que é significativa (no sentido de ser ou verdadeira ou falsa) para cada inteiro positivo n é verdadeira para todo n se (i) $S(1)$ é verdadeira; e (ii) $S(n)$ implica $S(n + 1)$. Esse princípio é discutido com detalhes no Apêndice D.2.

10. A seqüência $\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \ldots$ pode ser definida recursivamente pondo $x_1 = \sqrt{2}$ e $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$ para $n \geqslant 1$. Mostre que ela é crescente tendo 2 como um majorante e calcule seu limite.

11. Se $a > 0$, então a seqüência $\sqrt{a}, \sqrt{a+\sqrt{a}}, \sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a}}}, \ldots$ pode ser definida recursivamente como no Problema 10. Mostre que ela converge e calcule seu limite.

12. Seja $f(x)$ uma função contínua crescente no intervalo $0 \leqslant x \leqslant 1$. Defina as seqüências $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ por

$$a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right), \qquad b_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

(a) Mostre que

$$a_n \leq \int_0^1 f(x)\,dx \leq b_n \qquad \text{e} \qquad 0 \leq \int_0^1 f(x)\,dx - a_n \leq \frac{f(1) - f(0)}{n}.$$

(b) Mostre que ambas as seqüências convergem ao limite $\int_0^1 f(x)\,dx$.

(c) Estabeleça um fato correspondente para o intervalo $a \leq x \leq b$.

13. Use o Problema 12 para obter os seguintes limites:

(a) $\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2} \to \frac{1}{2}$;

(b) $\frac{1^2}{n^3} + \frac{2^2}{n^3} + \cdots + \frac{n^2}{n^3} \to \frac{1}{3}$;

(c) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} \to \ln 2$;

(d) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{kn} \to \ln k$;

(e) $\frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2} \to \frac{\pi}{4}$;

(f) $\frac{n}{(n+1)^2} + \frac{n}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{n}{(n+n)^2} \to \frac{1}{2}$;

(g) $\frac{1}{n}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{n} + \operatorname{sen}\frac{2\pi}{n} + \cdots + \operatorname{sen}\frac{n\pi}{n}\right) \to \frac{2}{\pi}$;

(h) $\frac{1}{n}\left(\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{n} + \operatorname{sen}^2\frac{2\pi}{n} + \cdots + \operatorname{sen}^2\frac{n\pi}{n}\right) \to \frac{1}{2}$;

(b) No caso geral, em que $x = 0$ não é assumido, utilize o fato de que, como $x_n - x \to 0$, podemos inferir da parte (a) que

$$y_n - x$$
$$= \frac{(x_1 - x) + (x_2 - x) + \cdots + (x_n - x)}{n} \to 0.$$

17. Utilize o Problema 16 para mostrar que

(a) $\dfrac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + 1/n}{n} \to 0;$

(b) $\dfrac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \cdots + \sqrt[n]{n}}{n} \to 1.$

18. Se $\{x_n\}$ é uma seqüência de números positivos tais que $x_{n+1}/x_n \to r$, então temos também $\sqrt[n]{x_n} \to r$. Prove isto da seguinte maneira: ponha $y_n = \ln x_{n+1}/x_n$; mostre que

$$\frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1}}{n} = \ln \sqrt[n]{x_n} - \ln \sqrt[n]{x_1};$$

e aplique o Problema 16.

19. Utilize o Problema 18 para mostrar que $\sqrt[n]{n!}/n \to 1/e$.

20. O produto de Wallis, que pode ser expresso na forma

$$\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} \to \frac{\pi}{2},$$

é provado no Apêndice A.5. Como $2n/(2n + 1) \to 1$, o produto de Wallis pode também ser escrito como

$$\frac{2^2}{3^2} \cdot \frac{4^2}{5^2} \cdot \frac{6^2}{7^2} \cdots \frac{(2n-2)^2}{(2n-1)^2} \cdot 2n \to \frac{\pi}{2}.$$

Extraindo raízes quadradas e multiplicando o numerador e o denominador por $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n - 2)$, deduza a fórmula

$$\lim_{n \to \infty} \frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)!\sqrt{n}} = \sqrt{\pi},$$

que será necessária no Problema 21.

21. É um fato notável que a função $f(x) = \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}$ seja uma boa aproximação de $n!$ para n grande, no sentido de que o erro relativo tende a zero:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{f(n)-n!}{n!}\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{f(n)}{n!}-1\right] = 0.$$

Isto é equivalente à afirmação de que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}} = 1,$$

que é conhecida como *fórmula de Stirling**. Além de seu interesse intrínseco, essa fórmula é um instrumento útil (em estatística e na Teoria de Probabilidade) para o cálculo numérico aproximado de $n!$ quando n é grande. Prove a fórmula de Stirling, verificando as seguintes afirmações:

(a) $2/(2n+1) \leqslant \ln(1+1/n)$ (sugestão: compare a área sob a curva $y = 1/x$ de $x = n$ a $x = n+1$ com a área do trapézio cuja base superior é tangente à curva em $x = n+1/2$);

(b) $e \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1/2}$ $\left[\text{sugestão: } \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leq \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1/2}\right]$;

(c) a área A sob $y = \ln x$ de $x = 1$ a $x = n$ é

$$\int_1^n \ln x\, dx = n\ln n - n + 1 = \ln\left(\frac{n}{e}\right)^n + 1;$$

(d) o número x_n definido por

$$x_n = \frac{(n/e)^n\sqrt{n}}{n!}$$

é $\leqslant 1$ [sugestão: compare a área A da parte (c) com a área $B = 1 + \ln n! - \ln\sqrt{n}$ da seguinte figura: divida o intervalo de $x = 1$ a $x = n$ em subintervalos pelos pontos $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, ..., $n - \frac{1}{2}$; nos primeiro e último subintervalos construa retângulos com alturas 2 e $\ln n$ e nos

* James Stirling (1692-1770) começou sua carreira sendo expulso de Oxford por apoiar a extinta dinastia Stuart e terminou-a como um bem-sucedido diretor de uma companhia de mineração. Em seus dias de mocidade ele era amigo de Newton e escreveu um ensaio sobre séries infinitas em que quase descobriu a fórmula que leva seu nome.

subintervalos restantes construa trapézios cujas bases superiores são tangentes à curva $y = \ln x$ em $x = 2, 3, ..., n-1$];

(e) $\{x_n\}$ é uma seqüência crescente que é limitada pela parte (d), logo existe $\lim x_n$;

(f) $\lim x_n = \lim \dfrac{x_n^2}{x_{2n}} = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$

[sugestão: utilize a fórmula estabelecida no Problema 20];

(g) a parte (f) implica a fórmula de Stirling.

Seção 14.3

22. Se $\Sigma_{n=1}^{\infty} a_n = s$, qual a soma da série $\Sigma_{n=1}^{\infty}(a_n + a_{n+1})$?

23. Para que valores de x é válido

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{x^3} + \frac{4}{x^5} + \cdots = \frac{x}{x^2 - 2} \text{ ?}$$

24 Determine os valores de x para os quais

$$\frac{x}{1+x} - \left(\frac{x}{1+x}\right)^2 + \left(\frac{x}{1+x}\right)^3 - \cdots$$

converge. Qual é sua soma?

25. Determinando uma fórmula fechada para a n-ésima soma parcial s_n, mostre que a série $\Sigma_{n=1}^{\infty} nx^n$ converge a $x/((1-x)^2$ quando $|x| < 1$ e diverge caso contrário.

26. Calcule a soma da série $\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{3}{27} + \cdots$.

27. Utilize o fato de que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ para mostrar que

(a) $\dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{5^2} + \cdots = \dfrac{\pi^2}{8}$;

(b) $\dfrac{1}{1^2} - \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} - \dfrac{1}{4^2} + \cdots = \dfrac{\pi^2}{12}$;

(c) $\dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{5^2} + \dfrac{1}{7^2} + \dfrac{1}{11^2} + \dfrac{1}{13^2} + \dfrac{1}{17^2} + \cdots = \dfrac{\pi^2}{9}$.

28. Mostre que

$$\int_0^\infty \frac{x\,dx}{e^x - 1} = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$$

expressando o integrando como uma série geométrica e integrando termo a termo.

29. Mostre que

(a) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \cdots = \ln 2;$

(b) $\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \cdots = 1 - \ln 2;$

(c) $\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{4 \cdot 5} + \cdots$

$= 2 \ln 2 - 1.$

30. Mostre que

(a) $\sum_{n=1}^\infty \frac{n}{(n+1)!} = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots = 1;$

(b) $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4};$

(c) $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n(n+1)\cdots(n+k)} = \frac{1}{k \cdot k!}.$

31. Calcule a soma de

(a) $\sum_{n=2}^\infty \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right);$

(b) $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}}.$

32. Se $f(n) \to L$, mostre que

$$\sum_{n=1}^\infty [f(n) - f(n+2)] = f(1) + f(2) - 2L$$

e utilize isto para estabelecer as seguintes afirmações:

(a) $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{4\cdot 6}+\cdots=\frac{3}{4}$;

(b) $\frac{1}{1\cdot 3}-\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 5}-\frac{1}{4\cdot 6}+\cdots=\frac{1}{4}$.

33. Se $a_1, a_2, a_3, \ldots$ são os inteiros positivos cujas representações decimais não contêm o algarismo 5, mostre que $\Sigma\, 1/a_n$ converge e tem soma <90.

34. A Fig. 14.9 mostra a região limitada pelos dois círculos de raio 1 tangentes entre si e por uma reta tangente a ambos.

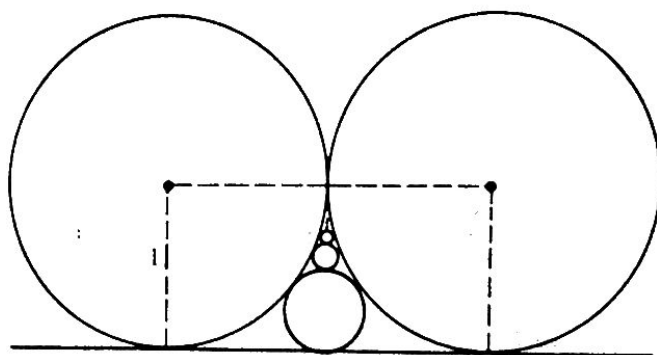



Figura 14.9

Uma seqüência de círculos menores, cada um tendo o raio máximo, é inscrita na região da maneira mostrada na figura. É claro, pela geometria da situação, que os comprimentos dos diâmetros desses círculos menores são os termos de uma série convergente cuja soma é 1. Mostre que essa série é

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots.$$

Seção 14.4

35. Determine se cada uma das seguintes séries converge ou diverge:

(a) $\sum \frac{2}{n^2+n}$; (b) $\sum \frac{n^2+31}{10{,}000n^3}$;

(c) $\sum \frac{1}{(n+3)^2}$; (d) $\sum \frac{n}{\sqrt{n^2+2}}$;

(e) $\sum \frac{1}{[1+(n-1)/n]^n}$; (f) $\sum \frac{\sqrt{n}}{n+5}$;

(g) $\sum \frac{\tan^{-1} n}{n^3}$; (h) $\sum \frac{3}{2+\sqrt{n}}$;

(i) $\sum \frac{(3n+1)^3}{(n^3+2)^2}$; (j) $\sum \frac{1}{\sqrt[3]{3n^2+1}}$;

(k) $\sum \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$;

(l) $\sum \frac{2n+3}{n \cdot 3^n}$; (m) $\sum \frac{5n-7}{(n+5)n!}$;

(n) $\sum \sqrt{\sin^3 \frac{1}{n}}$; (o) $\sum \left(\frac{n+1}{2n}\right)^n$;

(p) $\sum \left(\frac{n^2-1}{n^3+3}\right)^{1/3}$; (q) $\sum \frac{\sqrt{n+1}}{n^{n+1/2}}$;

(r) $\sum \frac{2^n+3^n}{3^n+4^n}$; (s) $\sum (1-e^{-1/n})^n$;

(t) $\sum \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}$; (u) $\sum \sin^2 \pi \left(n+\frac{1}{n}\right)$;

(v) $\sum \frac{[\ln (n+1)]^n}{n^{n+1}}$.

36. Se $a > 1$, mostre que $\Sigma\, 1/a^{\ln n}$ diverge se $a \leqslant e$ e converge se $a > e$.

37. Prove que toda série convergente de termos positivos pode ser rearranjada de modo que seus termos formem uma seqüência decrescente.

38. Se p é uma constante positiva qualquer, mostre que $\Sigma\, 1/(\ln n)^p$ diverge.

39. Mostre que as séries

$$\sum \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}} \quad \text{e} \quad \sum \frac{1}{(\ln \ln n)^{\ln n}}$$

são ambas convergentes. Sugestão: expresse $(\ln n)^{\ln n}$ como uma potência de n.

40. Mostre que

$$\sum \frac{1}{(\ln n)^{\ln \ln n}}$$

diverge. Sugestão: $(\ln \ln n)^2 \leqslant \ln n$ para n grande (por quê?).

41. Se $a_n \leqslant 0$ e Σa_n converge e se $\{b_n\}$ é uma seqüência limitada de números não-negativos, prove que $\Sigma a_n b_n$ também converge. Utilize a série $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$ para mostrar que o resultado é falso se as hipóteses $a_n \leqslant 0$ e $b_n \leqslant 0$ são abandonadas.

42. Se Σa_n e Σb_n são séries de termos não-negativos tais que Σa_n^2 e Σb_n^2 convergem, mostre que $\Sigma a_n b_n$ também converge.

Seção 14.5

43. Mostre que

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \ln \ln n}$$

diverge e também que, se p é uma constante positiva, então

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n (\ln \ln n)^p}$$

converge se $p > 1$ e diverge se $p \leqslant 1$.

44. Se k é um inteiro qualquer > 1, mostre que

$$\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{kn}\right) \to \ln k.$$

45. A soma da série convergente $\Sigma_{n=1}^{\infty} 1/n^3$ não é conhecida. Entretanto, se essa soma é denotada por s, mostre que

(a) $\frac{1}{1^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} + \cdots = \frac{7}{8}s;$

(b) $\frac{1}{1^3} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3} + \cdots = \frac{3}{4}s.$

46. Para $p > 1$, a soma da p-série $\Sigma_{n=1}^{\infty} 1/n^p$ é uma função de p chamada *função zeta* (o símbolo ζ é a letra grega *zeta*) e denotada por $\zeta(p)$, isto é,

$$\zeta(p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots .$$

Euler descobriu que $\zeta(2) = \pi^2/6$, $\zeta(4) = \pi^4/90$ e $\zeta(6) = \pi^6/945$ (veja o Apêndice A.12), mas o valor de $\zeta(p)$ não é conhecido quando p é ímpar.

(a) Utilize as desigualdades (5) da Seção 14.5 para mostrar que a função zeta satisfaz as desigualdades

$$\frac{1}{p-1} \le \zeta(p) \le \frac{p}{p-1}$$

e

$$1 \le \zeta(p) \le \frac{p}{p-1}.$$

(b) Mostre que $\lim_{p \to 1} \zeta(p) = \infty$ e $\lim_{p \to \infty} \zeta(p) = 1$.

(c) Mostre que $\displaystyle\lim_{a \to 0+} a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+a}} = 1.$

47. Seja k um inteiro > 1 e mostre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(k)}{n} = \ln k,$$

onde $a_n(k)$ é definida por

$$a_n(k) = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ não é múltiplo de } k, \\ -(k-1) & \text{se } n \text{ é múltiplo de } k. \end{cases}$$

48. O *teste da condensação de Cauchy* afirma que se $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ é uma seqüência decrescente de números positivos, então as duas séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots$$

e

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \cdots$$

convergem ou divergem. (Essa afirmação chama-se *teste de condensação* porque diz que uma proporção bem pequena dos termos das primeiras séries determina seu comportamento de convergência.)

(a) Prove o teste de condensação. Sugestão: se s_n e t_n são as somas parciais, agrupe os termos das primeiras séries em blocos para mostrar que $s_n \leqslant t_m$ se $n \leqslant 2^m$ e $t_m \leqslant 2s_n$ $2^m \leqslant n$.

(b) Utilize o teste de condensação para mostrar que as séries

$$\sum \frac{1}{n} \quad \text{e} \quad \sum \frac{1}{n \ln n}$$

divergem e que as séries

$$\sum \frac{1}{n^p} \quad \text{e} \quad \sum \frac{1}{n(\ln n)^p}$$

convergem se $p > 1$.

49. Prove que

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1} = \frac{1}{2} \ln n + \ln 2 + \frac{1}{2} \gamma + o(1).$$

50. Mostre que

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n+1)} = 2 - 2 \ln 2;$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(4n^2-1)} = 2 \ln 2 - 1;$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(9n^2-1)} = \frac{3}{2} (\ln 3 - 1);$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(16n^2-1)} = 3 \ln 2 - 2;$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(36n^2-1)} = \frac{3}{2} \ln 3 + 2 \ln 2 - 3;$

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(4n^2-1)^2} = \frac{1}{8};$

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(4n^2-1)^2} = \frac{3}{2} - 2 \ln 2.$

Seção 14.6

Utilize o teste da razão para determinar o comportamento das seguintes séries.

51. $\sum \frac{n}{e^n}$.

52. $\sum n^{1000}(\frac{2}{3})^n$.

53. $\sum \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}$.

54. $\sum \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n-2)}$.

55. $\sum \frac{1 \cdot 6 \cdot 11 \cdots (5n-4)}{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdots (4n-2)}$.

56. $\sum \frac{1000^n}{n!}$.

57. $\sum \frac{(n+3)!}{n!3^n}$.

58. $\sum \frac{2^{2n}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}$.

59. $\frac{1}{2} + \frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \cdots + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n-2)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} + \cdots$.

60. (a) Mostre que o teste da razão falha para a série

$$\sum \frac{1}{2^{n+(-1)^n}}$$

(b) Mostre que o teste da raiz funciona para a série da parte (a) e nos diz que essa série converge.

(Assim, o teste da raiz funciona em alguns casos em que o teste da razão falha. Podemos dizer ainda mais, pois o Problema Suplementar 18 garante que, se $\{a_n\}$ é uma seqüência qualquer de números positivos, então

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow L \quad \text{implica} \quad \sqrt[n]{a_n} \rightarrow L.$$

Em princípio o teste da raiz é mais poderoso que o teste da razão.)

61. Considere a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a + b + a^2 + b^2 + a^3 + b^3 + \cdots,$$

onde $0 < a < b < 1$. Mostre que o teste da razão falha e estabeleça a convergência usando o teste da raiz.

Seção 14.7

62. Mostre que a série

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \cdots$$

diverge. Isto contradiz o teste da série alternada?

63. Utilize o teste da série alternada para provar a existência da constante de Euler γ como se segue.

(a) Mostre que a série

$$1 - \int_1^2 \frac{dx}{x} + \frac{1}{2} - \int_2^3 \frac{dx}{x} + \frac{1}{3} - \int_3^4 \frac{dx}{x} + \frac{1}{4} - \int_4^5 \frac{dx}{x} + \cdots$$

converge

(b) Se a soma da série em (a) é denotada por γ, mostre que

$$s_{2n-1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n.$$

de modo que

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \right) = \gamma.$$

64. Utilize o teste da série alternada para mostrar que a integral imprópria

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx$$

converge. Sugestão: esboce o gráfico de $y = (\operatorname{sen} x)/x$ para $x > 0$ e observe que consiste em um número infinito de partes, cada uma cobrindo um intervalo de comprimento π e estando alternadamente acima e abaixo do eixo x, e depois expresse a integral como uma série alternada,

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \int_0^\pi \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx + \int_\pi^{2\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx + \cdots = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots.$$

65. Mostre que $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \cdots = \frac{1}{3}\ln 2 + \pi/3\sqrt{3}$.

66. Mostre que

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n} = \gamma \ln 2 - \frac{1}{2}(\ln 2)^2.$$

Sugestão: veja a equação (9) da Seção 14.5.

Seção 14.8

67. Considere uma série de potências $\Sigma a_n x^n$ e suponha que $\lim \sqrt[n]{|a_n|}$ existe, podendo valer $+\infty$. Mostre que o raio de convergência R da série é dado pela fórmula

$$R = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Utilize essa fórmula para determinar o raio de convergência de

(a) $\sum \frac{x^n}{n^n}$; (b) $\sum \frac{1}{(\ln n)^n} x^n$;

(c) $\sum \frac{n^{n^2}}{(n+1)^{n^2}} x^n$.

68. Se o raio de convergência de $\Sigma a_n x^n$ pode ser calculado a partir da fórmula (7) da Seção 14.8, mostre que ele também pode ser calculado a partir da fórmula do Problema 67. (Sugestão: veja o Problema Suplementar 18.) Mostre que a última fórmula é mais poderosa que a primeira, considerando a série.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^{n+(-1)^{n+1}}} = \frac{x}{2^2} + \frac{x^2}{2^1} + \frac{x^3}{2^4} + \frac{x^4}{2^3} + \cdots$$

69. Se uma série de potências converge condicionalmente num ponto x_1 ou diverge de tal modo que seus termos são limitados, mostre que x_1 deve ser uma extremidade do intervalo de convergência.

70. Utilize o Problema 69 para determinar por inspeção o raio de convergência de

(a) $1 + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{3^2} + \frac{x^3}{3^3} + \cdots$;

(b) $x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} - \cdots$;

(c) $\Sigma x^{n!} = x + x + x^2 + x^6 + x^{24} + \cdots$;

(d) $1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3^2} + \frac{x^3}{2^3} + \frac{x^4}{3^4} + \frac{x^5}{2^5} + \frac{x^6}{3^6} + \cdots$;

(e) $\sum [2^{(-1)^n} x]^n = 1 + \frac{x}{2} + 2^2x^2 + \frac{x^3}{2^3} + 2^4x^4 + \cdots$.

71. Determine o intervalo de convergência de $\Sigma a_n x^n$ se seus coeficientes são ordenados aleatoriamente dentre os números 2, 3, ..., 12, jogando um par de dados.

Seção 14.9

72. Considere uma série de potências $\Sigma a_n x^n$ em que os coeficientes se repetem ciclicamente, $a_{n+1} = a_n$. Mostre que

(a) $R = 1$;

(b) a soma é

$$\frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{k-1} x^{k-1}}{1 - x^k}.$$

73. Calcule a soma de cada uma das seguintes séries:

(a) $x - \frac{x^3}{3^2} + \frac{x^5}{5^2} - \frac{x^7}{7^2} + \cdots$;

(b) $\frac{x^2}{1 \cdot 2} - \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^4}{3 \cdot 4} - \frac{x^5}{4 \cdot 5} + \cdots$;

(c) $1 + 4x + 9x^2 + 16x^3 + 24x^4 + \cdots$;

(d) $\frac{x^4}{4} + \frac{x^8}{8} + \frac{x^{12}}{12} + \frac{x^{16}}{16} + \cdots$;

(e) $x + 2^3x^2 + 3^3x^3 + 4^3x^4 + \cdots$;

(f) $4 + 5x + 6x^2 + 7x^3 + \cdots$.

Seção 14.10

74. Utilize qualquer método para obter cada uma das seguintes expansões em série de Taylor:

(a) $\operatorname{sen} x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + \cdots$;

(b) $\dfrac{1}{1+e^x} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{48}x^3 + \cdots$;

(c) $e^{x^2-x} = 1 - x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{7}{6}x^3 + \frac{25}{24}x^4 + \cdots$.

75. Considere a série binomial

$$(1+x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2!}x^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!}x^3 + \cdots$$

$$+ \frac{p(p-1)(p-2)\cdots(p-n+1)}{n!}x^n + \cdots,$$

onde p é uma constante arbitrária. No Problema 13 da Seção 14.10 a série à direita foi obtida como a série de Taylor da função $(1+x)^p$ e também vimos que essa série converge p para $|x| < 1$. Esboçamos aqui uma seqüência de passos para provar que a série à direita realmente converge *à função da esquerda* para esses valores de x.

(a) Denote por $f(x)$ a soma da série para $|x| < 1$, calcule $f'(x)$ e $xf'(x)$ e mostre que

$$(1+x)f'(x) = pf(x).$$

(b) Defina $g(x)$ por

$$g(x) = \frac{f(x)}{(1+x)^p}$$

e utilize a parte (a) para mostrar que $g'(x) = 0$ para $|x| < 1$, de modo que $g(x) = c$ para alguma constante c.

(c) Mostre que $c = 1$ na parte (b) e conclua que

$$(1+x)^p = f(x).$$

Seção 14.11

76. Se $f_1(x) = \Sigma_{n=1}^{\infty} nx^n$, calcule $(1-x)f_1(x)$ e utilize o resultado para determinar uma fórmula fechada para $f_1(x)$.

77. Utilize a idéia do Problema 76 para determinar uma fórmula fechada para $f_2(x) = \Sigma_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$.

78. Utilize a idéia dos Problemas 76 e 77 para determinar uma fórmula fechada para $f_3(x) = \Sigma_{n=1}^{\infty} n(n+1)(n+2)x^n$.

79. Na notação dos Problemas 76 a 78 mostre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^n = f_2(x) - f_1(x)$$

e

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^3x^n = f_3(x) - 3f_2(x) + f_1(x).$$

Utilizando essas idéias como um ponto de partida, esboce uma prova do seguinte teorema: se $p(n)$ é um polinômio em n, então $f(x) = \Sigma_{n=0}^{\infty} p(n)x^n$ é uma função racional.

80. Mostre que $1/\sqrt{1-2xt+t^2} = \Sigma_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n$, onde $p_n(x)$ é um polinômio de grau n, substituindo $h = 2xt - t^2$ na série binomial por $1/\sqrt{1-h}$ [veja o Problema 17 da Seção 14.11]. Determine $p_0(x)$, $p_1(x)$, $p_2(x)$ e $p_3(x)$. Os polinômios $p_n(x)$, chamados *polinômios de Legendre*, são importantes em Física, Matemática, por exemplo, no estudo de fluxo de calor em esferas sólidas.

81. Calcule os seguintes limites utilizando as séries de Taylor:

(a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \cos x - \operatorname{sen} x}{x^2 \operatorname{tg} x}$; (b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x - \operatorname{tg} x}{\operatorname{sen}^2 x}$;

(c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x^2} + \cos x - 2}{x^4}$.

CAPÍTULO

15

SEÇÕES CÔNICAS

15.1 INTRODUÇÃO. SEÇÕES DE UM CONE

A fim de compreender as idéias centrais do Capítulo 14, foi necessário dar atenção cuidadosa ao fraseado preciso das definições e aos detalhes das demonstrações; assim o nívèl de rigor matemático nesse capítulo foi bastante alto. Entretanto, agora voltamos a trabalhar com o que é de natureza preponderantemente geométrica. Vamos portanto confiar muito mais em raciocínio baseado em intuição espacial e no discernimento que podemos obter de figuras cuidadosamente desenhadas.

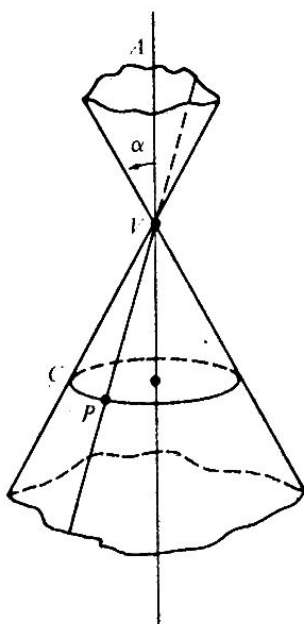



Figura 15.1

Considere uma circunferência C. Seja A a reta que passa pelo centro de C e é perpendicular ao plano de C e seja V um ponto de A que não pertence ao plano de C (Fig. 15.1). Tome um ponto P de C e desenhe uma reta por P que passa também por V. Fazendo P percorrer C, a reta PV gera um *cone circular reto com eixo* A e *vértice* V. Cada uma das retas PV chama-se *geratriz* do cone, e o ângulo α entre o eixo e qualquer geratriz chama-se *ângulo do vértice*. O cone mostrado na Fig. 15.1 tem um eixo vertical; as porções superior e inferior do cone que se interceptam no vértice chamam-se *folhas* do cone. Em Geometria Elementar, um cone geralmente é entendido como sendo uma figura sólida que ocupa a região limitada do espaço que está entre V e o plano de C e no interior da superfície que acabamos de descrever. Entretanto, no contexto presente, o cone é apenas essa superfície, e é encarado como constituído de ambas as folhas, estendendo-se ao infinito em ambos os sentidos.

As curvas obtidas cortando-se um cone com um plano que não passa pelo vértice chamam-se *seções cônicas* ou simplesmente *cônicas*. Se o plano secante é paralelo a uma geratriz, a cônica chama-se *parábola*. Caso contrário, a cônica chama-se *elipse* ou *hipérbole*, conforme o plano corte uma só ou ambas as folhas. A hipérbole deve ser encarada como uma curva só, consistindo em dois "ramos", um em cada folha. Essas três curvas são ilustradas na Fig. 15.2.

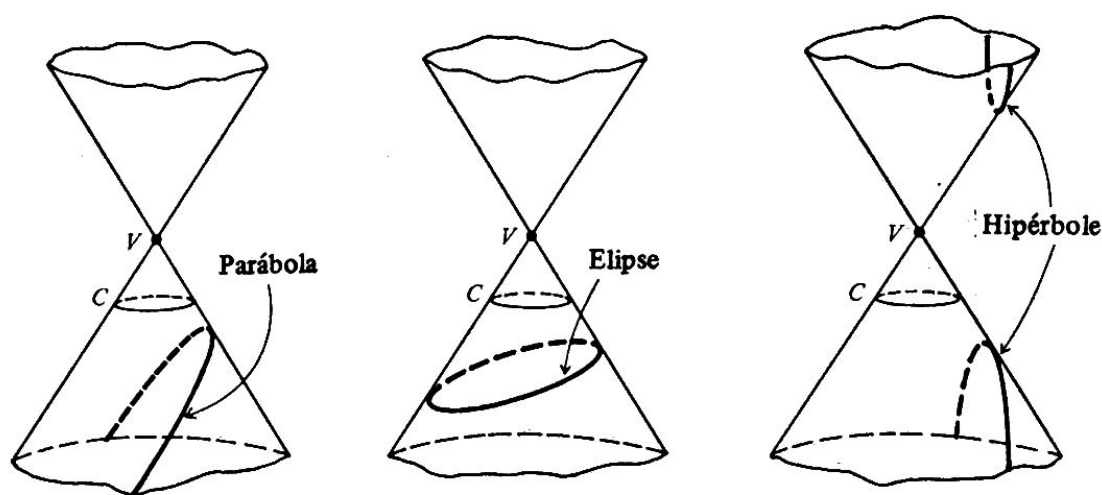



Figura 15.2

As três curvas mostradas na Fig. 15.2 podem ser descritas de outra maneira. Imagine uma fonte de luz colocada em V e um anel circular colocado em C. Então a sombra do anel projetada sobre um plano será uma parábola, uma elipse ou um ramo de hipérbole, dependendo da inclinação do plano. Se o plano é paralelo a uma das retas que une V a C, obtemos uma sombra parabólica; a sombra será uma elipse se o plano for menos inclinado que esse plano que gera a parábola e será parte de uma hipérbole se for mais inclinado.

Devemos notar que transladando cada um dos planos secantes da Fig. 15.2 paralelamente à posição original até passar pelo vértice, obteremos as chamadas seções cônicas "degeneradas", ou seja, respectivamente uma única reta, um ponto e um par de retas concorrentes.

Muitas descobertas importantes em Matemática Pura e em Ciência estão relacionadas às seções cônicas. Os gregos clássicos – Arquimedes, Apolônio e outros – estudaram essas belas curvas por puro prazer, como forma de desafios, sem qualquer pensamento em possíveis aplicações. As primeiras aplicações apareceram quase 2.000 anos depois, no início do século XVII. Em 1604, Galileu descobriu que, lançando-se um projétil horizontalmente do topo de uma torre, supondo que a única força atuante seja a da gravidade – isto é, a resistência do ar e outros fatores complicadores são ignorados –, sua trajetória será uma parábola. Um dos grandes eventos da história da Astronomia ocorreu alguns anos mais tarde, apenas em 1609, quando Kepler publicou sua descoberta de que a órbita de Marte era uma elipse, lançando a hipótese de que todos os planetas se moveriam em órbitas elípticas. E cerca de 60 anos depois disso, Newton provou matematicamente que a órbita planetária elíptica é causa e conseqüência de uma lei de atração gravitacional, baseada no inverso do quadrado da distância. Isso levou Newton a formular e publicar (em 1687) sua famosa Teoria da Gravitação Universal, para explicar o mecanismo do sistema solar, teoria esta considerada como a maior contribuição à Ciência feita por um só homem. Esses desenvolvimentos ocorreram centenas de anos atrás, mas o estudo das seções cônicas não é, ainda hoje, nem um pouco anacrônico. De fato, essas curvas são instrumentos importantes nas explorações espaciais dos dias de hoje, e também nas pesquisas do comportamento de partículas atômicas: os satélites artificiais movem-se ao redor da Terra em órbitas elípticas, e a trajetória de uma partícula alfa movendo-se no campo elétrico de um núcleo atômico é uma hipérbole. Esses exemplos e muitos outros mostram que a importância das seções cônicas, tanto antigamente como atualmente, é difícil de ser menosprezada.

Estudaremos as seções cônicas como curvas planas. Para esse propósito, convém utilizar definições equivalentes que se referem somente ao plano em que as curvas estão e que dependem de pontos especiais desse plano chamados *focos*. Assim, elipse é definida como o conjunto de todos os pontos do plano cujas somas das distâncias d_1 e d_2 a dois pontos fixos F e F' (os focos) é constante, Fig. 15.3 (à esquerda).

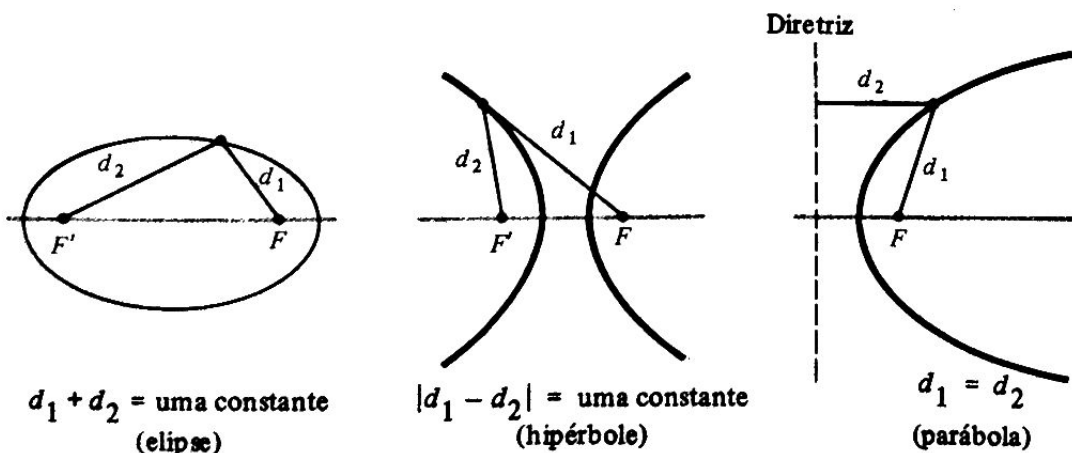



Figura 15.3

Hipérbole é o conjunto de todos os pontos para os quais o valor absoluto da diferença $|d_1 - d_2|$ é constante. Finalmente, parábola é o conjunto de todos os pontos cujas distâncias a um ponto fixo F (o foco) e a uma reta fixa (chamada *diretriz*) são iguais.

Há um argumento simples e elegante que mostra que a propriedade focal de uma elipse pode ser obtida de sua definição como seção cônica. A demonstração utiliza as duas esferas mostradas na Fig. 15.4, internamente tangentes ao cone nos pontos das circunferências horizontais C_1 e C_2. As esferas são também tangentes ao plano secante, que origina a elipse nos pontos F e F'. Sendo P um ponto arbitrário da elipse, devemos mostrar que a soma de suas distâncias aos focos $PF + PF'$ é constante no sentido de que não depende da posição particular de P. Para ver isto, notamos que, sendo Q e R pontos sobre C_1 e C_2 que estão na geratriz que passa por P, então $PF = PQ$ e $PF' = PR$, pois duas tangentes quaisquer a uma esfera, traçadas de um mesmo ponto externo, têm o mesmo comprimento. Segue-se que $PF + PF' = PQ + PR = QR$; e o argumento se completa observando-se que QR, considerada como medida da distância de C_1 a C_2 tomada sobre uma geratriz, tem o mesmo valor qualquer que seja a posição de P.

Com pequenas modificações, essa prova funciona também para a hipérbole e para a parábola. No caso da hipérbole, utilizamos uma esfera em cada folha do cone, com ambas as esferas tangentes ao plano secante. E para a parábola utilizamos uma esfera tangente ao plano secante. O foco da parábola é esse ponto de tangência, e sua diretriz é a reta de interseção do plano secante com o plano da circunferência ao longo da qual a esfera é internamente tangente ao cone. Os estudantes devem utilizar essas sugestões para desenhar figuras adequadas e provar para si mesmos que as propriedades focais da hipérbole e da parábola podem ser deduzidas a partir de suas definições de seções cônicas.

15.2 CIRCUNFERÊNCIAS E PARÁBOLAS

Circunferências e parábolas foram abordadas com muitos detalhes no Capítulo 1. No entanto, estando agora no Capítulo 15, pode ser útil uma breve revisão dos principais fatos a fim de ajudar os estudantes a ajustar esses tópicos no contexto do capítulo presente.

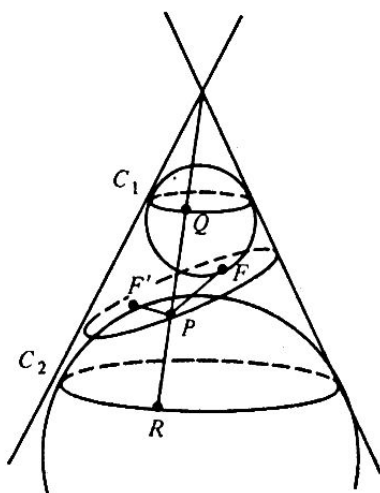



Figura 15.4 A propriedade de uma elipse.

Circunferências

Observando-se a Fig. 15.4, vemos imediatamente que uma circunferência pode ser encarada como caso particular de elipse, qual seja, quando o plano secante for tomado perpendicular ao eixo do cone. Nesse caso, os focos coincidirão. Apesar disso, por diversos motivos, convém discutir as circunferências separadamente e reservar a palavra "elipse" para o caso em que os focos são dois pontos distintos.

Uma *circunferência* – como já sabemos muito bem – pode ser definida como uma curva plana, conjunto de todos os pontos que estão a uma distância fixa (chamada *raio*) de um ponto fixo (chamado *centro*). Sendo $r > 0$ o raio, (h,k) o centro e sendo (x,y) um ponto arbitrário da circunferência (Fig. 15.5), usando-se a fórmula da distância, da definição, obtém-se

$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r$$

ou

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2, \tag{1}$$

que é a equação da circunferência na forma-padrão.

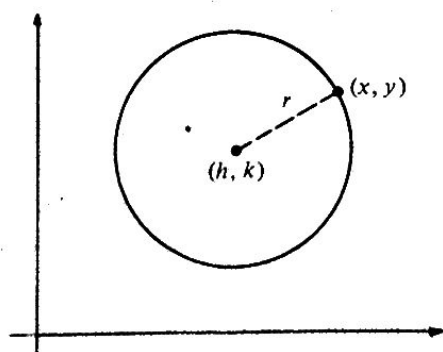



Figura 15.5 Circunferência

Desenvolvendo os quadrados dos termos à esquerda de (1) e rearranjando, podemos escrever essa equação na forma

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0. \tag{2}$$

Reciprocamente, completando o quadrado nos termos em x e y, toda equação da forma (2) pode ser escrita na forma (1) e, portanto, representará uma circunferência caso $r^2 > 0$. Como os estudantes recordarão, há uma pequena dificuldade com esse procedimento pelo fato de que a constante r^2 à direita de (1) pode resultar ser zero ou um número negativo. Nesses casos, (1) pode ser encarada como a equação de um ponto ou do conjunto vazio.

Parábolas

Como vimos na Seção 15.1, uma parábola pode ser definida como uma curva plana, conjunto de todos os pontos P que são eqüidistantes de um ponto fixo F e de uma reta fixa d, (Fig. 15.6, à esquerda).

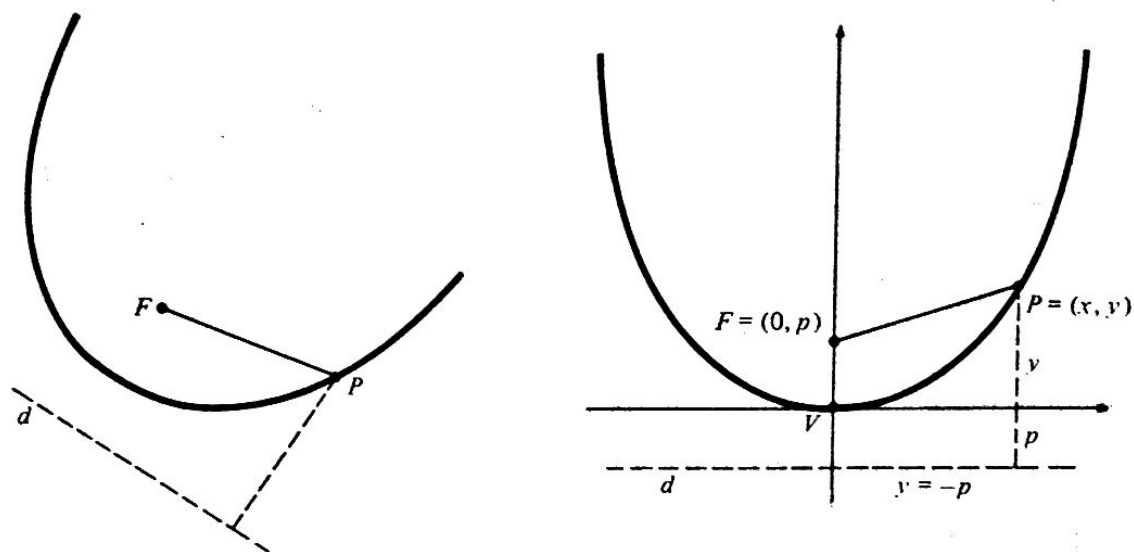



Figura 15.6 Parábola.

O ponto fixo chama-se *foco* e a reta fixa chama-se *diretriz*. Para determinar uma equação simples dessa curva, introduzimos o sistema de coordenadas mostrado à direita da figura, em que o foco é o ponto $F = (0,p)$, onde p é um número positivo e a diretriz é a reta $y = -p$. Sendo $P = (x,y)$ um ponto arbitrário da parábola, utilizando-se a fórmula da distância, da definição, obtém-se

$$\sqrt{x^2 + (y - p)^2} = y + p. \tag{3}$$

Elevando-se ao quadrado e simplificando, obtemos

$$x^2 + y^2 - 2py + p^2 = y^2 + 2py + p^2$$

ou

$$x^2 = 4py. \tag{4}$$

Reciprocamente, invertendo-se os passos, verificamos que (3) pode ser deduzido a partir de (4). A equação (4) é, portanto, a equação dessa parábola particular na forma padrão. A reta que passa pelo foco e é perpendicular à diretriz chama-se *eixo* da parábola, e o ponto V em que a parábola intercepta o eixo chama-se *vértice*. Para a parábola (4), o eixo é evidentemente o eixo y e o vértice é a origem.

Se trocarmos a posição da parábola com relação aos eixos coordenados, sua equação naturalmente mudará. Três outras posições simples, cada uma com sua correspondente equação, são mostradas na Fig. 15.7.

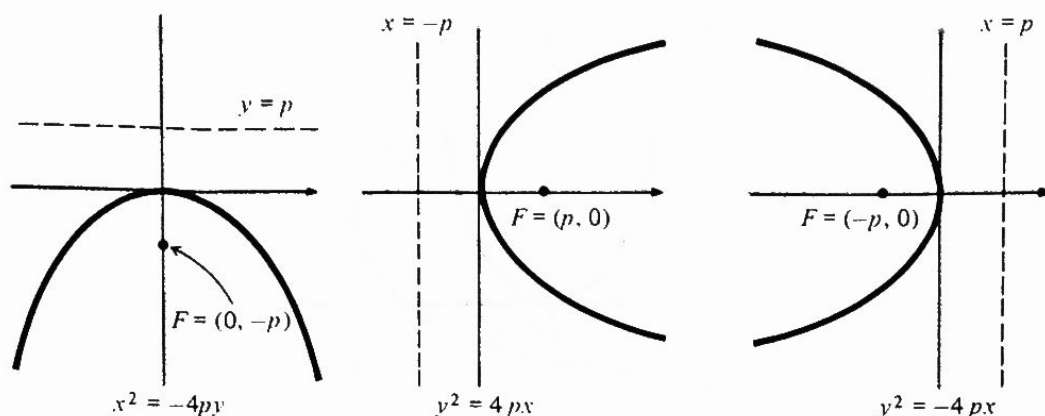



Figura 15.7

Os estudantes devem verificar a correção das três equações. Enfatizamos que a constante p é sempre considerada um número positivo; geometricamente, é a distância do vértice ao foco, e também do vértice à diretriz.

Ilustramos um ponto adicional acerca das parábolas, considerando a equação

$$x^2 - 8x - y + 19 = 0.$$

Rearranjando os termos, obtemos: $x^2 - 8x = y - 19$. Completando o quadrado em x, teremos

$$(x - 4)^2 = y - 3.$$

Introduzindo agora novas variáveis x' e y' pelas substituições

$$x' = x - 4,$$

$$y' = y - 3,$$

nossa equação ficará sendo

$$x'^2 = y'.$$

O gráfico dessa equação é certamente uma parábola, com eixo vertical cujo vértice está na origem do sistema de coordenadas (x',y'), e essa origem está localizada no ponto (4,3) no sistema (x,y), (Fig. 15.8).

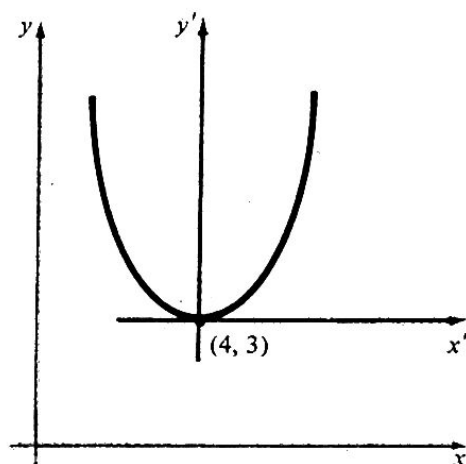



Figura 15.8

Exatamente da mesma forma, toda equação da forma

$$x^2 + Ax + By + C = 0, \qquad B \neq 0, \tag{5}$$

representa uma parábola com eixo vertical. O vértice dessa parábola é facilmente localizado, completando-se o quadrado em x. Dessa maneira a equação pode ser escrita na forma

$$(x-h)^2 = 4p(y-k) \qquad \text{ou} \qquad (x-h)^2 = -4p(y-k),$$

onde o ponto (h,k) é o vértice*. Analogamente, toda equação da forma

$$y^2 + Ax + By + C = 0, \qquad A \neq 0,$$

representa uma parábola com eixo horizontal, e os aspectos geométricos dessa parábola podem ser descobertos completando-se o quadrado em y e escrevendo-se a equação sob a forma

$$(y-k)^2 = 4p(x-h) \qquad \text{ou} \qquad (y-k)^2 = -4p(x-h).$$

---

* Salientamos aqui que se permitirmos $B = 0$ em (5), então o gráfico da equação poderá ser uma única reta ou duas retas paralelas ou o conjunto vazio. Para a equação particular $x^2 - 2x - k = 0$ ou, de modo equivalente, $(x-1)^2 = k + 1$, esses casos correspondem a $k = -1$, $k > -1$ e $k < -1$.

Concluímos esta seção descrevendo a chamada ***propriedade de reflexão*** das parábolas. Considere a reta tangente em um ponto $P = (x,y)$ da parábola $y^2 = 4px$ (Fig. 15.9), onde $f = (p,0)$ é o foco. Seja α o ângulo entre a tangente e o segmento FP e seja β o ângulo entre a tangente e a reta horizontal que passa por P. No Problema 9, pedimos aos estudantes para provar que $\alpha = \beta$.

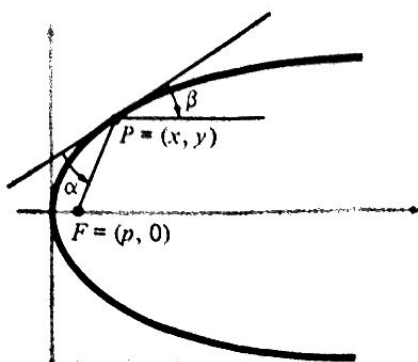



Figura 15.9 A propriedade da reflexão.

Essa propriedade geométrica das parábolas tem muitas aplicações. É usada, por exemplo, no desenho do espelho dos faróis. Para construir tal espelho, giramos a parábola ao redor de seu eixo a fim de formar uma superfície de revolução; depois pintamos a parte interna com tinta prateada criando uma superfície refletora. Colocando-se uma fonte de luz no foco F, cada raio que a fonte irradia será refletido na superfície e adotará como trajetória uma reta paralela ao eixo. O mesmo princípio é utilizado no desenho de espelho de telescópios refletores e fornos solares; nesses casos, os raios de luz, que são paralelos ao eixo, atingem o espelho, são refletidos e convergem no foco. Essa propriedade de reflexão das parábolas é também a base do desenho de antenas de radar e de radiotelescópios.

Problemas

1. Para cada uma das seguintes equações, determine a natureza do gráfico, completando o quadrado:

(a) $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 15 = 0$;
(b) $x^2 + y^2 + 4x - 18y + 88 = 0$;
(c) $x^2 + y^2 - 10x + 2y + 26 = 0$;
(d) $x^2 + y^2 - 16x + 12y + 96 = 0$;
(e) $x^2 + y^2 + 6x - 14y + 58 = 0$;
(f) $x^2 + y^2 + 14x + 10y + 95 = 0$.

2. Se $0 < a < b$, determine o raio r e o centro (h,k) da circunferência que passa pelos pontos $(0,a)$ e $(0,b)$ e é tangente ao eixo x num ponto à direita da origem.

3. Para cada uma das seguintes parábolas, determine o vértice, o foco e a diretriz:

(a) $x^2 + 4x - 4y = 0$;
(b) $y^2 - 8x - 2y + 25 = 0$;
(c) $x^2 + 4x + 16y - 76 = 0$;
(d) $y^2 + 12x - 2y + 25 = 0$;
(e) $y = x^2 + 2x + 3$.

4. Um farol refletor é projetado como foi dito no texto. Se ele tem 60 cm de profundidade e 150 cm de abertura, determine seu foco.

5. Determine a equação do arco parabólico com base b e altura h mostrado na Fig. 15.10.

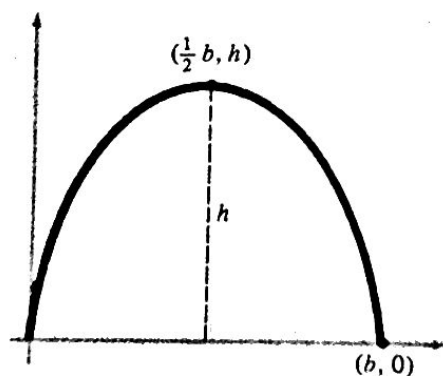



Figura 15.10

6. Mostre que a área do segmento parabólico da Fig. 15.10 é $\frac{2}{3}hb$. (Note que essa área é quatro terços da área do triângulo com a mesma base e altura, fato que foi descoberto e provado por Arquimedes. Veja o Apêndice A.1.)

7. Se o segmento parabólico da Fig. 15.10 é girado ao redor de seu eixo, mostre que o volume do sólido de revolução resultante é três meios do volume do cone inscrito.

8. Uma parábola com foco F e diretriz d, dados e marcados numa folha de papel, pode ser construída da forma descrita a seguir. (Fig. 15.11.)

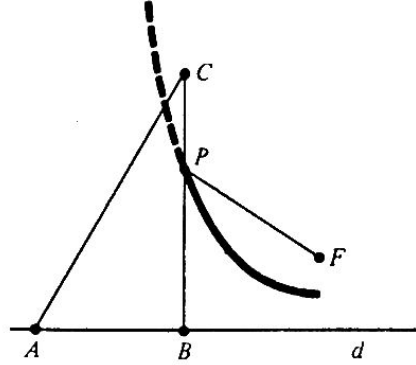



Figura 15.11

Numa prancha de desenho, fixe uma régua no papel com seu lado ao longo de d e coloque o cateto menor AB de um esquadro ABC contra a aresta da régua. No vértice oposto C fixe uma extremidade de um fio cujo comprimento é igual a BC, cateto maior do triângulo, e fixe a outra extremidade do fio em F. Se a ponta de um lápis em P mantém o fio esticado, como mostra a figura, então a ponta do lápis desenha parte de uma parábola quando o esquadro desliza ao longo da régua. Explique por que essa construção funciona.

9. Prove que $\alpha = \beta$ (Fig. 15.9). Sugestão: prolongue FP por P e utilize a fórmula de subtração da tangente trigonométrica para mostrar que tg α = tg β.

10. Mostre que as retas tangentes a uma parábola pelas extremidades de uma corda focal (corda que passa pelo foco) interceptam-se em ângulo reto.

11. Mostre que as retas tangentes a uma parábola pelas extremidades de uma corda focal interceptam-se sobre a diretriz.

15.3 ELIPSES

Na Seção 15.2 demos definições do tipo "conjunto de pontos" para circunferências e parábolas. É possível dar também definições do tipo "lugar geométrico" tal que cada curva seja definida e encarada como a trajetória de um ponto móvel que satisfaz certas condições ao se mover. Essa linguagem tem a vantagem de dar maior clareza visual. Assim, uma parábola pode ser definida como o lugar geométrico de um ponto que se move de modo a manter distâncias iguais de si a um ponto fixo dado e a uma reta fixa dada.

Analogamente, de acordo com a Seção 15.1, podemos definir uma *elipse* como o lugar geométrico de um ponto P que se move de modo a manter constante a soma de suas distâncias a dois pontos fixos F e F' (Fig. 15.12, à esquerda). Para simplificar as equações, denotamos essa constante por $2a$ e escrevemos a condição de definição

$$PF + PF' = 2a. \tag{1}$$

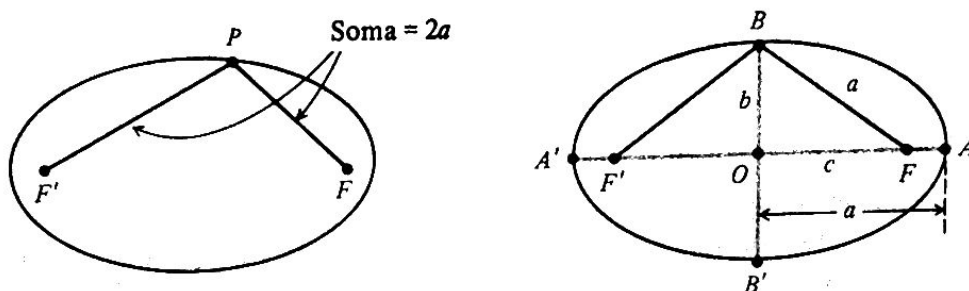



Figura 15.12

Os dois pontos F e F' chamam-se *focos* da elipse por causa da propriedade de reflexão a ser abordada na Observação 1. Como circunferências não são consideradas elipses nessa discussão, F e F' devem ser pontos *distintos*, $F \neq F'$.

A definição fornece um meio fácil de desenhar uma elipse numa folha de papel. Começamos fixando o papel a uma prancha de desenho por meio de duas tachas colocadas em F e F'. A seguir, amarramos as extremidades de um fio às tachas e mantemos o fio teso com a ponta de um lápis. É claro que se o lápis se move, mantendo tenso o fio, sua ponta desenha uma elipse.

Introduzindo várias notações-padrão para as dimensões de uma elipse. É fácil ver, pela definição, que a curva é simétrica com relação à reta que passa pelos focos e também com relação à mediatriz do segmento FF'. O segmento AA' chama-se *eixo maior* e o segmento BB' *eixo menor* da elipse. O ponto O de interseção desses eixos chama-se *centro* (Fig. 15.12 à direita). Os pontos A e A', extremidades do eixo maior, chamam-se *vértices* da elipse. Denotamos o comprimento do eixo menor por $2b$ e a distância entre os focos, por $2c$. É claro que $BF = a$, pois $BF + BF' = 2a$ e $BF = BF'$, logo

$$a^2 = b^2 + c^2. \tag{2}$$

Como $AF + AF' = 2a$ e $AF' = FA'$, vemos que $AA' = 2a$, e assim o comprimento do eixo maior é $2a$. Os números a e b chamam-se *semi-eixo maior* e *semi-eixo menor*.

É fácil ver, pela equação (2), que $b < a$. Se b é muito pequeno em relação a a, isto é a elipse é bem alongada e fina, então (2) mostra que c é aproximadamente tão grande quanto a, e os focos estão perto das extremidades do eixo maior; se b é tão grande quanto a, isto é, a elipse é aproximadamente circular, então c é pequeno, e os focos estão próximos ao centro. A razão c/a chama-se *excentricidade* da elipse e é denotada por e:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}. \tag{3}$$

Observe que $0 < e < 1$. As elipses aproximadamente circulares têm excentricidade perto de 0, e as elipses alongadas e finas têm excentricidade próxima de 1.

A fim de determinar uma equação simples para a elipse, tomemos o eixo x ao longo do segmento FF' e o eixo y como a mediatriz desse segmento. Então os focos são $F = (c,0)$ e $F' = (-c,0)$ (Fig. 15.13), e, da condição (1) de definição, obtemos

$$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + \sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a \tag{4}$$

que é a equação da curva.

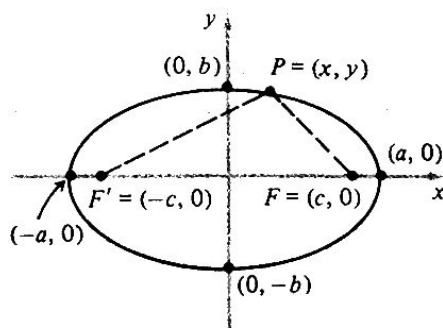



Figura 15.13

Para simplificarmos essa equação, seguimos o procedimento usual de eliminar radicais, ou seja, isolamos um dos radicais e elevamos ao quadrado. Passando o primeiro radical de (4) para o segundo membro, elevando os dois membros ao quadrado e simplificando, obtemos

$$PF = \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = a - \frac{c}{a}x \tag{5}$$

e

$$PF' = \sqrt{(x + c)^2 + y^2} = a + \frac{c}{a}x, \tag{6}$$

onde (6) é obtida de (5), pois $PF' = 2a - PF$. Elevando-se novamente ao quadrado e simplificando qualquer uma dessas equações chegamos ao resultado

$$\left(\frac{a^2 - c^2}{a^2}\right) x^2 + y^2 = a^2 - c^2$$

ou

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1. \tag{7}$$

Utilizando (2) para simplificar (7) ainda mais, obtemos, finalmente,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{8}$$

Mostramos que de (4) chega-se a (8). Pode ser mostrado, reciprocamente, que (8) implica (4), mas omitimos esse detalhe. A equação (8) é, portanto, a forma reduzida (padrão) da equação da elipse mostrada na Fig. 15.13.

Interrompemos nossa análise para salientar que a equação (8) revela com facilidade a maior parte dos aspectos geométricos simples da elipse visíveis na Fig. 15.13. (i) Se $y = 0$, então a equação nos diz que $x = \pm a$ e se $x = 0$, então $y = \pm b$, logo a curva corta os eixos x e y nos quatro pontos $(\pm a, 0)$ e $(0, \pm b)$.

(ii) Como ambos os termos x^2/a^2 e y^2/b^2 são não-negativos e sua soma é 1, segue-se que nenhum deles pode ser maior que 1, e assim $|x| \leqslant a$ e $|y| \leqslant b$. Isto significa que toda a elipse está contida no retângulo cujos lados são $x = \pm a$ e $y = \pm b$, e é portanto – diferentemente da parábola – uma curva limitada.

(iii) Se (x,y) satisfaz a equação, então $(x,-y)$ e $(-x,y)$ também a satisfazem, logo a curva é simétrica tanto em relação ao eixo x como ao eixo y. Assim para fazermos o gráfico da curva completa, basta esboçar o gráfico no primeiro quadrante e depois estender aos outros quadrantes por simetria. A simetria esquerda-direita da elipse que é tão óbvia pela equação (8) é realmente notável, porque a maioria das pessoas que contemplam a Fig. 15.2 pela primeira vez sente-se bem segura de que uma elipse deve ser uma "oval" que tem uma "pequena curvatura" na parte da elipse perto do vértice do cone e uma "grande curvatura" na parte mais afastada desse vértice – mas, naturalmente, isto não é verdade.

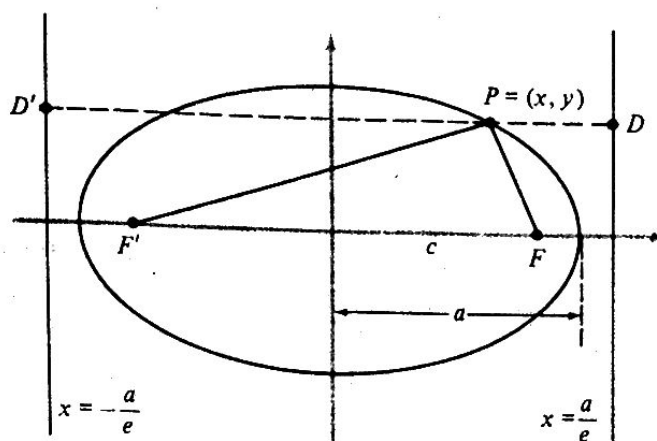



Figura 15.14

Consideramos, de novo, as fórmulas (5) e (6) dos *raios focais* direito e esquerdo PF e PF', que podem ser escritas como

$$PF = a - \frac{c}{a}x = e\left[\frac{a}{e} - x\right] \tag{9}$$

e

$$PF' = a + \frac{c}{a}x = e\left(\frac{a}{e} + x\right) = e\left[x - \left(-\frac{a}{e}\right)\right], \tag{10}$$

onde $e = c/a$ é a excentricidade definida anteriormente. As quantidades entre colchetes podem ser interpretadas (veja a Fig. 15.14) como as distâncias PD e PD' de P às retas $x = a/e$ e $x = -a/e$, respectivamente. As fórmulas (9) e (10) podem, portanto, ser escritas na forma

$$\frac{PF}{PD} = e \quad \text{e} \quad \frac{PF'}{PD'} = e. \tag{11}$$

Cada uma das retas $x = a/e$ e $x = -a/e$ chama-se *diretriz* da elipse. As equações (11) mostram que *uma elipse pode ser caracterizada como o lugar geométrico de um ponto que se move de modo a manter constante $e < 1$ a razão entre sua distância a um ponto fixo (um foco) e sua distância a uma reta fixa (a correspondente diretriz).* Veremos no Capítulo 16 e em outros lugares que esse modo de caracterizar elipses é, com freqüência, muito útil.

Exemplo 1 Identifique a curva $16x^2 + 25y^2 = 400$ como sendo uma elipse e determine seus vértices, focos, excentricidade e diretrizes. Esboce o gráfico.

Solução Primeiro, dividimos por 400 para converter a equação na forma reduzida

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1,$$

que, em comparação com (8), revela que o gráfico é uma elipse. Como $a^2 = 25$ e $b^2 = 16$, temos $a = 5$ e $b = 4$, e assim os vértices são $(\pm 5,0)$ e as extremidades do eixo menor são $(0, \pm 4)$ (Fig. 15.15). A seguir, $c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 16 = 9$, logo $c = 3$ e os focos são $(\pm 3,0)$. Finalmente, a excentricidade é $e = c/a = 3/5$ e as diretrizes são as retas verticais $x = \pm a/e = \pm 25/3$.

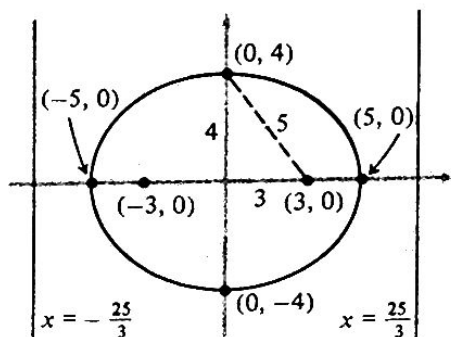



Figura 15.15

Na discussão acima admitimos que a elipse tem seu centro na origem e os focos no eixo x. Entretanto, se seu centro for a origem e os focos estiverem no eixo y, seu eixo maior será vertical e os papéis de x e y estarão trocados.

Exemplo 2 Mostre que $9x^2 + 4y^2 = 36$ representa uma elipse e determine seus vértices, focos, excentricidade e diretrizes. Esboce o gráfico.

Solução Como antes, dividimos por 36 para converter a equação dada na forma reduzida reconhecível.

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Observe que aqui o *denominador do termo y é maior,* logo temos uma elipse cujo eixo maior é vertical. Os semi-eixos maior e menor são claramente $a = 3$ e $b = 2$, logo os vértices (veja a Fig. 15.16) são $(0, \pm 3)$ e as extremidades do eixo menor são $(\pm 2,0)$. Como $c^2 = a^2 - b^2 = 9 - 4 = 5$, $c = \sqrt{5}$, e os focos são os pontos $(0, \sqrt{5})$ e $(0, -\sqrt{5})$ sobre o eixo y. A excentricidade é $e = c/a = 5/3$, e as diretrizes são as retas horizontais $y = \pm a/e = \pm 9/\sqrt{5} = \pm \frac{9}{5}\sqrt{5}.$

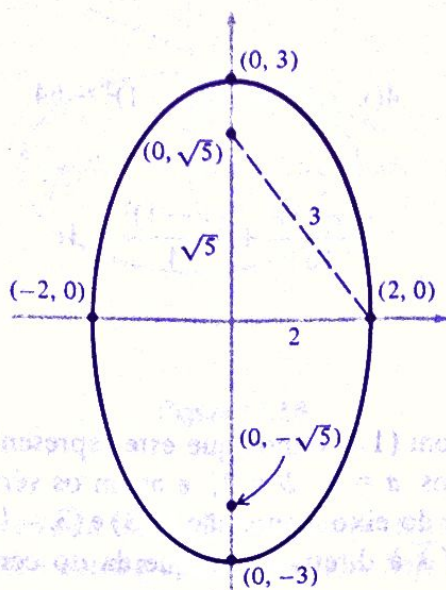



Figura 15.16

Os Exemplos 1 e 2 ilustram que se tivermos uma equação da forma

$$\frac{x^2}{(\ )^2}+\frac{y^2}{(\ )^2}=1$$

com denominadores desiguais, ela representa uma elipse, e a questão de se saber se os focos e o eixo maior estão no eixo x ou no eixo y é resolvida comparando-se os denominadores: se o maior denominador for o de x^2, então o eixo maior e os focos estarão no eixo x, e vice-versa para o eixo y.

Na equação (8), x e y são os deslocamentos do ponto $p = (x,y)$ em relação aos eixos horizontal e vertical da elipse. Se o centro for o ponto (h,k) em vez da origem, então esses deslocamentos serão $x - h$ e $y - k$, e a equação da elipse torna-se

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1. \tag{12}$$

Exemplo 3 Mostre que $4x^2 + 16y^2 - 24x - 32y = 12$ é a equação de uma elipse e determine os vértices, focos, excentricidade e diretrizes. Esboce o gráfico.

Solução A equação pode ser escrita como

$$4(x^2-6x)+16(y^2-2y)=12.$$

Completando os quadrados dentro dos parênteses, obtemos

$$4(x-3)^2 + 16(y-1)^2 = 64$$

ou

$$\frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1.$$

Comparando-se este resultado com (12) vemos que este representa uma elipse com centro (3,1), eixo maior horizontal e semi-eixos $a = 4$, $b = 2$, e assim os vértices (Fig. 15.17) são os pontos (7,1) e (−1,1) e as extremidades do eixo menor são (3,3) e (3, − 1). Os focos estão a uma distância $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ à direita e à esquerda do centro e são, portanto, os pontos $(3 \pm 2\sqrt{3},\ 1)$. A excentricidade é $e = c/a = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, e as diretrizes são retas verticais a uma distância $a/e = 8/\sqrt{3} = \frac{8}{3}\sqrt{3}$ à direita e à esquerda do centro. Suas equações são $x = 3t\frac{8}{3}\sqrt{3}$.

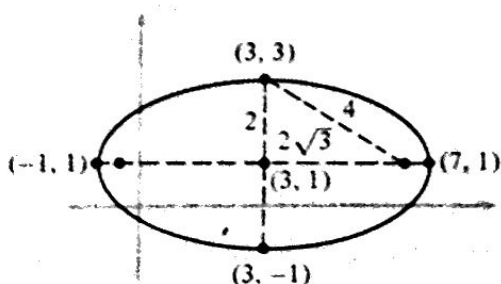



Figura 15.17

Observação 1 Como as parábolas, as elipses têm também uma propriedade de reflexão notável. Seja P um ponto sobre uma elipse com focos F e F' e seja T a tangente em P, (Fig. 15.18). Se T faz ângulos α e β com os dois raios focais PF e PF', então $\alpha = \beta$. Pede-se aos estudantes para provar esse fato no Problema 9.

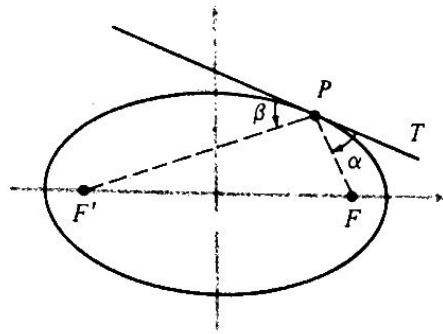



Figura 15.18

Essa propriedade de reflexão não tem aplicações importantes como as que vimos no caso das parábolas, mas há pelo menos uma conseqüência divertida. Seja a elipse da figura girada ao redor de seu eixo maior para formar uma superfície de revolução e imagine que é construído um quarto com suas paredes e teto tendo a forma da parte superior dessa superfície, com os dois focos mais ou menos na altura dos ombros. Então um sussurro emitido num foco pode ser claramente ouvido a uma distância considerável, no outro foco, mesmo que seja inaudível em pontos intermediários, pois as ondas sonoras batem nas paredes e são refletidas dirigindo-se ao segundo foco, e além de chegarem juntas, pois todas elas percorrem a mesma distância. Há realmente diversas salas dessa natureza – conhecidas como "galerias de sussurros" – em certos museus americanos de Ciência e nos castelos de alguns monarcas europeus excêntricos.

Observação 2 Exceto por pequenas perturbações resultantes da influência de outros planetas, cada planeta no sistema solar gira ao redor do Sol numa órbita elíptica tendo o Sol num dos focos. Como foi salientado na Seção 15.1, esse fenômeno foi descoberto empiricamente por Kepler no início do século XVII e explicado matematicamente por Newton nas últimas décadas do mesmo século. Daremos um tratamento detalhado das idéias de Newton no fim do Capítulo 17.

A maioria dos planetas, incluindo a Terra, tem órbitas aproximadamente circulares. Isto pode ser visto pelas excentricidades na tabela da Fig. 15.19

Mercúrio	0,21	Saturno	0,06
Vênus	0,01	Urano	0,05
Terra	0,02	Netuno	0,01
Marte	0,09	Plutão	0,25
Júpiter	0,05		

Figura 15.19 Excentricidades de órbitas dos planetas.

No entanto, Mercúrio tem uma órbita bem excêntrica, com $e = 0{,}21$, como ocorre com Plutão, com $e = 0{,}25$. Outros corpos do sistema solar têm órbitas mais excêntricas, por exemplo, as montanhas voadoras, conhecidas como asteróides. Assim, o asteróide Ícarus, com cerca de uma milha de diâmetro, descoberto com o telescópio de Monte Palomar em 1949, percorre uma órbita tão excêntrica, $e = 0{,}83$, que seu ponto de aproximação máxima do Sol está no interior da órbita de Mercúrio e seu ponto mais longínquo está além da órbita da Terra. (Fig. 15.20).

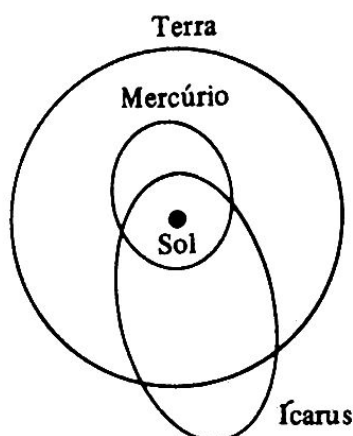



Figura 15.20

Um dos objetos mais interessantes do sistema solar é o cometa de Halley, cuja órbita têm excentricidade $e = 0{,}98$ e cerca de 7 unidades astronômicas de comprimento (Fig. 15.21). (Uma unidade astronômica (AU) é o semi-eixo maior da órbita da Terra, aproximadamente 150 milhões de quilômetros).

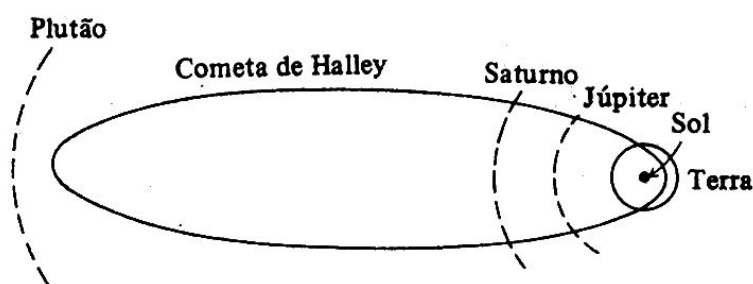



Figura 15.21 Órbita do cometa de Halley, desenhada aproximadamente em escala.

O período de revolução desse cometa ao redor do Sol é de cerca de 76 anos. Neste século, apareceu em 1910 e novamente em 1985-1986. Foi observado em 1682, e o astrônomo Edmund Halley (amigo de Newton) previu, com sucesso, seu retorno em 1758, muitos anos após sua morte, em 1742. Este foi um dos êxitos mais convincentes da Teoria da Gravitação de Newton. Em sua aproximação máxima, o cometa de Halley está a apenas 0,59 AU do Sol. Suas visitas anteriores às proximidades do Sol foram assinaladas por meio de registros históricos, tendo-se chegado a anotações feitas no ano 11 a.C.

Problemas

1. Determine a equação da elipse:

   (a) com focos em $(\pm 2,0)$ e eixo maior de comprimento 10;

   (b) com focos em $(0,\pm 4)$ e eixo menor de comprimento 12;

   (c) com eixos maior e menor de comprimentos 4 e 3, respectivamente, centro na origem e focos no eixo y;

   (d) com focos em $(\pm 3,0)$ e excentricidade $e = 3/4$;

   (e) com excentricidade $e = 1/2$, centro na origem e as extremidades do eixo maior em $(0, \pm 6)$,

   (f) com excentricidade $e = 1/5$ e as extremidades do eixo menor em $0, \pm 10)$.

2. Determine a equação da elipse:

   (a) com vértices $(6,2)$, $(-4,2)$ e eixo menor de comprimento 6;

   (b) com eixo maior 8 e focos em $(6,3)$ e $(2,3)$;

   (c) com eixo menor 6 e focos em $(1,0)$ e $(1,6)$;

   (d) com excentricidade $e = 3/4$ e extremidades do eixo maior em $(10,1)$ é $(-6,1)$.

3. Determine o centro, os vértices, os focos e a excentricidade de cada uma das seguintes elipses:

   (a) $25x^2 + 9y^2 = 225$;
   (b) $x^2 + 4y^2 = 4$;
   (c) $2(x+2)^2 + (y-1)^2 = 2$;
   (d) $x^2 + 4y^2 - 2x = 0$;
   (e) $4x^2 + 9y^2 - 16x + 18y = 11$;
   (f) $x^2 + 2y^2 - 8y = 0$.

4. Considere uma equação da forma

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0,$$

onde A e B são ambos positivos ou ambos negativos e $A \neq B$. Mostre que o gráfico é uma elipse, um único ponto ou o conjunto vazio.

5. Escreva as integrais que dão:

   (a) a área no primeiro quadrante do interior da circunferência $x^2 + y^2 = a^2$;

   (b) a área no primeiro quadrante do interior da elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$. Mostre que a segunda integral é b/a vezes a primeira e, dessa maneira, obtenha a área da elipse pela conhecida área do círculo.

6. Se um copo cilíndrico, com um pouco de água, é inclinado um pouco, como na Fig. 15-22, então a superfície da água não é mais uma circunferência, mas parece uma elipse. Prove que é realmente uma elipse modificando o argumento utilizado na Fig. 15.4.

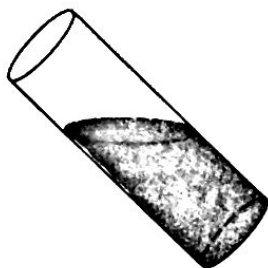



Figura 15.22

7. Calcule o volume do sólido de revolução obtido girando a elipse $x_2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ ao redor do

   (a) eixo x;

   (b) eixo y.

   Se $a > b$, o primeiro sólido chama-se *esferóide alongado* e o segundo, *esferóide achatado.*

8. A base de um sólido é a região limitada por uma elipse com semi-eixos 5 e 3. Calcule o volume do sólido se cada seção transversal por um plano perpendicular ao eixo maior é

   (a) um quadrado;

   (b) um triângulo eqüilátero.

9. Prove que $\alpha = \beta$ na Fig. 15.18. Sugestão: prolongue FP e $F'P$ por P e mostre que $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta$ utilizando a fórmula da subtração para a tangente.

10. Considere duas elipses com a mesma excentricidade e, ambas centradas na origem e ambas com eixo maior no eixo x. Suponha que suas equações sejam

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1 \quad \text{e} \quad \frac{x^2}{a_2^2} + \frac{y^2}{b_2^2} = 1.$$

Mostre que essas elipses são semelhantes no sentido de que

(a) existe uma constante k tal que

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = k;$$

(b) se uma semi-reta pela origem O intercepta a primeira elipse em P_1 e a segunda em P_2, então

$$\frac{OP_1}{OP_2} = k.$$

11. Mostre que a reta tangente à elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ num ponto $P_1 = (x_1, y_1)$ tem equação

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1.$$

12. Se retas tangentes à elipse $x^2/25 + y^2/16 = 1$ interceptam o eixo y em $(0,8)$, determine os pontos de tangência.

13. Se retas tangentes à elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ interceptam o eixo y em $(0,d)$, onde $d > b$, determine os pontos de tangência.

14. Seja F um ponto interno a um dado círculo, diferente do centro C. Considere um ponto P que se move de modo a se manter eqüidistante de F e da circunferência. Mostre que o percurso de P é uma elipse.

15. Mostre que o ponto de uma elipse que está mais próximo de um foco é a extremidade do eixo maior mais próxima desse foco e também que o ponto da elipse mais afastado desse foco é a outra extremidade do eixo maior.

16. O *apogeu* de um satélite terrestre é sua altura máxima acima da superfície da Terra em sua órbita, e o *perigeu* é sua altura mínima no percurso da órbita*. Se R é o raio da Terra, utilize o Problema 15 para mostrar que se um satélite tem uma órbita elíptica em torno da Terra com o centro da Terra em um dos focos e semi-eixo maior a, então

$$2a = 2R + \text{apogeu} + \text{perigeu}.$$

* Essas palavras são também utilizadas para designar os pontos correspondentes da órbita.

17. O ponto mais próximo do Sol da órbita de um planeta chama-se *periélio*, e o ponto mais afastado do Sol chama-se *afélio*. Sendo a razão entre a distância da Terra ao Sol no periélio e sua distância no afélio $\frac{29}{30}$, calcule a excentricidade da órbita da Terra.

18. Um segmento de reta move-se com uma extremidade A no eixo y e a outra extremidade B no eixo x. Um ponto P fixado no segmento está a a unidades de A e b unidades de B. Determine a equação da trajetória de P.

19. (a) Mostre que o comprimento da parte da elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ $(a > b)$ que está no primeiro quadrante é

$$\int_0^a \sqrt{\frac{a^2 - e^2x^2}{a^2 - x^2}}\, dx.$$

(b) Utilize a mudança da variável $x = a\,\text{sen}\,\theta$ para transformar a integral de (a) em

$$a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2\,\text{sen}^2\,\theta}\, d\theta.$$

Essa integral chama-se *integral elíptica completa de segunda espécie* e não pode ser calculada por meio de funções elementares.

20. Seja P um ponto da elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, que não está em nenhum eixo. Se $a > b$, mostre, sem utilizar cálculo, que a distância de P à origem é maior que b e menor que a.

21. Há exatamente duas retas com declividade dada m que são tangentes à elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$. Determine suas equações.

22. Considere duas circunferências centradas na origem com raios a e b, onde $b < a$. Trace uma reta pela origem que intercepta a circunferência menor em Q e a circunferência maior em R. Se a reta horizontal por P e a reta vertical por R se interceptam em $P = (x,y)$, mostre que P está na elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$. Sugestão: chamando as coordenadas de Q e R, respectivamente (q,y) e (x,r), utilize o fato de que Q e R pertencem a uma reta que passa pela origem.

15.4 HIPÉRBOLES

As idéias da Seção 15.1 permitem-nos definir uma *hipérbole* como o lugar geométrico de um ponto P que se move de modo a manter constante a diferença de suas distâncias a dois pontos fixos F e F' (chamados *focos*). Denotando essa constante por $2a$, com $a > 0$, veremos que o lugar geométrico é formado por dois *ramos*, (Fig. 15.23), onde o ramo direito é o lugar geométrico descrito pela equação $PF' - PF = 2a$ e o ramo esquerdo é o lugar geométrico descrito pela equação $PF - PF' = 2a$. *A condição* que define a hipérbole completa pode então ser escrita

$$PF' - PF = \pm 2a. \tag{1}$$

Para determinar uma equação simples da hipérbole, tomamos o eixo x ao longo do segmento FF' e o eixo y como mediatriz desse segmento. Se $2c$ denota a distância entre F e F', então $F = (c,0)$ e $F' = (-c,0)$ (Fig. 15.23), e (1) torna-se

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = \pm 2a.$$

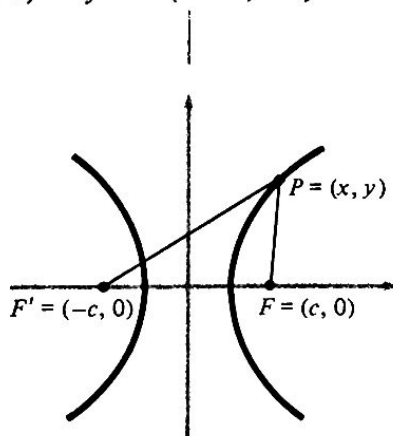



Figura 15.23

Passando o segundo radical para o segundo membro, elevando ao quadrado e simplificando, obtemos as fórmulas do raio focal

$$PF = \sqrt{(x-c)^2+y^2} = \pm\left(\frac{c}{a}x - a\right) \tag{2}$$

e

$$PF' = \sqrt{(x+c)^2+y^2} = \pm\left(\frac{c}{a}x + a\right), \tag{3}$$

onde (3) é obtida a partir de (2), pois $PF' = \pm 2a + PF$. Como em (1), o sinal positivo corresponde ao ramo direito da curva e o sinal negativo ao ramo esquerdo. Elevando ao quadrado e simplificando qualquer uma dessas equações teremos

$$\left(\frac{c^2-a^2}{a^2}\right)x^2 - y^2 = c^2 - a^2$$

ou

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1. \tag{4}$$

Para simplificar ainda mais essa equação, começamos observando que no triângulo $PF'F$, com P no ramo direito, temos $PF' < PF + FF'$, pois um lado do triângulo é menor que a soma dos outros dois lados. Portanto, $PF' - PF < FF'$ ou $2a < 2c$, e assim $a < c$ e $c^2 - a^2$ é um número positivo que denotaremos por b^2,

$$b^2 = c^2 - a^2. \tag{5}$$

Substituindo-se (5) em (4) teremos finalmente

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{6}$$

que é a forma reduzida da equação da hipérbole da Fig. 15.23.

Faremos agora uma consideração cuidadosa sobre a equação (6) e sobre a luz que lança sobre a natureza da hipérbole que ela representa. Nossa discussão revelará vários aspectos adicionais dessa curva que não são óbvios a partir da definição e que estão indicados com maiores detalhes na Fig. 15.24.

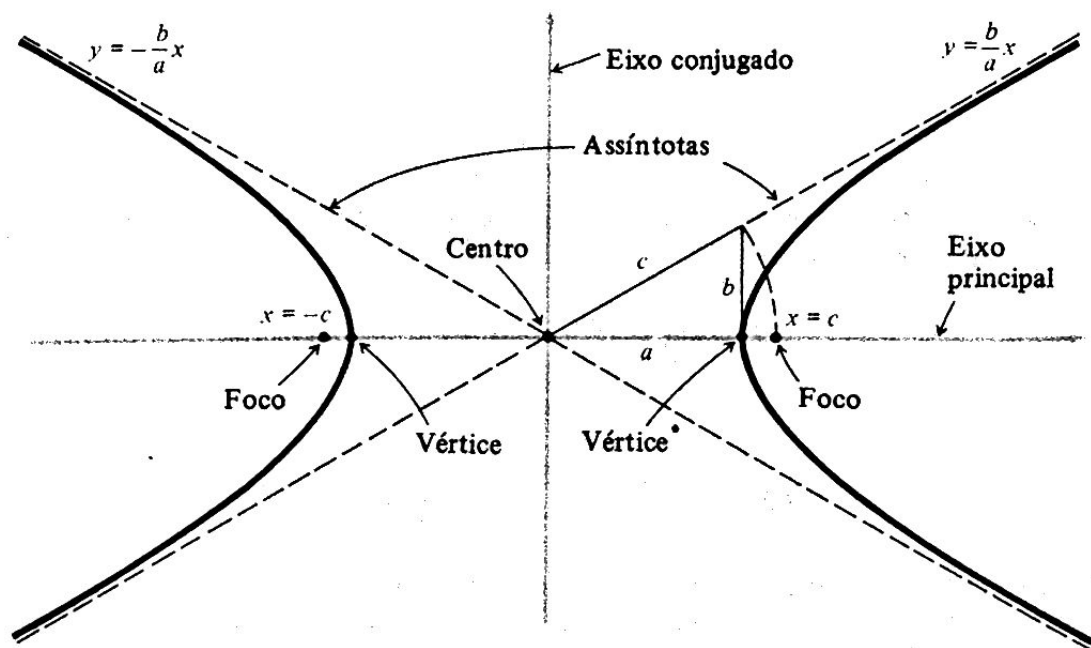



Figura 15.24 Aspectos de uma hipérbole.

Como a equação contém somente potências pares de x e y, a hipérbole é simétrica em relação aos dois eixos coordenados. Eles são, portanto, chamados *eixos* da curva, e sua interseção chama-se *centro* da hipérbole. A simetria esquerda-direita, acima-abaixo é talvez a único aspecto da hipérbole fácil de constatar diretamente a partir da definição.

Quando $y = 0$, obtemos da equação $x = \pm a$, mas quando $x = 0$, y é imaginário. Portanto, o eixo que passa pelos focos, chamado *eixo principal*, intercepta a curva em dois pontos chamados *vértices*, localizados a uma distância a de cada lado do centro; mas o outro eixo, chamado *eixo conjugado*, não intercepta a curva em nenhum ponto. A hipérbole é assim formada por duas partes separadas, seus *ramos* simétricos, em lados opostos do eixo conjugado.

Esses fatos são mais fáceis de ser observados a partir da equação (6) resolvendo-a para y,

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}. \tag{7}$$

Esta fórmula mostra que não há pontos do gráfico na faixa vertical $-a < x < a$, pois para esses x a expressão sob o radical é negativa. Para $x \pm a$, de (7) temos $y = 0$; esses dois pontos são os vértices. Quando x cresce a partir de a ou decresce a partir de $-a$, obtemos dois valores de sinais opostos, de y, crescentes em valor absoluto, à medida que x se afasta à direita de a ou à esquerda de $-a$; esse comportamento produz os braços superior e inferior em cada ramo da curva.

Um aspecto bastante significativo do gráfico pode ser observado escrevendo (7) na forma

$$y = \pm \frac{b}{a} x \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}. \tag{8}$$

Quando x é grande em módulo, a expressão sob o radical em (8) é próxima de 1 e, por essa razão, parece que a hipérbole está muito próxima do par de retas

$$y = \pm \frac{b}{a} x. \tag{9}$$

Podemos verificar essa conjectura da seguinte maneira. No primeiro quadrante, se x é grande, então a distância vertical da hipérbole à reta correspondente é

$$\frac{b}{a} x - \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} = \frac{b}{a} (x - \sqrt{x^2 - a^2}) = \frac{b}{a} \frac{(x - \sqrt{x^2 - a^2})(x + \sqrt{x^2 - a^2})}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}.$$

Essa expressão certamente tende a zero quando $x \to \infty$. As retas (9) são chamadas de *assíntotas* da hipérbole. As assíntotas são um bom orientador para esboçarmos uma hipérbole cuja equação seja dada: simplesmente assinalamos os vértices, traçamos as assíntotas e desenhamos os dois ramos da curva de modo adequado, na forma sugerida pela figura.

O triângulo mostrado no primeiro quadrante da Fig. 15.24 é um artifício mnemônico conveniente para lembrar os principais aspectos geométricos de uma hipérbole. Sua base a é a distância que vai do centro ao vértice à direita; sua altura b é o segmento vertical que une esse vértice à assíntota do primeiro quadrante, cujo coeficiente angular é b/a; e, como de (5)

$$c^2 = a^2 + b^2,$$

a hipotenusa c desse triângulo é também a distância do centro a um foco.

A razão c/a chama-se *excentricidade* da hipérbole e é denotada por e:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}.$$

É claro que $e > 1$. Quando e é próximo de 1, b é pequeno comparado com a, e a hipérbole se localiza em um ângulo pequeno formado pelas assíntotas. Quando e é grande, então b é grande comparado com a, o ângulo entre as assíntotas é grande e a hipérbole é bastante achatada nos vértices.

Para compreender o significado da excentridade, consideramos novamente as fórmulas (2) e (3) dos raios focais direito e esquerdo PF e PF'. Essas fórmulas podem ser escritas

$$PF = \pm(ex - a) = \pm e\left[x - \frac{a}{e}\right] \tag{10}$$

e

$$PF' = \pm(ex + a) = \pm e\left(x + \frac{a}{e}\right) = \pm e\left[x - \left(-\frac{a}{e}\right)\right], \tag{11}$$

onde os sinais positivos se referem ao ramo direito da curva (veja a Fig. 15.25) e os sinais negativos ao ramo esquerdo. Se P está no ramo direito, como na figura, então as quantidades entre colchetes podem ser interpretadas como as distâncias PD e PD' de P às retas $x = a/e$ e $x = -a/e$, respectivamente. A mesma afirmação é verdadeira se P estiver no ramo esquerdo, considerando-se o efeito dos sinais negativos. Portanto, em todos os casos, as fórmulas (10) e (11) podem ser escritas na forma

$$\frac{PF}{PD} = e \quad \text{e} \quad \frac{PF'}{PD'} = e. \tag{12}$$

Cada uma das retas $x = a/e$ e $x = -a/e$ se chama *diretriz* da hipérbole.

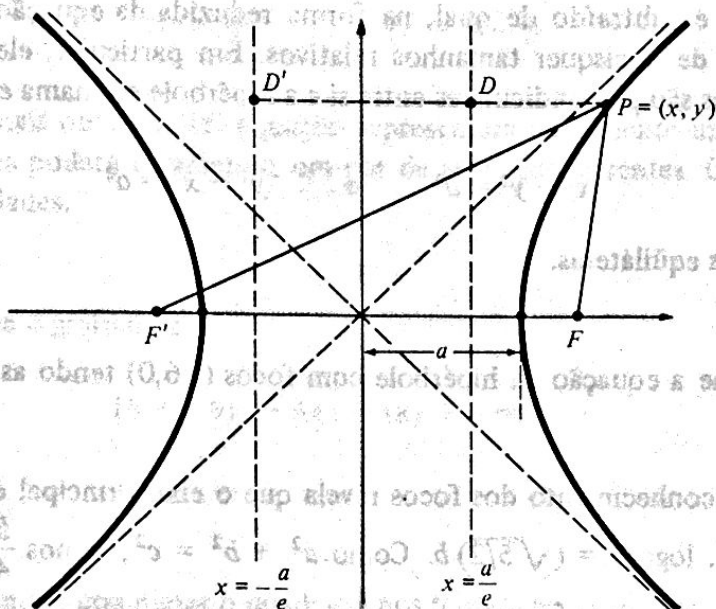



Figura 15.25

As equações (12) mostram que *uma hipérbole pode ser caracterizada como o lugar geométrico de um ponto que se move de modo a manter constante e > 1 entre sua distância a um ponto fixo (um foco) e sua distância a uma reta fixa (a correspondente diretriz).* Exatamente como no caso das elipses, essa maneira de caracterizar hipérboles será necessária em nosso trabalho futuro.

Invertendo os papéis de x e y na discussão precedente, vemos que a equação

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \tag{13}$$

representa uma hipérbole com eixo principal vertical, vértices em $(0, \pm a)$ e focos em $(0, \pm c)$, onde $c^2 = a^2 + b^2$. Dessa vez as assíntotas são as retas

$$y = \pm\frac{a}{b}x,$$

como vemos facilmente escrevendo (13) em forma resolvida para y:

$$y = \pm\frac{a}{b}\sqrt{x^2 + b^2} = \pm\frac{a}{b}x\sqrt{1 + \frac{b^2}{x^2}}.$$

Observe que o eixo que contém os focos de uma hipérbole não é estabelecido pelo conhecimento dos tamanhos relativos de a e b, como ocorria no caso de uma elipse, mas sim pelo conhecimento de qual termo é subtraído de qual, na forma reduzida da equação. Os números a e b podem, portanto, ser de quaisquer tamanhos relativos. Em particular, eles podem ser iguais, e nesse caso as assíntotas são perpendiculares entre si e a hipérbole se chama *eqüilátera*. As equações

$$x^2 - y^2 = a^2 \qquad \text{e} \qquad y^2 - x^2 = a^2$$

representam hipérboles eqüiláteras.

Exemplo 1 Determine a equação da hipérbole com focos $(\pm 6,0)$ tendo as retas $5y = \pm 2\sqrt{5}\,x$ como assíntotas.

Solução Primeiro, o conhecimento dos focos revela que o eixo principal é o eixo x. Vemos que $c = 6$ e $b/a = \frac{2}{5}\sqrt{5}$, logo $a = (\sqrt{5/2})\,b$. Como $a^2 + b^2 = c^2$, temos $\frac{5}{4}b^2 + b^2 = 36$, logo $b^2 = \frac{4}{9} \cdot 36 = 16$ e $a^2 = \frac{5}{4}b^2 = \frac{5}{4} \cdot 16 = 20$. Assim,

$$\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{16} = 1$$

é a equação da hipérbole.

Exemplo 2 Determine o eixo principal da hipérbole $6y^2 - 9x^2 = 36$ bem como os vértices, focos e assíntotas.

Solução A equação pode ser posta na forma reduzida

$$\frac{y^2}{6} - \frac{x^2}{4} = 1,$$

logo o eixo principal é o eixo y, $a^2 = 6$, $b^2 = 4$ e $c^2 = a^2 + b^2 = 10$. Portanto, os vértices são $(0, \pm\sqrt{6})$, os focos são $(0, \pm\sqrt{10})$ e as assíntotas são $y = \pm(\sqrt{6/2})\,x$.

Exatamente como no caso da elipse, podemos escrever facilmente a equação de uma hipérbole com centro (h,k) e eixo principal paralelo a um dos eixos coordenados. A equação é

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \qquad \text{ou} \qquad \frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1,$$

conforme o eixo principal seja horizontal ou vertical. Isto sugere que consideremos equações da forma

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0,$$

onde A e B têm sinais opostos. Tal equação representará usualmente uma hipérbole, mas em certos casos particulares poderá representar um par de retas concorrentes. Os exemplos seguintes ilustram essas possibilidades.

Exemplo 3 Identifique o gráfico de

$$16x^2 - 9y^2 - 64x - 18y + E = 0$$

para vários valores de E.

Solução O procedimento é completar o quadrado nos termos em x e em y:

$$16(x^2 - 4x) - 9(y^2 + 2y) = -E$$

e

$$16(x - 2)^2 - 9(y + 1)^2 = 55 - E.$$

Agora podem ocorrer três casos.

CASO 1 $55 - E > 0$; por exemplo, $E = -89$, de modo que $55 - E = 144$. Nesse caso, temos

$$\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y+1)^2}{16} = 1,$$

que é uma hipérbole com centro $(2,-1)$ e eixo principal horizontal.

CASO 2 $55 - E < 0$; por exemplo, $E = 199$, de modo que $55 - E = -144$. Aqui temos

$$\frac{(y+1)^2}{16} - \frac{(x-2)^2}{9} = 1,$$

que é uma hipérbole com centro $(2,-1)$ e eixo principal vertical.

CASO 3 $55 - E = 0$; $E = 55$. Dessa vez nossa equação fica

$$16(x - 2)^2 - 9(y + 1)^2 = 0$$

ou

$$4(x-2) = \pm 3(y+1).$$

Essa equação representa as duas retas

$$y+1 = \pm \tfrac{4}{3}(x-2),$$

que são as assíntotas dos dois primeiros casos.

Observação 1 As hipérboles têm a seguinte propriedade de reflexão: a reta tangente em qualquer ponto P sobre uma hipérbole é a bissetriz do ângulo formado pelos raios focais PF e PF'. Isto significa que $\alpha = \beta$ (Fig. 15.26) (veja o Problema 21). Como conseqüência disto, se a hipérbole for girada ao redor de seu eixo principal para formar uma superfície de revolução e se os lados convexos de cada parte forem prateados de modo a formar superfícies refletoras, teremos que todo raio de luz que se aproxima de um lado convexo por uma trajetória reta que passa pelo foco (Fig. 15.26, à direita) é refletido em direção ao outro foco.

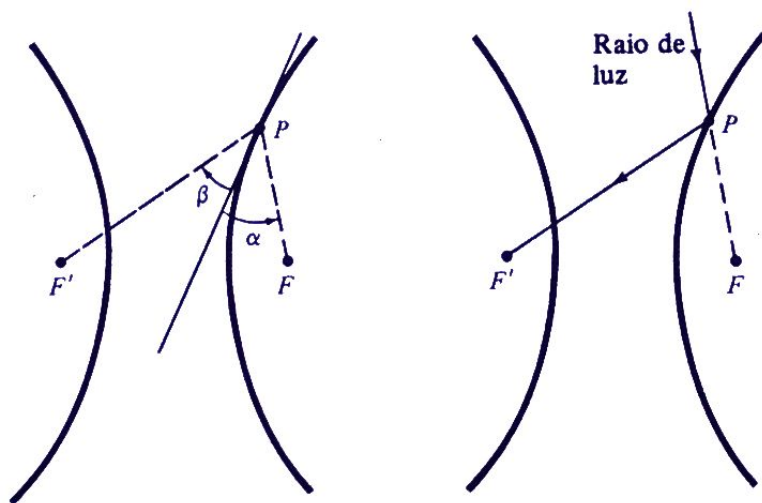



Figura 15.26 A propriedade de reflexão

Essa propriedade das hipérboles é o princípio essencial no projeto de telescópios refletores do tipo Cassegrain (Fig. 15.27). Como mostra a figura, um foco do espelho hiperbólico está no foco do espelho parabólico e o outro está no vértice do espelho parabólico, onde uma ocular ou câmara está localizada. Raios paralelos débeis de luz estelar são portanto refletidos pelo espelho parabólico em direção a seu foco, depois são interceptados pelo espelho hiperbólico e refletidos de volta em direção à ocular ou câmera.

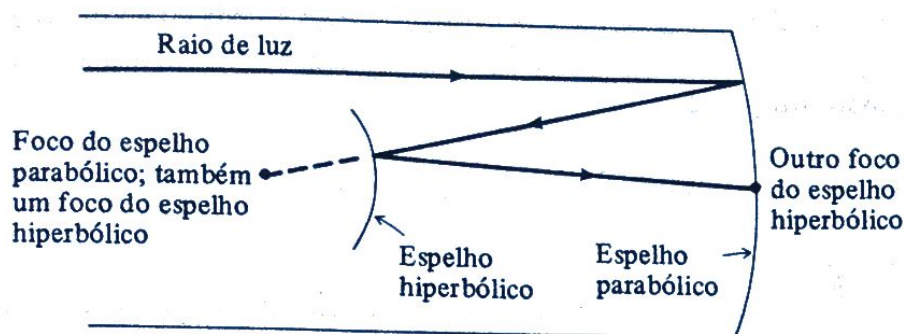



Figura 15.27 Projeto do telescópio de Cassegrain.

Observação 2 Há duas espécies de cometa. Alguns são membros permanentes do sistema solar, como o cometa de Halley, descrito na Seção 15.3, e viajam eternamente ao redor do Sol em órbitas elípticas com o Sol num dos focos. Outros que têm órbitas hiperbólicas com o Sol num foco, entram no sistema solar com velocidades altas provindos do espaço exterior, volteiam ao redor do Sol, e depois voltam para o espaço novamente. O fator crucial é a energia total E do próprio cometa, que é a soma da energia cinética (devida a seu movimento) com a energia potencial (devida à atração gravitacional do Sol). Verifica-se que se $E < 0$, a órbita é uma elipse, e se $E > 0$, a órbita é uma hipérbole. (O caso $E = 0$ corresponde a uma órbita parabólica, mas que é consideravelmente improvável.)

Problemas

Nos Problemas de 1 a 8, esboce o gráfico da hipérbole dada e determine os vértices, focos, assíntotas, excentricidade e diretrizes.

1. $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 1.$
2. $\dfrac{y^2}{36} - \dfrac{x^2}{16} = 1.$
3. $\dfrac{y^2}{4} - \dfrac{x^2}{9} = 1.$
4. $\dfrac{x^2}{25} - \dfrac{y^2}{16} = 1.$
5. $4y^2 - x^2 = 16.$
6. $x^2 - 3y^2 = 12.$
7. $y^2 - x^2 = 1.$
8. $x^2 - 9y^2 = 1.$

Nos Problemas 9 a 16, determine a equação da hipérbole definida pelas condições dadas.

9. Focos $(0, \pm 5)$, vértice $(0,3)$.

10. Vértices $(\pm 3{,}0)$, foco $(5{,}0)$.

11. Vértices $(\pm 3{,}0)$, assíntota $y = 2x$.

12. Focos $(-1{,}8)$ e $(-1{,}-2)$, vértice $(-1{,}7)$.

13. Focos $(\pm 8{,}0)$, $e = \frac{4}{3}$

14. Vértices $(0, \pm 5)$, $e = 2$.

15. Vértices $(\pm 6{,}0)$, diretriz $x = 4$.

16. Focos $(1{,}1)$ e $(-1, -1)$, diferença de raios focais ± 2.

Nos Problemas de 17 a 20, identifique o gráfico da equação dada como na discussão do Exemplo 3.

17. $16x^2 - 3y^2 - 32x - 12y - 44 = 0$.
18. $9y^2 - 7x^2 + 72y - 70x - 94 = 0$.
19. $36x^2 - 25y^2 + 144x - 50y + 119 = 0$.
20. $11y^2 - 12x^2 + 88y + 72x + 300 = 0$.

21. Mostre que $\alpha = \beta$ na Fig. 15.26.

22. Seja F um ponto exterior a um dado círculo. Considere um ponto P que se move de modo que se mantenha eqüidistante de F e do círculo. Mostre que a trajetória de P é um ramo de hipérbole.

23. Suponha que uma elipse e uma hipérbole sejam *confocais*, isto é, tenham os mesmos focos F e F'. Utilize as propriedades de reflexão das duas curvas para dar uma prova puramente geométrica de que elas são perpendiculares entre si nos pontos de interseção.

24. (a) Mostre que

$$\frac{x^2}{25-k} + \frac{y^2}{16-k} = 1$$

representa uma elipse se $k < 16$ e uma hipérbole se $16 < k < 25$ e que todas essas curvas são confocais.

(b) Determine o ponto no primeiro quadrante de interseção das curvas dadas para $k = 0$ e $k = 20$ e determine a reta tangente a cada curva nesse ponto.

(c) Mostre que as retas tangentes de que trata a parte (b) são perpendiculares entre si, mostrando que o produto de seus coeficientes angulares é -1.

25. Considere duas hipérboles com a mesma excentricidade e, ambas centradas na origem e ambas com eixos principais no eixo x. Suponha que suas equações sejam

$$\frac{x^2}{a_1^2} - \frac{y^2}{b_1^2} = 1 \qquad \text{e} \qquad \frac{x^2}{a_2^2} - \frac{y^2}{b_2^2} = 1.$$

Mostre que essas hipérboles são semelhantes no sentido de que

(a) existe uma constante k tal que

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = k;$$

(b) se uma semi-reta com origem O intercepta a primeira parábola em P_1 e a segunda em P_2, então

$$\frac{OP_1}{OP_2} = k.$$

26. Determine o lugar geométrico dos centros de todas as circunferências tangentes ao eixo y e que cortam um segmento de comprimento $2a$ no eixo x.

27. Sejam F e F' dois pontos de uma folha de papel cuja distância recíproca é $2c$. Tome um pedaço de fio e amarre nele um nó K de modo que a diferença entre o comprimento das duas partes em que K divide o fio seja $2a$, onde $0 < a < c$. Amarre as extremidades do fio em duas tachas colocadas em F e F' e enrole o fio ao redor da ponta de um lápis (Fig. 15.28). Se o fio é mantido tenso e o nó K é cuidadosamente puxado, mostre que o lápis em P desenha um ramo de hipérbole.

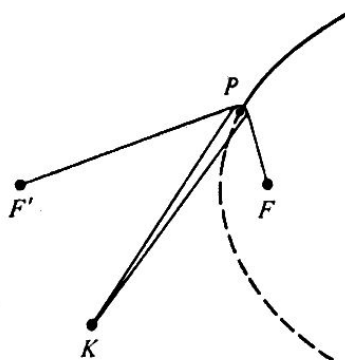



Figura 15.28

28. Se duas hipérboles $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ e $y^2/A^2 - x^2/B^2 = 1$ têm as mesmas assíntotas, mostre que suas excentricidades e e E são relacionadas pela equação

$$\frac{1}{e^2} + \frac{1}{E^2} = 1.$$

29. Mostre que a reta tangente à hipérbole $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ no ponto $P_1 = (x_1, y_1)$ é

$$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1.$$

30. Se retas tangentes à hipérbole $x^2/25 - y^2/16 = 1$ interceptam o eixo y em $(0,8)$, determine os pontos de tangência.

31. Se retas tangentes à hipérbole $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ interceptam o eixo y em $(0,d)$, determine os pontos de tangência.

32. Uma reta que passa por um ponto P de uma hipérbole e é paralela à assíntota mais próxima intercepta a diretriz mais próxima em Q. Se F é o foco correspondente, mostre que $PQ = PF$.

15.5 DEFINIÇÕES USANDO FOCO, DIRETRIZ E EXCENTRICIDADE

Os estudantes já viram que há diversas maneiras distintas mas equivalentes de definir as seções cônicas, cada uma com seus próprios méritos. Começamos com a definição partindo de um dado cone e um plano secante ao cone mais ou menos inclinado, produzindo nossos três tipos de curvas, conforme o grau de inclinação. Essa abordagem tridimensional é vívida e geométrica, e fornece uma impressão visual clara da forma das curvas. Entretanto, com o objetivo de obter equações cartesianas a serem utilizadas em estudos quantitativos exatos, precisamos de caracterizações bidimensionais, e para este fim são adequadas as propriedades focais discutidas no final da Seção 15.1. Os conceitos de excentricidade e de diretriz emergiram no decorrer de nosso detalhado trabalho sobre elipses e hipérboles e vimos que a cada uma dessas curvas pode ser dada também uma outra caracterização bidimensional por meio de um foco, uma diretriz

e uma excentricidade. Nosso propósito nesta breve seção é mostrar que todas as três seções cônicas – parábolas, elipses e hipérboles – admitem, dessa forma, definições unificadas que dependem diretamente de nossa concepção original dessas curvas como seções de um cone*.

Nossa discussão é baseada na Fig. 15.29, que mostra um cone com ângulo α no vértice e um plano secante com ângulo de inclinação β. Esse ângulo de inclinação pode ser definido como o ângulo entre o eixo do cone e uma reta normal ao plano, mas ele desempenha seu papel principal em nosso argumento quando considerado como o ângulo agudo indicado no triângulo retângulo *PQD*.

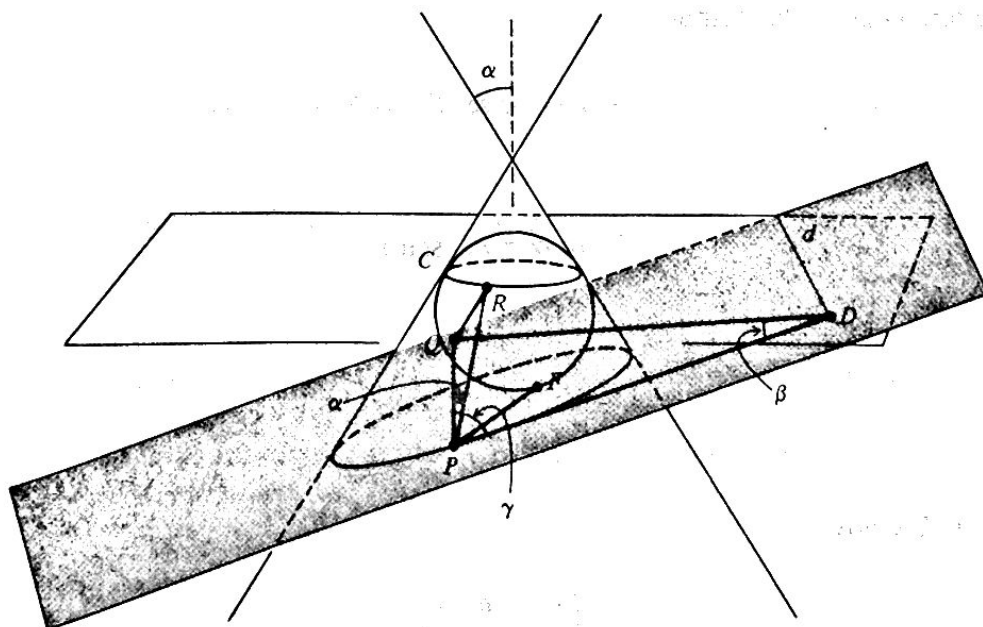



Figura 15.29

A figura é desenhada para ilustrar o caso de uma elipse, mas o argumento é válido para as outras cônicas também.

Comecemos do início. Suponhamos que seja inscrita no cone uma esfera tangente ao plano secante num ponto F e tangente ao cone ao longo de uma circunferência C. Se d é a reta em que o plano secante intercepta o plano da circunferência C, provaremos que a seção cônica tem em F seu foco e em d sua diretriz; os fatos relativos à excentricidade emergirão no decorrer de nossa discussão.

* Por motivos que logo ficarão claros, as circunferências devem ser excluídas dessa discussão, pois as construções geométricas necessárias não são possíveis quando o plano secante é perpendicular ao eixo do cone.

Seja P um ponto da seção cônica; seja Q o ponto em que a paralela por P ao eixo do cone intercepta o plano de C; seja R o ponto em que a geratriz por P intercepta C; e seja D o pé da perpendicular de P à reta d. Então PR e PF são dois segmentos tangentes à esfera a partir do mesmo ponto P e, portanto, têm o mesmo comprimento:

$$PR = PF. \tag{1}$$

Também, do triângulo retângulo PQR temos

$$PQ = PR \cos \alpha;$$

e do triângulo retângulo PQD temos

$$PQ = PD \operatorname{sen} \beta.$$

Assim

$$PR \cos \alpha = PD \operatorname{sen} \beta,$$

logo

$$\frac{PR}{PD} = \frac{\operatorname{sen} \beta}{\cos \alpha}.$$

Em vista de (1) obtemos

$$\frac{PF}{PD} = \frac{\operatorname{sen} \beta}{\cos \alpha}.$$

Essa expressão pode ser escrita na forma um pouco mais adequada

$$\frac{PF}{PD} = \frac{\cos \gamma}{\cos \alpha}, \tag{2}$$

onde γ é o outro ângulo agudo no triângulo retângulo PQD. Se agora definimos a excentricidade e por

$$e = \frac{\cos \gamma}{\cos \alpha},$$

então esse número é constante para um dado cone e um dado plano secante e (2) será

$$\frac{PF}{PD} = e \begin{cases} < 1 & \text{para uma elipse} \\ = 1 & \text{para uma parábola} \\ > 1 & \text{para uma hipérbole,} \end{cases}$$

onde as afirmações à direita são facilmente verificadas inspecionando a figura. Assim, para uma parábola, vemos que PD é paralelo a uma geratriz do cone, logo $\gamma = \alpha$ e $e = 1$; para uma elipse, temos $\gamma > \alpha'$ logo $\cos \gamma < \cos \alpha$ e $e < 1$; e para uma hipérbole temos $\gamma < \alpha$, logo $\cos \gamma > \cos \alpha$ e $e > 1$.

As palavras "parábola", "elipse" e "hipérbole" provêm de três palavras gregas significando "uma comparação", "uma falta" e "um excesso", referindo-se ao fato de que para as correspondentes curvas temos $e = 1, e < 1$ e $e > 1$.

15.6 (OPCIONAL) EQUAÇÕES DE SEGUNDO GRAU. ROTAÇÃO DE EIXOS

A equação geral do segundo grau em x e y é

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \tag{1}$$

onde pelo menos um dos coeficientes A, B, C é diferente de zero. O último requisito, naturalmente, garante que o grau da equação é realmente 2. Nas seções anteriores vimos que circunferências, parábolas, elipses e hipérboles são todas curvas cujas equações são casos particulares de (1). Assim, por exemplo, a circunferência

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

pode ser obtida a partir de (1) tomando

$$A = C = 1, \quad B = 0, \quad D = -2h, \quad E = -2k,$$
$$F = h^2 + k^2 - r^2,$$

e a parábola

$$x^2 = 4py$$

tomando

$$A = 1, \quad E = -4p, \quad B = C = D = F = 0.$$

Além das seções cônicas aqui mencionadas, temos notado também vários "casos excepcionais", que podem aparecer como gráficos de (1) por escolhas especiais dos coeficientes. Assim o gráfico de

$$x^2 + y^2 = 0$$

é um ponto, e o gráfico de

$$x^2 + y^2 + 1 = 0$$

é o conjunto vazio. Além disso, o gráfico de

$$x^2 = 0$$

é uma única reta, isto é, o eixo y, e o gráfico de $x^2 - y^2 = 0$ ou, equivalentemente, $(x + y)(x - y) = 0$ é um par de retas, ou seja, $x + y = 0$ e $x - y = 0$. Nosso objetivo nesta seção é investigar o alcance total de possibilidade das curvas representadas por (1). Resumidamente, veremos que os oito gráficos que acabamos de listar esgotam todas as possibilidades:

O gráfico de qualquer equação do segundo grau da forma (1) é uma circunferência, uma parábola, uma elipse, uma hipérbole, um ponto, o conjunto vazio, uma única reta ou um par de retas.

O principal problema que enfrentamos é colocado pelo chamado termo "misto" Bxy em (1), pois quando esse termo está presente não temos idéia de como identificar o gráfico. Tais termos não apareceram em nosso trabalho anterior sobre as seções cônicas. A razão disto é que em todos os casos escolhemos cuidadosamente os eixos coordenados numa posição simples e natural, de modo que pelo menos um dos eixos fosse paralelo a um eixo de simetria da curva em consideração. A fim de ver o que pode acontecer quando uma curva é colocada numa posição inclinada relativamente aos eixos, vamos determinar a equação da hipérbole (veja a Fig. 15.30) com focos $F = (2,2)$ e $F' = (-2,-2)$, onde $PF' - PF = \pm 4$. Temos

$$\sqrt{(x + 2)^2 + (y + 2)^2} - \sqrt{(x - 2)^2 + (y - 2)^2} = \pm 4,$$

e quando passamos o segundo radical para o 2º membro, elevamos ao quadrado, isolamos o radical que ainda resta e elevamos ao quadrado novamente, reduzimos a equação a

$$xy = 2. \qquad (2)$$

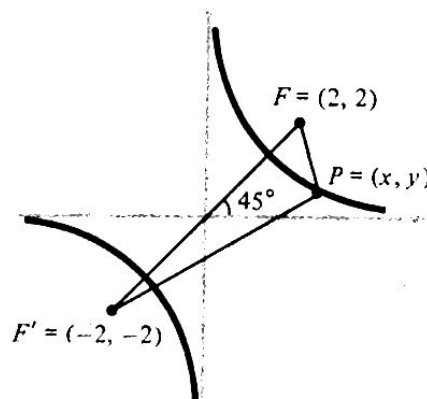



Figura 15.30

Esta é realmente uma equação simples, que no entanto é um caso particular de (1) em que apenas o termo misto está presente. As assíntotas da hipérbole (2) são evidentemente o eixo x e o eixo y. Ficará claro que um termo misto está presente somente quando uma curva é inclinada com relação aos eixos coordenados e também que esse termo pode ser removido fazendo-se uma rotação dos eixos para "desinclinar" a curva. No caso de (2), é fácil ver, olhando a figura, que essa curva pode ser desinclinada, fazendo uma rotação de 45° dos eixos no sentido anti-horário.

Para construir o instrumental necessário para efetuarmos uma rotação arbitrária de eixos, começamos com o sistema xy e giramos esse eixos no sentido anti-horário de um ângulo θ para obter o sistema $x'y'$ (Fig. 15.31).

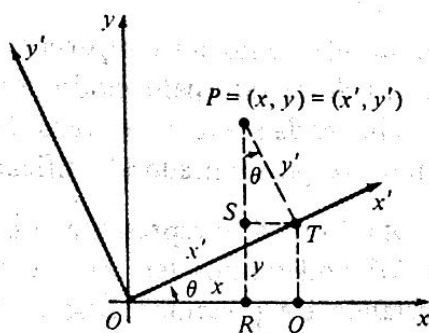



Figura 15.31 Rotação de eixos

Um ponto P do plano terá então dois pares de coordenadas retangulares (x, y) e (x', y'). Para vermos como essas coordenadas estão relacionadas, observamos, a partir da figura, que

$$\begin{aligned} x &= OR = OQ - RQ = OQ - ST \\ &= x' \cos\theta - y' \operatorname{sen}\theta \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} y &= RP = RS + SP = QT + SP \\ &= x' \operatorname{sen}\theta + y' \cos\theta. \end{aligned}$$

Escrevemos essas equações juntas para melhor compreensão.

$$\begin{aligned} x &= x' \cos\theta - y' \operatorname{sen}\theta, \\ y &= x' \operatorname{sen}\theta + y' \cos\theta; \end{aligned} \qquad (3)$$

elas recebem o nome de *equações de rotação de eixos*. Por exemplo, se $\theta = 45°$, então, como $\operatorname{sen} 45° = \cos 45° \; \frac{1}{2}\sqrt{2} = 1/\sqrt{2}$, temos

$$x = \frac{x' - y'}{\sqrt{2}}, \qquad y = \frac{x' + y'}{\sqrt{2}}. \qquad (4)$$

Outro exemplo: $\theta = 30^o$, então sen $30^o = 1/2$ e cos $30^o = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, assim

$$x = \frac{\sqrt{3}x' - y'}{2}, \qquad y = \frac{x' + \sqrt{3}y'}{2}. \tag{5}$$

Como ilustração simples do uso dessas equações, substituímos (4) em (2) e obtemos

$$\frac{x'^2 - y'^2}{2} = 2 \quad \text{ou} \quad \frac{x'^2}{4} - \frac{y'^2}{4} = 1.$$

Esta última é imediatamente reconhecida como uma hipérbole eqüilátera cujo eixo principal é o eixo x'. É claro que já sabíamos desse fato pelo modo como (2) foi obtida. Entretanto, se tivéssemos começado com (2) sem saber nada sobre a natureza de seu gráfico, então esse procedimento de remover o termo misto nos teria possibilitado identificar a curva sem dificuldade.

No caso da equação (2), a rotação de 45^o representada pelas equações (4) deu certo. Mas como poderíamos saber de antemão? Poderíamos ter certeza de que uma rotação conveniente sempre removerá o termo xy estando ele presente? E, se assim for, como determinamos um ângulo de rotação conveniente?

Para responder a essas questões, voltamos à equação geral de segundo grau (1),

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

e aplicamos a rotação geral (3), por um ângulo não especificado θ ;

$$A(x' \cos\theta - y' \operatorname{sen}\theta)^2 + B(x' \cos\theta - y' \operatorname{sen}\theta)(x' \operatorname{sen}\theta + y' \cos\theta)$$
$$+ C(x' \operatorname{sen}\theta + y' \cos\theta)^2 + D(x' \cos\theta - y' \operatorname{sen}\theta) + E(x' \operatorname{sen}\theta + y' \cos\theta) + F = 0.$$

Agrupando os termos semelhantes nas novas variáveis, obtemos uma nova equação cuja forma é a mesma

$$A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0, \tag{6}$$

onde os novos coeficientes estão relacionados aos antigos por meio das seguintes fórmulas:

$$\begin{aligned}
A' &= A \cos^2\theta + B \operatorname{sen}\theta \cos\theta + C \operatorname{sen}^2\theta, \\
B' &= -2A \operatorname{sen}\theta \cos\theta + B(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) + 2C \operatorname{sen}\theta \cos\theta, \\
C' &= A \operatorname{sen}^2\theta - B \operatorname{sen}\theta \cos\theta + C \cos^2\theta, \\
D' &= D \cos\theta + E \operatorname{sen}\theta, \\
E' &= -D \operatorname{sen}\theta + E \cos\theta, \\
F' &= F.
\end{aligned} \tag{7}$$

Escrevemos todas essas fórmulas para referência futura, mas de momento estamos apenas interessados em B'. Se começamos com uma equação de segundo grau (1) em que o termo misto está presente ($B \neq 0$), então podemos determinar sempre um ângulo θ de rotação tal que o novo termo misto seja eliminado. Para determinar um ângulo conveniente θ, fazemos simplesmente $B' = 0$ em (7) e resolvemos em θ. Obteremos os resultados com maior facilidade utilizando as fórmulas do ângulo duplo

$$\text{sen } 2\theta = 2 \text{ sen } \theta \cos \theta$$

e

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \text{sen}^2 \theta$$

para escrever

$$B' = B \cos 2\theta + (C - A) \text{ sen } 2\theta.$$

Então $B' = 0$, se escolhermos θ de modo que

$$\text{cotg } 2\theta = \frac{A - C}{B}. \tag{8}$$

Como estamos admitindo que $B \neq 0$, é claro que é sempre possível encontrar tal θ, e além disso, que ele pode ser escolhido no primeiro quadrante, $0 < \theta < \pi/2$.

Exemplo 1 Determine a natureza da curva cuja equação é

$$4x^2 + 2xy + 4y^2 = 15. \tag{9}$$

Solução Aqui nós temos $A = 4$, $B = 2$, $C = 4$. O termo misto será eliminado, escolhendo-se θ de acordo com (8):

$$\text{cotg } 2\theta = 0, \qquad 2\theta = 90°, \qquad \theta = 45°.$$

Portanto, substituímos as equações (4) em (9) e obtemos

$$5x'^2 + 3y'^2 = 15 \quad \text{ou} \quad \frac{x'^2}{3} + \frac{y'^2}{5} = 1$$

depois da simplificação. Esta é claramente uma elipse com seus focos no novo eixo y'.

Observamos que quando $B \neq 0$ e $A = C$, uma rotação de 45º é sempre adequada.

Exemplo 2 Determine a natureza da curva cuja equação é

$$11x^2 + 10\sqrt{3}\,xy + y^2 - 32 = 0. \tag{10}$$

Solução Aqui temos

$$\text{cotg } 2\theta = \frac{11-1}{10\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad 2\theta = 60°, \qquad \theta = 30°.$$

Nesse caso, utilizamos as equações (5), que transformam (10) em

$$16x'^2 - 4y'^2 - 32 = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{x'^2}{2} - \frac{y'^2}{8} = 1$$

depois da simplificação. Esta é uma hipérbole com eixo principal ao longo do novo eixo x'.

Retornamos agora a nosso problema original de classificar todos os possíveis gráficos da curva de segundo grau (1). Como os eixos podem sempre ser girados para eliminar o termo misto, não há perda de generalidade em admitirmos que isto já está feito. Portamos estamos com a equação (6) com $B' = 0$ e retiramos as "linhas" para simplificar a notação

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0. \tag{11}$$

Nossa experiência nas seções anteriores nos permite distinguir quatro casos e ter certeza de que não há outros. O gráfico da equação (11), com $B = 0$, é:

1. Uma circunferência, se $A = C \neq 0$. Em casos particulares, pode ser um único ponto ou o conjunto vazio.

2. Uma elipse, se A e C são ambos positivos ou ambos negativos, e $A \neq C$. Novamente, em casos particulares, o gráfico pode ser um único ponto ou o conjunto vazio.

3. Uma hipérbole, se A e C têm sinais opostos. Em casos particulares o gráfico pode ser um par de retas concorrentes.

4. Uma parábola se $A = 0$ ou $C = 0$ (mas não ambos). Em casos particulares, o gráfico pode ser uma reta, duas retas paralelas ou o conjunto vazio.

No Capítulo 16 encontraremos muitas equações de terceiro grau, quarto grau etc. A lista exaustiva dada aqui dos possíveis gráficos das equações de segundo grau é relativamente simples e contrasta fortemente com a quantidade de curvas bizarras que nos aguardam quando da análise de equações de grau superior.

Problemas

Nos Problemas 1 a 11, determine a rotação adequada de eixos para eliminar o termo misto, realize tal rotação, determine a nova equação e identifique a curva.

1. $5x^2 - 6xy + 5y^2 = 8$.
2. $x^2 - 2xy + y^2 + x + y = \sqrt{2}$.
3. $2x^2 + 4\sqrt{3}xy - 2y^2 = 8$.
4. $11x^2 + 4\sqrt{3}xy + 7y^2 - 65 = 0$.
5. $x^2 + 2xy + y^2 + 8x - 8y = 0$.
6. $x^2 - 3xy + y^2 = 10$.
7. $3x^2 + 2xy + 3y^2 = 8$.
8. $x^2 + 2\sqrt{3}xy + 3y^2 + 2\sqrt{3}x - 2y = 0$.
9. $5x^2 + 4\sqrt{3}xy + 9y^2 = 33$.
10. $3x^2 + 4\sqrt{3}xy - y^2 = 30$.

*11. $6x^2 - 6xy + 14y^2 = 5$.

12. Uma elipse tem focos $(1, 0)$ e $(0, \sqrt{3})$ e passa pelo ponto $(-1, 0)$. Utilize a definição que envolve focos para determinar sua equação. Com que ângulo deve-se fazer uma rotação de eixos para eliminar o termo misto dessa equação?

13. Utilize as equações (7) para mostrar que $B^2 - 4AC = B'^2 - 4A'C'$. Por essa razão, o número $B^2 - 4AC$ diz-se *invariante nas rotações*.

14. O número $B^2 - 4AC$ chama-se *discriminante* da equação (1). A fim de compreendermos por que, giremos os eixos para eliminar o termo misto e utilizemos o Problema 13 para mostrar que

$$B^2 - 4AC \begin{cases} <0 & \text{para circunferências e elipses,} \\ =0 & \text{para parábolas,} \\ >0 & \text{para hipérboles.} \end{cases}$$

Os vários casos particulares são considerados pertencentes às categorias apropriadas.

15. Verifique a afirmação do Problema 14 para os problemas de 1 a 11.

16. Na qualidade de verificação das equações de rotação de eixos, mostre que a equação de uma circunferência centrada na origem $x^2 + y^2 = r^2$ não muda de forma quando os eixos são girados de um ângulo arbitrário θ.

17. Uma rotação de eixos de ângulo θ, seguida de uma rotação de ângulo ϕ, obviamente implica uma rotaçaõ de ângulo $\theta + \phi$. Utilize as fórmulas

$$x = x' \cos\theta - y' \operatorname{sen}\theta$$
$$y = x' \operatorname{sen}\theta + y' \cos\theta$$

e

$$x' = x'' \cos\phi - y'' \operatorname{sen}\phi$$
$$y' = x'' \operatorname{sen}\phi + y'' \cos\phi$$

para mostrar que

$$x = x'' \cos(\theta + \phi) - y'' \operatorname{sen}(\theta + \phi)$$
$$y = x'' \operatorname{sen}(\theta + \phi) + y'' \cos(\theta + \phi).$$

18. Mostre que uma rotação de eixos de 45º transforma a equação $x^4 + 6x^2y^2 + y^4 = 32$ na equação $x'^4 + y'^4 = 16$. Esboce a curva e os dois conjuntos de eixos.

Problemas Suplementares do Capítulo 15

Seção 15.2

1. A corda de uma parábola que passa pelo foco e é perpendicular ao eixo chama-se *latus rectum*. Designando, como costumes por p a distância entre o vértice e o foco, calcule o comprimento do *latus rectum*.

2. Determine a equação da circunferência tangente à diretriz da parábola $x^2 = 4py$ tendo seu centro no foco da parábola. Quais os pontos de interseção da parábola com a circunferência?

3. Mostre que toda parábola que se abre para cima com foco na origem tem uma equação da forma $x^2 = 4p(y + p)$ e toda parábola que se abre para baixo com foco na origem tem uma equação da forma $x^2 = -4\bar{p}(y - p)$, onde p e $\bar{p}$ são constantes positivas.

4. Mostre que toda parábola que se abre para cima com foco na origem intercepta em ângulos retos toda parábola, com abertura para baixo, com foco na origem.

5. Seja P um ponto da parábola $x^2 = 4py$ diferente do vértice. Sendo Q e R os pontos em que a tangente e a normal em P interceptam o eixo da parábola, e sendo S o pé da perpendicular de P a esse eixo, então os segmentos QS e RS chamam-se *subtangente* e *subnormal.*

   (a) Mostre que o vértice V é o ponto médio da subtangente.

   (b) Mostre que a subnormal tem comprimento constante $2p$.

   (c) Mostre que P e R estão à mesma distância do foco F.

   (d) Mostre que P e Q estão à mesma distância do foco F, e assim F é o ponto médio do segmento QR.

   (e) Se a tangente em P intercepta a diretriz num ponto T, mostre que PFT é um ângulo reto.

   (f) Se a tangente em P intercepta a tangente em V (o eixo x) num ponto U, mostre que PUF é um ângulo reto.

6. Mostre que a propriedade de reflexão de parábolas é obtida facilmente (sem cálculo) da parte (d) do Problema 5.

7. Mostre que o vértice é o ponto da parábola mais próximo do foco.

Seção 15.3

8. A propriedade de reflexão das elipses é conseqüência fácil (sem cálculo) da seguinte propriedade geométrica dessa curva: seja T a reta tangente em P à elipse com focos F e F' (Fig. 15.32). G e G' as reflexões em T de F e F' sendo T a mediatriz dos segmentos FG e $F'G'$. Então, como é sugerido pela figura os segmentos FG' e $F'G$ se interceptam em P. Para provar isto, tome um ponto qualquer Q em T diferente de P e verifique que

   (a) $FP + PF' < FQ + QF'$;

   (b) $FP + PG' < FQ + QG'$;

   (c) P está sobre o segmento FG'.

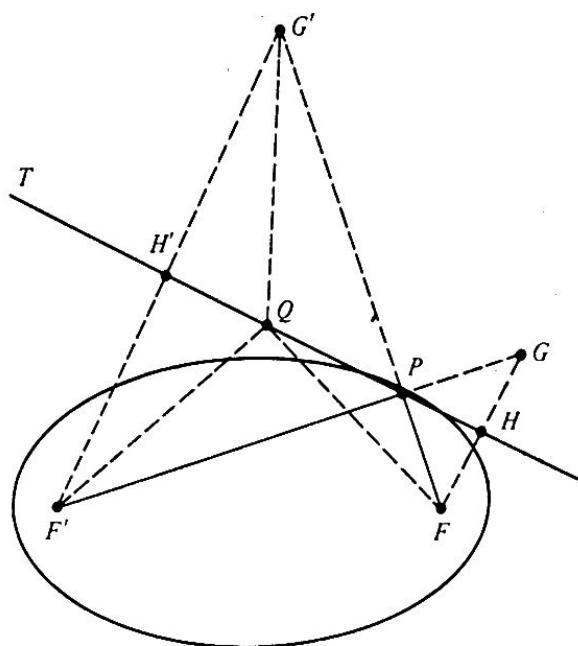



Figura 15.32

Analogamente P está sobre o segmento $F'G$, logo é o ponto de interseção desses segmentos. Finalmente, utilize esse fato para inferir que os ângulos FPH e $F'PH'$ são iguais.

9. Um barril tem a forma de um esferóide alongado com suas extremidades cortadas por planos através dos focos. Se o barril tem 4 m de altura e o diâmetro de seu topo (e base) é 2 m, calcule o volume.

10. *Latus rectum* de uma elipse é uma corda por um foco perpendicular ao eixo maior. Se a equação da elipse é $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, com $a > b$, mostre que

    (a) o comprimento de um *latus rectum* é $2\,b^2/a$;

    (b) o coeficiente da reta tangente na extremidade superior do *latus rectum* à direita do eixo y é $-e$;

    (c) a reta tangente na parte (b) intercepta a correspondente diretriz no eixo x.

11. Mostre que toda parábola da forma $y = Ax^2$ intercepta $x^2 + 2y^2 = B$ em ângulos retos.

12. Suponha que a tangente a uma elipse em um ponto P intercepta uma diretriz num ponto Q. Se F é o foco correspondente, mostre que PFQ é um ângulo reto.

13. Seja P um ponto sobre a elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ e Q o ponto em que a tangente em P intercepta a reta $x = -a$. A é o ponto $(a, 0)$. Mostre que AP é paralela a OQ.

14. Mostre que o produto das distâncias dos focos de uma elipse a uma tangente tem o mesmo valor para todas as tangentes. Sugestão: utilize o Problema Suplementar 21 do Capítulo 1. (Volume I).

Seção 15.4

15. Mostre que o produto das distâncias dos focos de uma hipérbole a uma tangente tem o mesmo valor para todas as tangentes.

16. Mostre que o produto das distâncias de um ponto P sobre uma hipérbole às assíntotas tem o mesmo valor para todos os P.

17. Exatamente como no caso da elipse, *latus rectum* de uma hipérbole $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ é uma corda por um foco perpendicular à reta em que estão os focos. Mostre que

    (a) o comprimento de um *latus rectum* é $2b^2/a$;

    (b) o coeficiente angular da reta tangente na extremidade superior do *latus rectum* à direita da origem é e;

    (c). a reta tangente em (b) intercepta a correspondente diretriz sobre o eixo x.

18. Suponha que a tangente a uma hipérbole num ponto P intercepta a diretriz mais próxima num ponto Q. Se F é o foco correspondente, mostre que PFQ é um ângulo reto.

19. Mostre que a distância de um dos focos da hipérbole $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ a uma das assíntotas é b.

20. Esboce os gráficos das equações

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$$

num único sistema de coordenadas. Essas duas hipérboles têm as mesmas assíntotas e seus quatro ramos "englobam" uma região que se estende ao infinito em quatro sentidos. Determine se a área dessa região é finita ou infinita.

21. Seja c um dado número positivo.

    (a) Mostre que para todos os valores positivos de h as elipses

$$\frac{x^2}{c^2 + h} + \frac{y^2}{h} = 1$$

têm os mesmos focos $(\pm c, 0)$.

(b) Mostre que para todos os valores positivos de $k < c^2$ as hipérboles

$$\frac{x^2}{c^2 - k} - \frac{y^2}{k} = 1$$

têm os mesmos focos que as elipses da parte (a).

(c) Se $P_1 = (x_1, y_1)$ é um ponto de interseção de uma das elipses em (a) com uma das hipérboles em (b), mostre que as tangentes às duas curvas nesse ponto são perpendiculares.

22. Mostre que uma reta por um foco de uma hipérbole e perpendicular a uma assíntota intercepta a assíntota na diretriz correspondente.

CAPÍTULO

16

COORDENADAS POLARES

16.1 SISTEMA DE COORDENADAS POLARES

Como sabemos, um sistema de coordenadas no plano permite-nos associar um par ordenado de números a cada ponto do plano. Essa idéia simples mas poderosa possibilita-nos estudar muitos problemas de Geometria – especialmente as propriedades das curvas – pelos métodos da Álgebra e do Cálculo. Até o estágio em que estamos no nosso trabalho somente consideramos o sistema de coordenadas retangulares (ou cartesianas), no qual a ênfase é colocada sobre as distâncias de um ponto a dois eixos perpendiculares. Entretanto, acontece muitas vezes que uma curva parece ter uma afinidade particular com a origem, como a trajetória de um planeta cuja órbita é determinada pela força central de atração do Sol. Tal curva é, muitas vezes, melhor descrita como trajetória de um ponto móvel cuja posição é especificada por sua direção a partir da origem, e por sua distância da origem. É exatamente isto que fazem as coordenadas polares, como iremos agora explicar.

Um ponto é localizado por meio de sua distância e direção da origem. (Fig. 16.1).

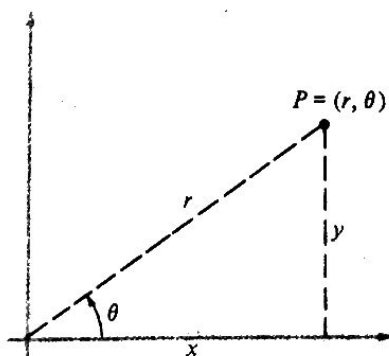



Figura 16.1 Coordenadas polares

A direção é especificada por um ângulo θ (em radianos), medida a partir do semi-eixo positivo dos x. Esse ângulo é medido no sentido anti-horário se θ é positivo e no sentido horário se θ é negativo, exatamente como na Trigonometria. A distância é dada pela distância orientada r, medida a partir da origem ao longo do lado terminal do ângulo θ. Os dois números r e θ, escritos nessa ordem, formando um par ordenado (r, θ), chamam-se *coordenadas polares* do ponto. A semi-reta $\theta = 0$ (o semi-eixo positivo dos x) chama-se *eixo polar*.

Todo ponto tem muitos pares de coordenadas polares. (Por exemplo, o ponto P da Fig. 16.2 tem coordenadas polares $(3, \pi/4)$, mas também tem coordenadas polares $(3, \pi/4 + 2\pi)$, $(3, \pi/4 - 4\pi)$ etc. Todo múltiplo de 2π somado ou subtraído da coordenada θ de um ponto produz um outro ângulo com o mesmo lado terminal; portanto uma outra coordenada θ do mesmo ponto.

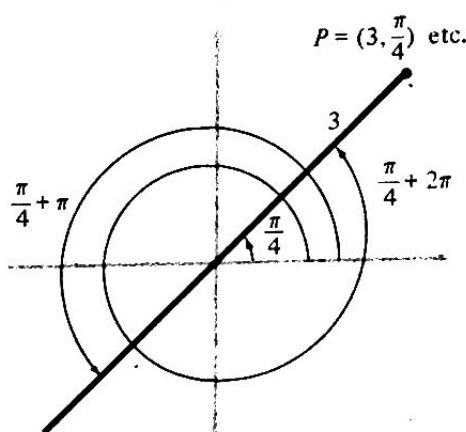



Figura 16.2

O termo "distância orientada" tem a intenção de sugerir que muitas vezes encontramos situações em que r é negativo. Nesse caso, subentende-se que em vez de sair da origem no sentido indicado pelo lado terminal de θ *nos dirigimos para a origem* a partir do ponto, percorrendo uma distância r no sentido oposto àquele. Assim, um outro par de coordenadas polares para o mesmo ponto P (Fig. 16.2) é $(-3, \pi/4 + \pi)$. Na Fig. 16.3 assinalamos os dois pontos $Q = (2, \pi/6)$ e $r = (-2, \pi/6)$.

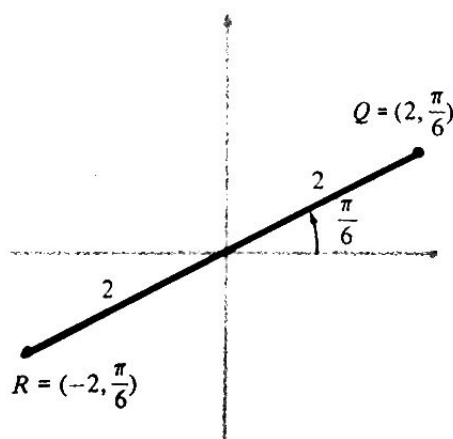



Figura 16.3

O valor $r = 0$ indica a origem, não importando o valor de θ. Por exemplo, os pares (0, 0), $(0, \pi/2)$, $(0, -y/4)$ são todos coordenadas polares da origem.

O fato de que um ponto não é representado por um único par de coordenadas polares é um aborrecimento, embora pequeno. Contudo, *é* verdade que qualquer par de coordenadas polares dado determina o correspondente ponto sem nenhuma ambigüidade.

Ainda que seja incorreto falar de *as* coordenadas polares de um ponto porque elas não são únicas, esse abuso é muito comum e é tolerado por motivo de eufonia.

É importante conhecer a conexão entre coordenadas retangulares e polares. A Fig. 16.1 mostra imediatamente que

$$x = r\cos\theta \qquad \text{e} \qquad y = r\,\text{sen}\,\theta. \tag{1}$$

Quando r e θ são conhecidos, essas equações permitem encontrar x e y. Temos também as equações

$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad \text{e} \qquad \text{tg}\,\theta = \frac{y}{x}, \tag{2}$$

que permitem obter os valores de r e θ quando x e y são conhecidos. Ao usar essas equações, é necessário tomar cuidado para que o sinal de r e a escolha de θ sejam consistentes com o quadrante em que o ponto dado (x, y) está.

Exemplo 1 As coordenadas retangulares de um ponto são $(-1, \sqrt{3})$. Determine um par de coordenadas polares para esse ponto.

Solução Temos

$$r = \pm\sqrt{1+3} = \pm 2 \qquad \text{e} \qquad \text{tg}\,\theta = -\sqrt{3}.$$

Visto que o ponto está no segundo quadrante, podemos usar nosso conhecimento de trigonometria para escolher $r = 2$ e $\theta = 2\pi/3$; assim, um par de coordenadas polares para o ponto é $(2, 2\pi/3)$. Um outro par aceitável com um valor negativo de r é $(-2, -\pi/3)$. Os estudantes devem assinalar no gráfico o ponto tendo uma compreensão visual clara de cada uma das afirmações (Fig. 16.4).

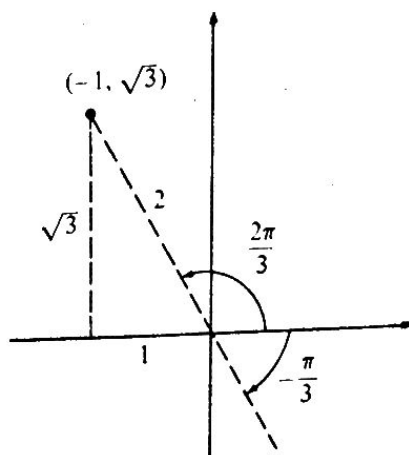



Figura 16.4

Exatamente como no caso de coordenadas retangulares, o *gráfico* de uma equação polar

$$F(r, \theta) = 0 \tag{3}$$

é o conjunto de todos os pontos $P = (r, \theta)$ cujas coordenadas polares satisfazem a equação. Uma vez que o ponto P tem muitos pares diferentes de coordenadas, é necessário estabelecer explicitamente que P pertence ao gráfico se *qualquer um* de seus diferentes pares de coordenadas satisfizer a equação.

Equação 2 Mostre que ambos os pontos $(1, \pi/2)$ e $(0, \pi/2)$ pertencem ao gráfico de $r = \text{sen}^2\theta$).

Solução O ponto $(1, \pi/2)$ está no gráfico porque as coordenadas dadas satisfazem a equação: $1 = \text{sen}^2 \pi/2$. Por outro lado, o ponto $(0, \pi/2)$ está no gráfico embora $0 \neq \text{sen}^2 \pi/2$. A razão desse comportamento aparentemente estranho é que $(0, 0)$ também é um par de coordenadas do ponto e $0 = \text{sen}^2 0$.

Na maioria das situações encontradas, a equação (3) pode ser resolvida para r tomando a forma

$$r = f(\theta). \tag{4}$$

Se a função $f(\theta)$ é razoavelmente simples, o gráfico é bem fácil de se esboçar. Nós simplesmente escolhemos uma seqüência adequada de valores de θ, determinando suas próprias direções a partir da origem; computamos em seguida os valores correspondentes de r que nos dizem quão longe ir em cada uma dessas direções. Começamos discutindo as mais simples equações possíveis.

Exemplo 3 A equação $\theta = \alpha$, onde α é uma constante, tem como gráfico uma reta que passa pela origem e forma um ângulo α com o semi-eixo positivo dos x (Fig. 16.5).

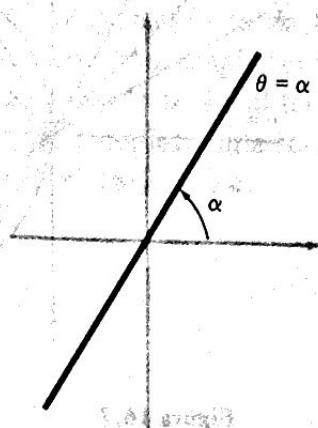



Figura 16.5

Exemplo 4 A equação $r = a$, onde a é uma constante positiva, tem como gráfico a circunferência com centro na origem e raio a (Fig. 16.6).

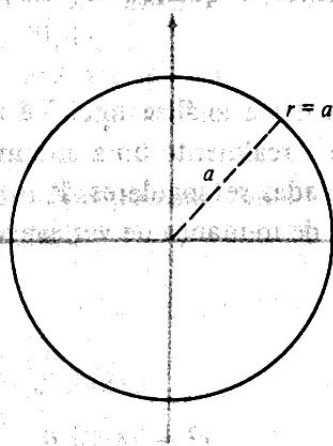



Figura 16.6

Nosso exemplo seguinte é mais complicado e serve para introduzir diversos métodos importantes.

Exemplo 5 O gráfico de $r = 2\cos\theta$ é uma outra circunferência, mas isto não é óbvio. Uma maneira de ter uma idéia da forma de um gráfico polar desconhecido é fazer uma pequena tabela de valores selecionados e marcar os pontos correspondentes (Fig. 16.7).

θ	r
0	2
$\pi/6$	$\sqrt{3}$
$\pi/4$	$\sqrt{2}$
$\pi/3$	1
$\pi/2$	0
$2\pi/3$	-1
$3\pi/4$	$-\sqrt{2}$
$5\pi/6$	$-\sqrt{3}$
π	-2

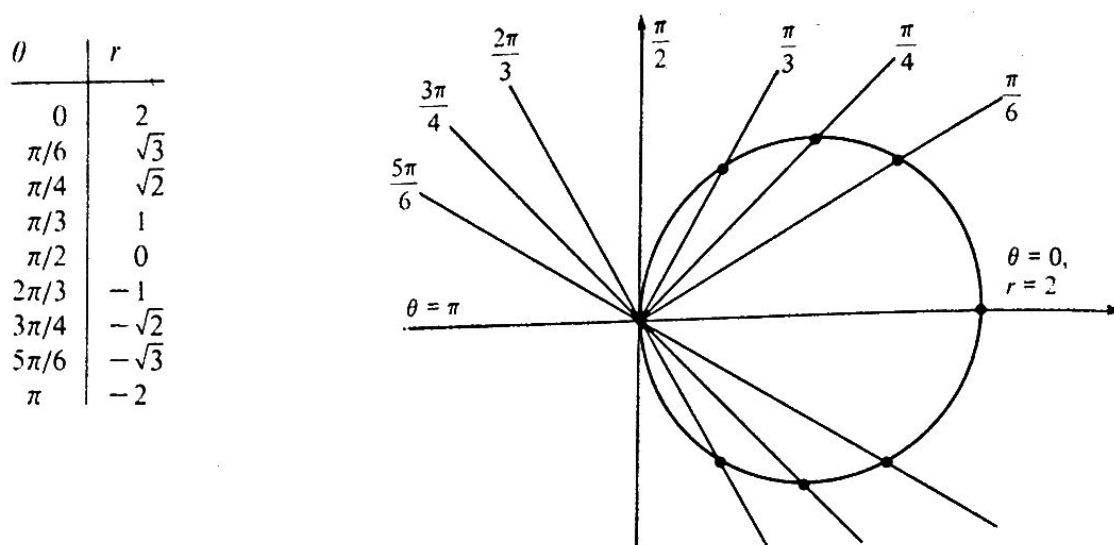



Figura 16.7

Um procedimento melhor que computar valores e marcar pontos é esboçar o gráfico pela análise direta da equação polar, como trajetória de um ponto móvel. Quando $\theta = 0$, $r = 2 \cos 0 = 2$. Quando θ cresce, no primeiro quadrante, de 0 a $\pi/2$, $2 \cos \theta$ decresce de 2 a 0 e obtemos a parte superior da curva mostrada na Fig. 16.7. Quando θ cresce de $\pi/2$ a π, $2 \cos \theta$ decresce de 0 a -2, e a parte inferior da curva é traçada. Quando θ cresce de π a $3\pi/2$, a parte superior da curva é percorrida novamente, e quando θ cresce de $3\pi/2$ a 2π, repete-se a parte inferior.

É claro que o gráfico resultante dessa análise inicial é uma espécie de oval, talvez mesmo uma circunferência. Para verificar que é realmente uma circunferência, estabelecemos e reconhecemos a equação da curva em coordenadas retangulares. Para isto multiplicamos a equação dada $r = 2 \cos \theta$ por r e usamos as equações de mudança de variáveis (1) e (2) para escrever

$$\begin{aligned} r^2 &= 2r \cos \theta, \\ x^2 + y^2 &= 2x, \\ x^2 - 2x + y^2 &= 0, \\ (x-1)^2 + y^2 &= 1. \end{aligned}$$

Essa última equação revela que estamos diante do gráfico da circunferência com centro (1, 0) e raio 1. Devemos salientar que, ao multiplicarmos a equação dada por r, introduzimos a origem como um ponto do gráfico; visto que esse ponto já está no gráfico, nada se altera.

O método ilustrado aqui, o de esboçar um gráfico polar pelo exame direto da equação polar $r = f(\theta)$, será muitas vezes importante em nosso trabalho futuro. Resumidamente, o processo é este: imaginamos um raio movendo-se ao redor da origem no sentido anti-horário, com nossa curva sendo traçada por um ponto sobre esse raio, que está livre para se mover em direção à origem ou se afastando dela de acordo com o comportamento da função $f(\theta)$. Em muitos de nossos exemplos e problemas, $f(\theta)$ será uma expressão simples envolvendo as funções trigonométricas sen θ ou cos θ. Nessas circunstâncias, certamente será útil ter uma sólida compreensão da maneira como essas funções variam quando o raio completa uma revolução, isto é, quando θ cresce de 0 a $\pi/2$ e depois de $\pi/2$ a π, π a $3\pi/2$ e $3\pi/2$ a 2π.

Problemas

1. Determine as coordenadas retangulares dos pontos dados pelas seguintes coordenadas polares marcando-os no plano.

(a) $(2, \pi/4)$; (b) $(4, -\pi/3)$;
(c) $(0, -\pi)$; (d) $(-1, 7\pi/6)$;
(e) $(2, -\pi/2)$; (f) $(4, 3\pi/4)$;
(g) $(3, \pi)$; (h) $(-6, -\pi/4)$;
(i) $(1, 0)$; (j) $(0, 1)$;
(k) $(2, -5\pi/3)$; (l) $(13, \text{arc tg}^{-1} \frac{12}{5})$;
(m) $(-4, 11\pi/6)$; (n) $(3, -3\pi/2)$.

2. Determine dois pares de coordenadas polares, com r de sinais opostos, para os pontos com as seguintes coordenadas retangulares:

(a) $(-2, 2)$; (b) $(4, 0)$;
(c) $(2\sqrt{3}, 2)$; (d) $(2, 2\sqrt{3})$;
(e) $(\sqrt{3}, 1)$; (f) $(0, 4)$;
(g) $(-3, -3)$; (h) $(5, 5)$;
(i) $(0, -2)$; (j) $(-\sqrt{3}, 1)$;
(k) $(5, -12)$; (l) $(-3, 4)$;
(m) $(-1, 0)$; (n) $(1, 2)$.

3. Um pentágono regular está inscrito na circunferência $r = 1$ com um vértice no semi-eixo positivo dos x. Ache as coordenadas polares de todos os vértices.

4. Mostre que o ponto $(3, 3\pi/4)$ pertence à curva $r = 3$ sen 2θ.

5. Mostre que o ponto $(3, 3\pi/2)$ pertence à curva $r^2 = 9$ sen θ.

6. Esboce cada uma das seguintes curvas e mostre que cada uma delas é uma circunferência determinando a equação em coordenadas retangulares equivalente:

(a) $r = 6 \operatorname{sen} \theta$;
(b) $r = -8 \cos \theta$;
(c) $r = -4 \operatorname{sen} \theta$.

7. Esboce a curva $r = 4(\operatorname{sen} \theta + \cos \theta)$ e identifique-a determinando a equação em coordenadas retangulares correspondente.

8. Mostre que o gráfico de $r = 2a \cos \theta + 2b \operatorname{sen} \theta$ é ou um único ponto ou uma circunferência que passa pela origem. Determine o centro e o raio da circunferência.

9. Esboce e identifique cada um dos seguintes gráficos:

(a) $r = 2 \operatorname{cosec} \theta$;
(b) $r = 4 \sec \theta$;
(c) $r = -3 \operatorname{cosec} \theta$;
(d) $r = -2 \sec \theta$.

16.2 MAIS GRÁFICOS DE EQUAÇÕES POLARES

Continuamos nosso programa de entender melhor os gráficos em coordenadas polares. Nesta seção nos concentramos particularmente em esboçar equações polares $r = f(\theta)$ do tipo mencionado anteriormente, onde $f(\theta)$ envolve, de algum modo simples, $\cos \theta$ ou $\operatorname{sen} \theta$.

De novo enfatizamos a mudança de ponto de vista necessária para esboçar gráficos polares. Com coordenadas retangulares e $y = f(x)$, estamos acostumados à idéia de um ponto x se movendo ao longo do eixo horizontal e y como a distância orientada medida, para cima ou para baixo, até o ponto correspondente (x, y) no plano. Pensamos em termos de "esquerda, direita" e "em cima, embaixo".

Com coordenadas polares e $r = f(\theta)$, no entanto, devemos pensar no ângulo θ girando como o ponteiro de um relógio rodando no sentido contrário ao habitual. Para cada θ, medimos a partir da origem uma distância orientada $f(\theta)$, e nosso ponto móvel está mais longe ou mais perto dessa origem, conforme $f(\theta)$ seja grande ou pequeno. Devemos pensar em termos de "voltas" e "dentro e fora".

Exemplo 1 A curva $r = a(1 + \cos\theta)$ com $a > 0$ chama-se *cardióide*. Quando $\theta = 0$, $\cos\theta = 1$ e $r = 2a$. Quando θ cresce de 0 para $\pi/2$ e, então, para π, $\cos\theta$ decresce de 1 para 0 e, então, para -1; logo r decresce regularmente de $2a$ para a e para 0. Isto é mostrado na parte superior da Fig. 16.8.

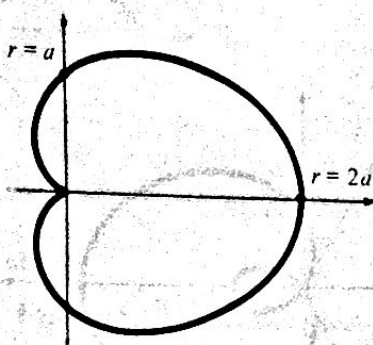



Figura 16.8 Uma cardióide.

Quando θ continua a crescer nos terceiro e quarto quadrantes, vemos que $\cos\theta$, e com ele r, retoma seus valores na ordem inversa, atingindo $\cos\theta = 1$ e $r = 2a$ em $p = 2\pi$. Como $\cos\theta$ é periódico de período 2π, os valores de θ menores que 0 ou maiores que 2π dão pontos já marcados. A cardióide completa mostrada na figura é evidentemente simétrica em relação ao eixo x. O estranho nome que a curva recebe se dá por sua imaginária semelhante com um coração.

Ao encarar uma equação polar, é natural tentar transcrevê-la à forma que consideramos familiar, ou seja em coordenadas retangulares. Isto é efetuado usando-se as equações de transformação mencionadas na Seção 16.1,

$$r^2 = x^2 + y^2, \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r}, \qquad \cos\theta = \frac{x}{r}, \qquad \operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x}.$$

No caso da cardióide abordada no Exemplo 1, sua equação $r = a(1 + \cos\theta)$ fica sendo

$$r = a\left(1 + \frac{x}{r}\right), \qquad r^2 = a(r + x), \qquad x^2 + y^2 - ax = ar,$$

e finalmente

$$(x^2 + y^2 - ax)^2 = a^2(x^2 + y^2).$$

Essa equação da cardióide não nos revela muito. Evidentemente, é melhor, nesse caso, pensar exclusivamente na linguagem de coordenadas polares. Contudo, é interessante notar que a cardióide é uma curva de 4º grau, em contraste com as curvas de 2º grau, abordadas no Capítulo 15.

Exemplo 2 A curva $r = a(1 + 2\cos\theta)$ com $a > 0$ chama-se *limaçon* (palavra francesa que significa caracol). Quando $\theta = 0$, $r = 3a$. Quando θ cresce, r decresce, tornando-se 0 quando $2\cos\theta = -1$, isto é, quando $\theta = 2\pi/3$. Quando θ continua a crescer até π, r continua a decrescer por valores negativos de 0 a $-a$, e o ponto cujo movimento estamos seguindo traça a metade inferior do laço interno, mostrado na Fig. 16.9.

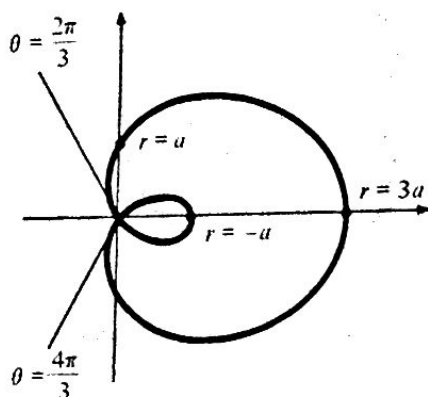



Figura 16.9 Limaçon.

Exatamente como no Exemplo 1, quando θ continua a crescer nos terceiro e quarto quadrantes, r retoma os valores na ordem inversa; o laço interno é completado em $\theta = 4\pi/3$ e o laço externo é completado em $\theta = 2\pi$.

As curvas dos Exemplos 1 e 2 são ambas simétricas com relação ao eixo x. Teremos sempre essa espécie de simetria quando r for função apenas de $\cos\theta$, em virtude de identidade $\cos(-\theta) = \cos\theta$. Analogamente, se r for uma função só de sen θ, então a curva é simétrica em relação ao eixo y por causa da identidade $\operatorname{sen}(\pi - \theta) = \operatorname{sen}\theta$.

Encontramos, às vezes, curvas cujas equações têm a forma $r^2 = f(\theta)$. Nesse caso, se θ é um ângulo para o qual $f(\theta) < 0$, não existe nenhum ponto correspondente no gráfico, pois $r^2 \geqslant 0$. Mas se θ é um ângulo para o qual $f(\theta) > 0$, então existem *dois* pontos correspondentes no gráfico, com $r = \pm\sqrt{f(\theta)}$. Esses pontos estão à mesma distância da origem em sentidos opostos; logo, o gráfico de $r^2 = f(\theta)$ é sempre simétrico em relação à origem.

Exemplo 3 A curva $r^2 = 2a^2\cos 2\theta$ chama-se *lemniscata*. Para cada θ, existem dois r.

$$r = \pm\sqrt{2}a\sqrt{\cos 2\theta}. \tag{1}$$

Quando θ cresce de 0 para $\pi/4$, 2θ cresce de 0 para $\pi/2$ e $\cos 2\theta$ decresce de 1 para 0. Portanto, os dois r em (1) traçam simultaneamente as duas partes da curva mostrada à esquerda da Fig. 16.10.

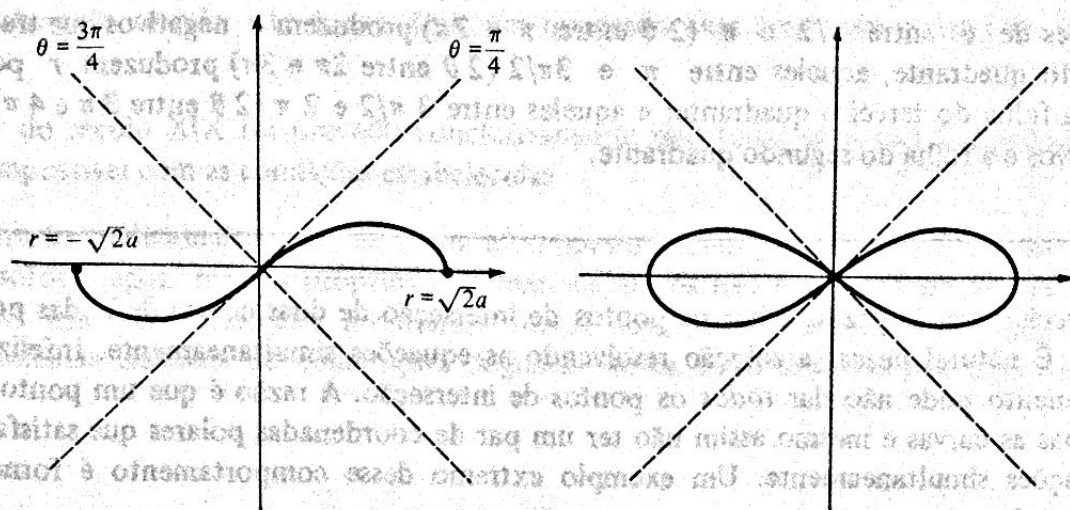



Figura 16.10 Uma lemniscata.

Quando θ continua a crescer, agora na segunda metade do primeiro quadrante e primeira metade do segundo quadrante, 2θ terá valores nos segundo e terceiro quadrantes e $\cos 2\theta$ será negativo; logo não há gráfico para esses θ. Na segunda metade do segundo quadrante, $\cos 2\theta$ é positivo de novo e os dois r dados por (1) completam simultaneamente os dois laços iniciados à esquerda da figura. Investigação posterior revela que não há pontos adicionais a serem obtidos e a lemniscata completa está mostrada na figura à direita. O nome dessa curva vem da palavra latina *lemniscus*, que significa uma fita amarrada num arco em forma de oito*.

Exemplo 4 A curva $r = a$ sen 2θ com $a > 0$ chama-se *rosa de quatro folhas*, por motivos que ficarão claros. Para esboçá-la, observamos que, quando θ cresce de 0 a $\pi/4$, 2θ cresce de 0 a $\pi/2$ e r cresce de 0 a a; quando θ cresce de $\pi/4$ para $\pi/2$, 2θ cresce de $\pi/2$ para π e r decresce de a para 0. Isto nos dá a folha do primeiro quadrante (Fig. 16.11).

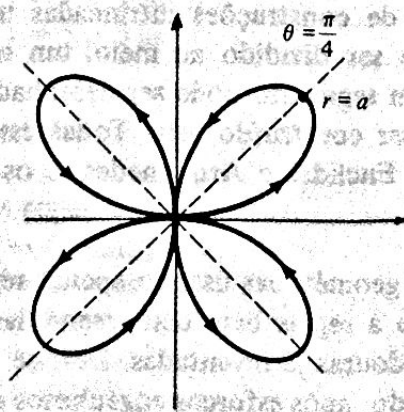



Figura 16.11 Rosa de quatro folhas

* A lemniscata foi introduzida por James Bernoulli, em 1694. Teve um papel considerável em algumas das obras iniciais de Gauss (em 1797) e Abel (em 1826) sobre funções elípticas e construções com régua e compasso em geometria. Veja M. Rosen, "Abel's Theorem on the Lemniscate", *Amer. Math. Monthly*, 1981, pp. 387-395.

Os valores de θ entre $\pi/2$ e π (2θ entre π e 2π) produzem r negativos que traçam a folha do quarto quadrante; aqueles entre π e $3\pi/2$ (2θ entre 2π e 3π) produzem r positivos que traçam a folha do terceiro quadrante; e aqueles entre $3\pi/2$ e 2π (2θ entre 3π e 4π) produzem r negativos e a folha do segundo quadrante.

Precisamos, às vezes, achar os pontos de interseção de duas curvas definidas por equações polares. É natural buscar a solução resolvendo as equações simultaneamente. Infelizmente este procedimento pode não dar *todos* os pontos de interseção. A razão é que um ponto pode estar em ambas as curvas e mesmo assim não ter um par de coordenadas polares que satisfaçam ambas as equações simultaneamente. Um exemplo extremo desse comportamento é fornecido pelas duas equações.

$$r = 1 + \cos^2\theta \qquad \text{e} \qquad r = -1 - \cos^2\theta,$$

cujos gráficos são idênticos. Nesse caso não há soluções simultâneas, pois todos os primeiros r são positivos e todos os segundos, negativos, embora haja infinitos pontos de interseção.

Como fazer para achar interseções? A abordagem mais imediata é desenhar gráficos suficientemente bons de ambas as equações numa única figura para ver se existem pontos de interseção. Caso existam, é usualmente possível achar as coordenadas polares desses pontos ou resolvendo simultaneamente as equações ou observando a localização dos pontos por uma inspeção direta da figura.

Observação As pessoas que gostam de Geometria sentem um prazer especial com problemas de construção. Como os estudantes recordam, os matemáticos da Grécia Antiga aprenderam a realizar uma grande variedade de construções intrincadas usando somente régua e compasso. Por exemplo, um ângulo pode ser dividido ao meio; um segmento pode ser dividido em três partes iguais; a mediatriz de um segmento pode ser desenhada; polígonos regulares de n lados, com $n = 3, 4, 5, 6$, podem ser construídos etc. Todas essas construções e muitas mais eram conhecidas desde o tempo de Euclides e Arquimedes, e os detalhes formam parte importante do estudo da Geometria Plana.

A criação de construções geométricas usando apenas régua e compasso, consideradas como jogos intelectuais e obedecendo a regras bem compreendidas, é certamente uma das ocupações mentais mais fascinantes e duradouras já inventadas. Deve-se ver para crer as construções complicadas tornadas possíveis. Contudo, após esforços engenhosos e persistentes, que se estenderam por mais de 2.000 anos, havia três problemas gregos clássicos de construção que permaneceram em aberto até o início do século XIX. Esses problemas eram:

1. *trisseção de um ângulo,* isto é, dividir um dado ângulo em três partes iguais;
2. duplicação de um cubo, isto é, construir a aresta de um cubo com o dobro do volume de um dado cubo;

3. *quadratura do círculo,* isto é, construir um quadrado cuja área fosse igual à de um dado círculo.

No decorrer do século XIX foi provado conclusivamente que todas essas três construções eram de solução impossível com as condições estabelecidas.

A restrição tradicional ao uso de régua e compasso apenas parece ter tido origem com os antigos filósofos gregos, mas os próprios matemáticos gregos não hesitaram em utilizar outros instrumentos. Em particular, eles inventaram curvas bizarras com o propósito específico de resolver problemas clássicos de construção. Algumas curvas serão descritas nos problemas que se seguem.

Problemas

1. As seguintes curvas são também chamadas *cardióides*. Esboce-as, observando o modo como a posição muda quando a forma da equação muda*.

   (a) $r = a(1 - \cos\theta)$. (b) $r = a(1 + \operatorname{sen}\theta)$.
   (c) $r = a(1 - \operatorname{sen}\theta)$.

2. Todas as curvas da forma $r = a \pm b\cos\theta$ ou $r = a \pm b\operatorname{sen}\theta$ com $a, b > 0$ são chamadas *limaçons*. Se $a > b$, o gráfico é um laço único. Se $a < b$, o gráfico consiste em um laço menor dentro de um laço maior, como na Fig. 16.9. Esboce as seguintes limaçons:

   (a) $r = 3 + 2\cos\theta$; (b) $r = 1 + 2\operatorname{sen}\theta$;
   (c) $r = 1 - \sqrt{2}\cos\theta$; (d) $r = 5 - 3\operatorname{sen}\theta$.

3. Esboce a lemniscata $r^2 = a^2\operatorname{sen}^2\theta$.

4. Esboce os gráficos das seguintes equações polares:
   (a) $r = 2a\cos\theta$; (b) $r = 2a\operatorname{sen}\theta$;
   (c) $r = 2 - \cos\theta$; (d) $r = 2 + \cos\theta$;
   (e) $r^2 = \cos\theta$; (f) $r = 4\operatorname{sen}^2\theta$;
   (g) $r = \cos 2\theta$; (h) $r = 1 + \operatorname{sen} 2\theta$;
   (i) $r = 2 + \operatorname{sen} 2\theta$; (j) $r = \cos\frac{1}{2}\theta$;
   (k) $r = \operatorname{sen}\frac{1}{2}\theta$; (l) $r = 2\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}\theta$;
   (m) $r = 1 + 2\operatorname{sen}\theta$; (n) $r = \operatorname{tg}\theta$;
   (o) $r = \operatorname{cotg}\theta$; (p) $r = \operatorname{sen} 3\theta$;
   (q) $r = \cos 3\theta$.

* A menos que se mencione claramente o contrário, é costume assumir que a constante a que aparece em equações polares como estas é um número positivo.

5. Transforme a equação cartesiana dada numa equação polar equivalente:

(a) $x = 5$; (b) $y = -3$;
(c) $x^2 + y^2 = 9$; (d) $x^2 - y^2 = 9$;
(e) $y = x^2$; (f) $xy = 1$;
(g) $y^2 = x(x^2 - y^2)$; (h) $y^2 = x^2\left(\dfrac{2+x}{2-x}\right)$.

6. Transforme a equação polar dada numa equação cartesiana equivalente:

(a) $r = 2$; (b) $\theta = \pi/4$;
(c) $r \cos\theta = 3$; (d) $r = 4 \operatorname{sen}\theta$;
(e) a limaçon do Exemplo 2, $r = a(1 + 2\cos\theta)$;
(f) a lemniscata do Exemplo 3, $r2 = 2a^2 \cos 2\theta$;
(g) a rosa do Exemplo 4, $r = a \operatorname{sen} 2\theta$;
h) $r = \operatorname{tg}\theta$; (i) $r^2 = \cos 4\theta$.

7. Seja a um número positivo e considere os pontos $F = (a, 0)$ e $F' = (-a, 0)$. A lemniscata $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$ tem a seguinte propriedade geométrica simples. É o conjunto de todos os pontos P tais que o produto das distâncias PF e PF' é igual a a^2. Prove isto, primeiro determinando a equação cartesiana da curva e depois transformando essa equação em sua forma polar $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$.

8. Utilize a fórmula $y = r \operatorname{sen}\theta$ para determinar o valor máximo de y sobre

(a) a cardióide $r = 2(1 + \cos\theta)$;
(b) a lemniscata $r^2 = 8 \cos 2\theta$.

9. Use a fórmula $x = r \operatorname{sen}\theta$ para determinar as coordenadas polares dos pontos da cardióide $r = 2(1 + \cos\theta)$ com a menor coordenada x. Qual é essa coordenada x mínima?

10. Determine todos os pontos de interseção dos seguintes pares de curvas:

(a) $r = 4\cos\theta$, $r = 4\sqrt{3} \operatorname{sen}\theta$;
(b) $r = \sqrt{2} \operatorname{sen}\theta$, $r^2 = \cos 2\theta$;
(c) $r^2 = 4\cos 2\theta$, $r^2 = 4 \operatorname{sen} 2\theta$;
(d) $r = 1 - \cos\theta$, $r = \cos\theta$;
(e) $r = a$, $r = 3a \operatorname{sen}\theta$;
(f) $r = a$, $r^2 = 2a^2 \operatorname{sen} 2\theta$.

Um segmento de reta de comprimento $2a$ desliza de tal modo que uma extremidade se mantém no eixo x e a outra extremidade se mantém no eixo y. Determine a equação polar do lugar geométrico do ponto P em que uma reta, pela origem perpendicular ao segmento móvel, interseciona o segmento.

12. Considere uma circunferência de diâmetro $2a$ tangente ao eixo y na origem (Fig. 16.12).

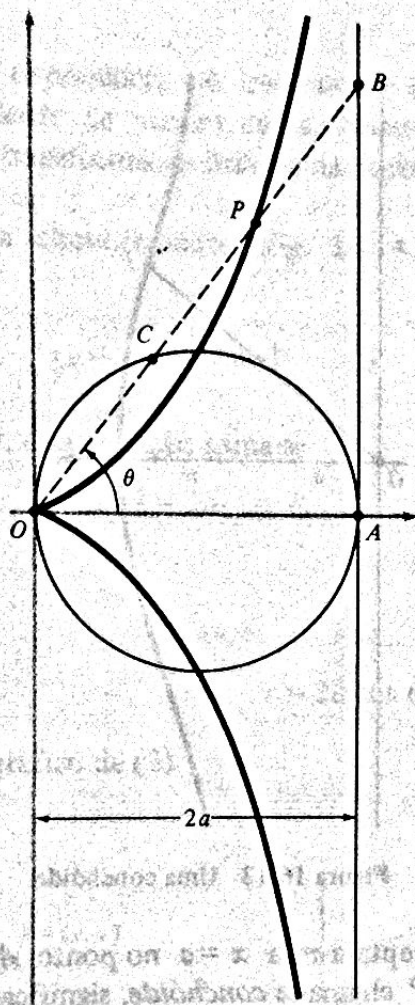



Figura 16.12 Uma cissóide.

Seja OA o diâmetro que está no eixo x, AB um segmento tangente à circunferência em A e C o ponto em que OB intercepta a circunferência. Se $P = (r, \theta)$ está em OB sendo $OP = CB$, determine a equação polar do lugar geométrico de P. Essa curva chama-se *cissóide*, significando em forma de hera ou mais precisamente *cissóide de Diocles* (grego, século II a.C.)*.

13. Determine a equação cartesiana da cissóide do Problema 12.

14. Mostre que a reta $x = 2a$ é uma assíntota da cissóide do Problema 12.

---

* Nos Problemas Suplementares explicamos como a cissóide pode ser usada para resolver o problema da duplicação de um cubo.

15. Sejam a e b números positivos dados e considere uma reta cuja equação cartesiana seja $x = a$ e cuja equação polar seja $r \cos \theta = a$ ou $r = a \sec \theta$ (Fig. 16.13).

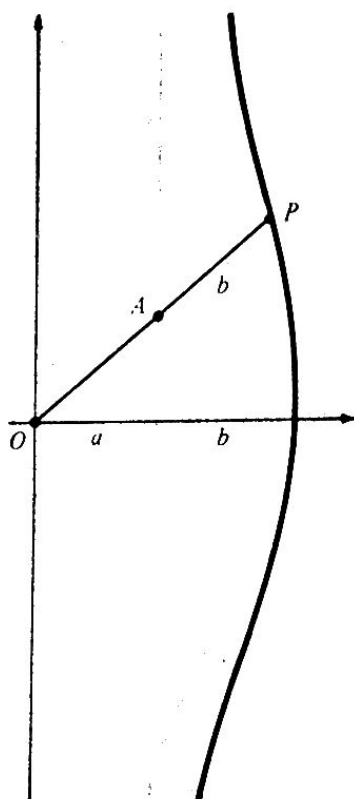



Figura 16.13 Uma conchóide.

A reta OA da figura intercepta a reta $x = a$ no ponto A e P está a distância b além de A. O lugar geométrico de P chama-se *conchóide,* significando em forma de concha ou mais precisamente *conchóide de Nicomedes* (grego, século III a.C.). A equação polar da conchóide é evidentemente $r = a \sec \theta + b$. Determine sua equação cartesiana*.

16. Se a rotação do eixo polar de um ângulo especificado transforma uma equação polar em outra, então seus gráficos são claramente congruentes. Mostre que uma rotação no sentido anti-horário do eixo polar de um ângulo α pode ser realizada substituindo θ por $\theta + \alpha$. Use esse método com escolhas convenientes de α para mostrar que:

(a) as cardióides do Problema 1 são congruentes à cardióide $r = a(1 + \cos \theta)$ discutidas no Exemplo 1;
(b) a limaçon $r = a \pm b \operatorname{sen} \theta$ do Problema 2 é congruente à limaçon $r = a \pm b \cos \theta$;
(c) a lemniscata $r^2 = 2a^2 \operatorname{sen} 2\theta$ do Problema 3 é congruente à lemniscata $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$ discutida no Exemplo 3.

---

* Nos Problemas Suplementares explicamos como a conchóide pode ser usada para resolver o problema da trisseção de um ângulo.

16.3 EQUAÇÕES POLARES DE CIRCUNFERÊNCIAS, CÔNICAS E ESPIRAIS

Já adquirimos considerável experiência em transformar a equação cartesiana de uma dada curva na equação polar equivalente da mesma curva. Nossos instrumentos básicos para esse procedimento são as equações de transformação listadas na Seção 16.2.

Considere, por exemplo, a circunferência (Fig. 16.14, à esquerda) com centro $(a, 0)$ e raio a:

$$(x-a)^2+y^2=a^2 \quad \text{or} \quad x^2+y^2=2ax. \tag{1}$$

Como $x^2+y^2=r^2$ e $x=r\cos\theta$, essa equação torna-se

$$r^2=2ar\cos\theta,$$

que é equivalente a

$$r=2a\cos\theta, \tag{2}$$

pois a origem $r=0$ pertence ao gráfico de (2).

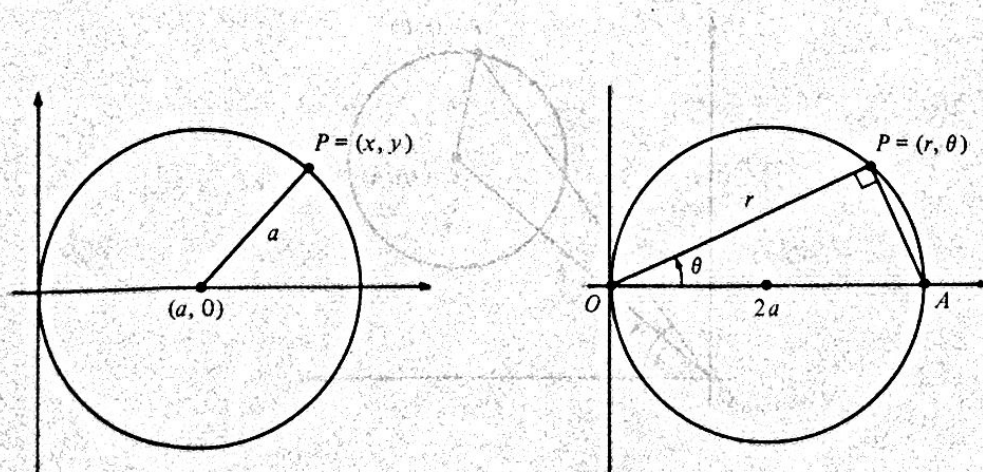



Figura 16.14

Esse exemplo ilustra um modo de descobrir a equação polar de uma curva, ou seja, transformar sua equação cartesiana em coordenadas polares. Um outro método, melhor sempre que viável, é obter a equação polar diretamente de alguma propriedade geométrica característica da curva. No caso de circunferência acima discutida, usamos o fato de que o ângulo OPA é um ângulo reto. Como OPA é um triângulo retângulo tendo r como lado adjacente ao ângulo agudo θ, temos evidentemente que

$$r=2a\cos\theta,$$

que naturalmente é a mesma equação anteriormente obtida, mas deduzida de modo muito diferente.

Usaremos esse segundo método e métodos mais naturais para descobrir as equações polares de várias curvas nos exemplos seguintes.

Exemplo 1 Determine a equação polar da circunferência de raio a e centro no ponto C, com coordenadas polares (b, α), onde b é suposto positivo.

Solução Seja $P = (r, \theta)$ um ponto qualquer da circunferência (Fig. 16.15); aplique a Lei dos Co-Senos ao triângulo OPC obtendo

$$a^2 = r^2 + b^2 - 2br \cos(\theta - \alpha).$$

Esta é a equação polar da circunferência. Para circunferências que passam pela origem temos $b = a$, e a equação pode ser escrita como

$$r = 2a \cos(\theta - \alpha). \tag{3}$$

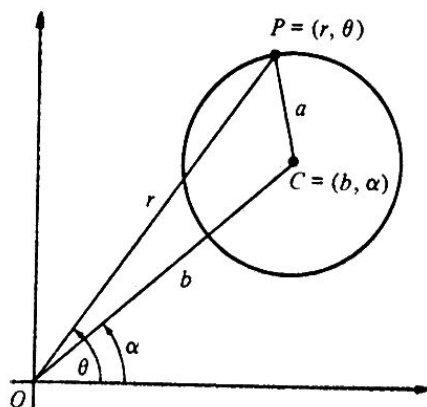



Figura 16.15

Em particular, quando $\alpha = 0$, então (3) se reduz a (2); quando $\alpha = \pi/2$, ou seja, o centro está no eixo y, então $\cos(\theta - \pi/2) = \operatorname{sen} \theta$ e (3) reduz-se a

$$r = 2a \operatorname{sen} \theta. \tag{4}$$

Nesse caso, o triângulo retângulo OPA da Fig. 16.16 fornece um modo geométrico mais direto de obter (4), pois então r é o lado oposto ao ângulo agudo.

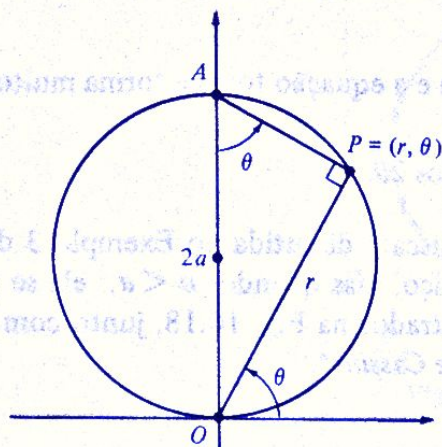
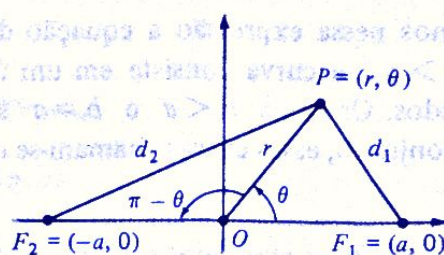



Figura 16.16 Figura 16.17

Exemplo 2 Sejam F_1 e F_2 dois pontos cujas coordenadas cartesianas são $(a, 0)$ e $(-a, 0)$ (Fig. 16.17). Se b é uma constante positiva, determine a equação polar do lugar geométrico de um ponto P que se move de tal modo que o produto de sua distância de F_1 e F_2 é b^2.

Solução Se $P = (r, \theta)$ é um ponto arbitrário da curva, então a definição leva

$$d_1 d_2 = b^2 \quad \text{ou} \quad d_1^2 d_2^2 = b^4,$$

onde $d_1 = PF_1$ e $d_2 = PF_2$. Aplicamos a Lei dos Co-Senos duas vezes, primeiro ao triângulo OPF_1,

$$d_1^2 = r^2 + a^2 - 2ar \cos \theta, \tag{5}$$

e depois ao triângulo OPF_2,

$$d_2^2 = r^2 + a^2 - 2ar \cos (\pi - \theta). \tag{6}$$

Como $\cos (\pi - \theta) = -\cos \theta$, podemos escrever (6) como

$$d_2^2 = r^2 + a^2 + 2ar \cos \theta, \tag{7}$$

e, multiplicando (5) e (7), obtemos

$$d_1^2 d_2^2 = (r^2 + a^2)^2 - (2ar \cos \theta)^2$$

ou

$$b^4 = r^4 + a^4 + 2a^2 r^2 (1 - 2 \cos^2 \theta).$$

A identidade trigonométrica $2\cos^2\theta = 1 + \cos 2\theta$ permite-nos escrever essa equação como

$$b^4 = r^4 + a^4 - 2a^2r^2\cos 2\theta. \qquad (8)$$

No caso particular $b = a$, a curva passa pela origem e a equação toma a forma muito mais simples:

$$r^2 = 2a^2\cos 2\theta. \qquad (9)$$

Reconhecemos nessa expressão a equação da lemniscata discutida no Exemplo 3 da Seção 16.2. Quando $b > a$, a curva consiste em um único laço, mas quando $b < a$, ela se parte em dois laços separados. Os casos $b < a$ e $b = a$ são ilustrados na Fig. 16.18, junto com dois casos de $b > a$. Em conjunto, essas curvas chamam-se *ovais de Cassini**.

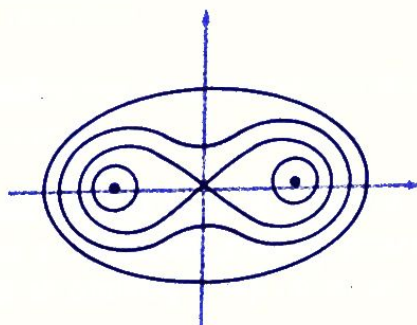



Figura 16.18 As ovais de Cassini.

Coordenadas polares são particularmente bastante adequadas para se trabalhar com seções cônicas, como veremos no exemplo seguinte.

Exemplo 3. Determine a equação polar da seção cônica com excentricidade e, foco na origem e estando a correspondente diretriz $x = -p$ à esquerda da origem.

Solução Com a notação da Fig. 16.19, a caracterização de foco-diretriz-excentricidade da seção cônica é

$$\frac{PF}{PD} = e \qquad \text{ou} \qquad PF = e \cdot PD. \qquad (10)$$

* O astrônomo italiano Giovanni Domenico Cassini pensou nessas curvas em 1680 no âmbito dos esforços para compreender os movimentos relativos da Terra e do Sol. Ele as propôs como alternativas às elipses de Kepler antes de Newton resolver o assunto com sua teoria do sistema solar, em 1687. Cassini descobriu diversos satélites de Saturno e também a chamada "divisão de Cassini" no anel de Saturno, mostrando que esse anel é formado por mais de um pedaço.

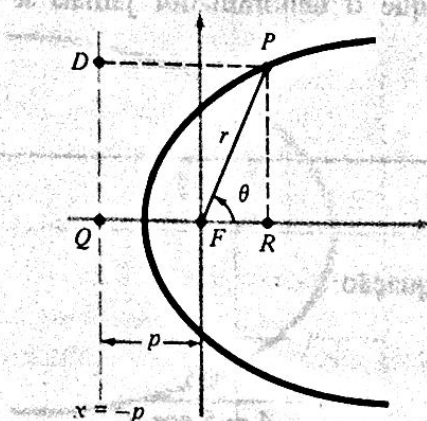



Figura 16.19

Recordamos que a curva será uma elipse, uma parábola ou uma hipérbole conforme seja $e < 1$, $e = 1$ ou $e > 1$. Examinando a figura, vemos que $PF = r$ e

$$\begin{aligned} PD &= QR = QF + FR \\ &= p + r\cos\theta, \end{aligned}$$

logo (10) fica

$$r = e(p + r\cos\theta).$$

Essa equação é fácil de resolver para r, obtendo-se

$$r = \frac{ep}{1 - e\cos\theta} \tag{11}$$

como a equação polar de nossa seção cônica.

Damos a seguir duas ilustrações concretas das idéias do Exemplo 3.

Exemplo 4 Determine a equação polar da cônica com excentricidade $\frac{1}{3}$, foco na origem e diretriz $x = -4$.

Solução Nós simplesmente substituímos $e = \frac{1}{3}$ e $p = 4$ em (11), obtendo

$$r = \frac{\frac{1}{3}(4)}{1 - \frac{1}{3}\cos\theta} = \frac{4}{3 - \cos\theta}.$$

A curva é uma elipse. Observe que o denominador jamais se anula, logo r é limitado para todos os θ.

Exemplo 5 Dada a cônica com equação

$$r = \frac{25}{4 - 5\cos\theta},$$

determine a excentricidade, localize a diretriz e identifique a curva.

Solução Iniciamos dividindo o numerador e o denominador por 4, para colocar a equação na forma exata de (11).

$$r = \frac{\frac{25}{4}}{1 - \frac{5}{4}\cos\theta}.$$

Agora vê-se imediatamente que $e = \dfrac{5}{4}$ e $ep = \dfrac{25}{4}$; logo $p = 5$. A diretriz é a reta $x = -5$ e a curva é uma hipérbole. Observe que o denominador aqui será zero quando $\cos\theta = \dfrac{4}{5}$; logo r torna-se infinito perto dessas direções.

Tendo em vista o Exemplo 3, vale a pena salientar que, se a diretriz for a reta $x = p$ à direita da origem, (Fig. 16.20), então $PD = p - r\cos\theta$. A equação $PF = e \cdot PD$ agora terá a forma

$$r = e(p - r\cos\theta),$$

e em vez de (11) teremos

$$r = \frac{ep}{1 + e\cos\theta}.$$

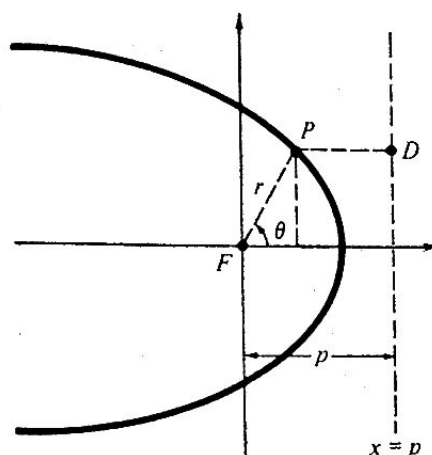



Figura 16.20

Coordenadas polares são muito convenientes para descrever certas espirais.

Exemplo 6 *A espiral de Arquimedes* (Fig. 16.21) pode ser definida como o lugar geométrico de um ponto P que parte da origem e move-se para fora a uma velocidade constante ao longo de um raio que, por sua vez, está rodando no sentido anti-horário, a uma velocidade constante a partir de sua posição inicial ao longo do eixo polar. Ambos os movimentos começam no mesmo instante. Como ambos r e θ são proporcionais ao tempo decorrido a partir do início dos movimentos, r é proporcional a θ e a equação polar da espiral é $r = a\,\theta$, onde a é uma constante positiva.

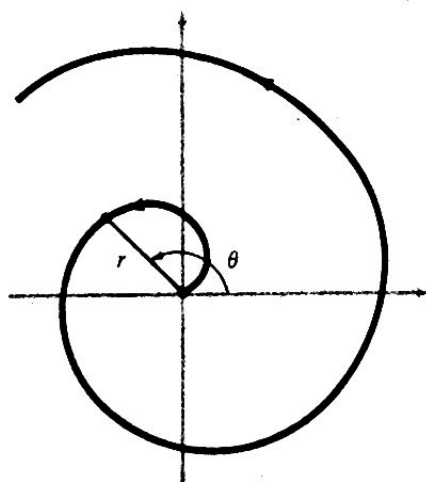



Figura 16.21 A espiral de Arquimedes

Na figura admitimos que θ começa em zero e cresce para valores positivos, como a definição implica. Entretanto, se desejamos considerar que θ seja negativo, então há outra parte da espiral que deliberadamente não esboçamos com o objetivo de não complicar a figura.

Exemplo 7 Na espiral discutida no Exemplo 6, r é diretamente proporcional a θ, $r = a\theta$. Consideramos agora o caso em que r é inversamente proporcional a θ,

$$r = \frac{a}{\theta} \qquad \text{ou} \qquad r\theta = a, \tag{12}$$

onde a é uma constante positiva. Para valores positivos de θ, o gráfico é a curva mostrada na Fig. 16.22; chama-se *espiral hiperbólica* por causa da semelhança formal da equação $r\theta = a$ com a equação $xy = a$, que representa uma hipérbole em coordenadas cartesianas.

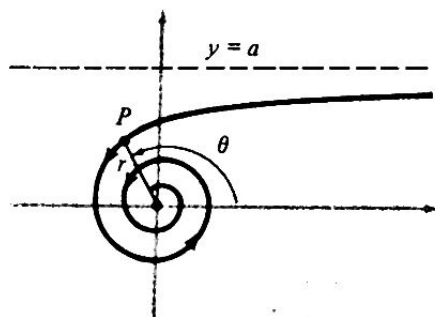



Figura 16.22 Uma espiral hiperbólica

Os aspectos essenciais do gráfico são facilmente notados, considerando-se $r = a/\theta$. Quando $\theta = 0$, não existe r; quando θ é pequeno e positivo, r é grande e positivo; e quando θ cresce a ∞, r decresce para 0. Em linguagem informal temos um ponto variável P sobre o gráfico vindo do infinito e se "enrolando" em torno da origem no sentido anti-horário num número infinito de espirais que se contraem a cada volta, ou seja, à medida que θ cresce indefinidamente. Para compreender o comportamento dessa curva para θ positivos pequenos, precisamos pensar no que ocorre a

$$y = r \operatorname{sen} \theta = a \frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta}.$$

Sabemos que

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta} = 1,$$

e, portanto,

$$\lim_{\theta \to 0} y = \lim_{\theta \to 0} a \frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta} = a.$$

Segue-se que a reta $y = a$ é uma assíntota da curva, como se vê na figura.

Se é permitido que θ seja negativo, obtemos uma outra parte da curva, que novamente não esboçamos para evitar confusão na figura. A natureza dessa outra parte é facilmente compreendida observando que, se r e θ são substituídas por $-r$ e $-\theta$, então a equação (12) permanece inalterada. Isto significa que para todo ponto (r, θ) sobre a curva, o ponto $(-r, ... \theta)$, que está localizado simetricamente em relação ao eixo y, está também sobre a curva. Assim, a outra parte é uma segunda espiral (imagem de espelho) que se enrola em torno da origem no sentido horário quando $\theta \to -\infty$.

Problemas

Nos Problemas 1 a 6 determine a equação polar da circunferência dada pelas condições apresentadas.

1. Centro $(4, \pi/6)$, raio 3.

2. Centro $(-3, \pi/3)$, raio 4.

3. Centro $(5, 0)$, raio 5.

4. Centro $(3, \pi/2)$, raio 3.

5. Centro sobre a reta $\theta = \pi/3$ e passando por $(6, \pi/2)$ e $(0, 0)$.

6. Centro $(5, \pi/4)$ e passando por $(8, 0)$.

7. Uma reta é traçada a partir da origem perpendicular à tangente à circunferência $r = 2a \cos \theta$. Determine a equação do lugar geométrico do ponto de interseção e esboce a curva.

8. Determine a equação cartesiana das ovais de Cassini (Exemplo 2) pela aplicação direta da condição $d_1^2 d_2^2 = b^4$.

9. Os valores máximo e mínimo de r para a lemniscata (9) são evidentemente $r = \sqrt{2}\, a$ e $r = 0$. Calcule os valores máximo e mínimo de r para as ovais de Cassini (8):

   (a) no caso de um laço $b = 2a$;

   (b) no caso de dois laços $b = \dfrac{1}{2} a$.

10. A equação $r = 4/(3 - \cos \theta)$ do Exemplo 4 representa uma elipse com um foco na origem. Esboce a curva, determine ambas as diretrizes e localize o centro.

11. Se uma seção cônica com excentricidade e tem foco na origem e diretriz $y = -p$ abaixo da origem, mostre que sua equação polar é $r = ep/(1 - e \operatorname{sen} \theta)$. Qual a equação polar se a diretriz for a reta $y = p$ acima da origem?

Calcule a excentricidade de cada uma das seguintes seções cônicas (dos Problemas 12 a 15) e esboce a curva.

12. $r = \dfrac{6}{1 - \cos\theta}$.

13. $r = \dfrac{10}{2 - \cos\theta}$.

14. $r = \dfrac{4}{2 + 4\cos\theta}$.

15. $r = \dfrac{18}{6 + \cos\theta}$.

16. Um foco de uma hipérbole com excentricidade $e = \dfrac{4}{3}$ está na origem e a diretriz correspondente é a reta $x = 7$ (ou $r \cos\theta = 7$). Determine a equação polar e as coordenadas polares do segundo foco e do centro e esboce a curva.

17. Quando $e > 1$, a equação $r = ep/(1 - e\cos\theta)$ representa uma hipérbole. Utilize essa equação para determinar os coeficientes angulares das assíntotas.

18. Escreva a equação $r = ep/(1 - e\cos\theta)$ em coordenadas cartesianas. Utilize os fatos estabelecidos no Capítulo 15, referentes às equações das cônicas em coordenadas cartesianas para mostrar que a equação dada representa uma parábola se $e = 1$, uma elipse se $0 < e < 1$ e uma hipérbole se $e > 1$.

19. Sendo $e < 1$, utilize métodos de cálculo para determinar as coordenadas polares do ponto da elipse $r = ep/(1 - e\cos\theta)$, que está

    (a) mais longe da origem;

    (b) mais perto da origem.

20. Calcule o comprimento do eixo maior da elipse do Problema 19. Além disso determine as coordenadas polares de seu centro.

21. Em suas tentativas para trissecionar um ângulo, Hippias de Elis, um líder dos sofistas do tempo de Sócrates, inventou uma nova curva, com os seguintes procedimentos. Considere um quadrado $OABC$ de lado a localizado no primeiro quadrante do plano xy (Fig. 16.23).

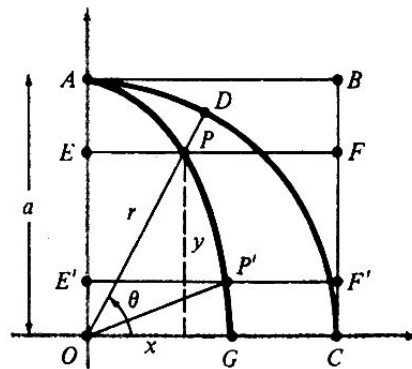



Figura 16.23 A quadratriz.

Gire OA no sentido horário em torno de O a uma velocidade constante até a posição OC. Ao mesmo tempo, mova Ab para baixo a uma velocidade constante até a posição OC. A *quadratriz* APG é o lugar geométrico do ponto P de interseção do raio que gira OD e do segmento que se move EF*.

(a) Determine a equação cartesiana da quadratriz
Sugestão: $y/a = \theta/(\pi/2)$; por quê?

(b) Determine a equação polar da quadratriz.

(c) Use a parte (b) para mostrar que $OG = 2a/\pi$.

(d) Papus de Alexandria (século IV d.C.) provou geometricamente que $ADC/OC = OC/OG$. Mostre que isto é equivalente ao resultado do enunciado na parte (c).

(e) Verifique a validade do seguinte procedimento para aplicar a quadratriz como instrumento para trissecionar um ângulo agudo arbitrário θ. Construa o ponto E' que trisseciona OE de modo que $OE' = \frac{1}{3}$ OE; trace $E'F'$ paralela a OC e seja P' o ponto em que essa reta intercepta a quadratriz; trace OP' e conclua que $< COP' = \frac{1}{3}$ θ**. [A parte (e) exige que o segmento OE seja trissecionado pelo ponto E'. A Fig. 16.24 mostra como esse ponto pode ser produzido por uma construção euclidiana (régua e compasso): marque um comprimento b qualquer três vezes consecutivas. Sobre uma reta qualquer OQ, obtendo o ponto R. Ligue R a E e trace a reta paralela a RE pelo primeiro ponto de divisão, interceptando OE em E'.]

---

* O ponto G não está definido como parte da quadratriz, pois OA atinge OC no mesmo instante em que AB atinge OC, logo não há ponto de interseção. Entretanto G é a posição-limite dos pontos da quadratriz que se aproximam do eixo x.

** Nos Problemas Suplementares mostramos como a quadratriz pode também ser utilizada para a quadratura de um círculo.

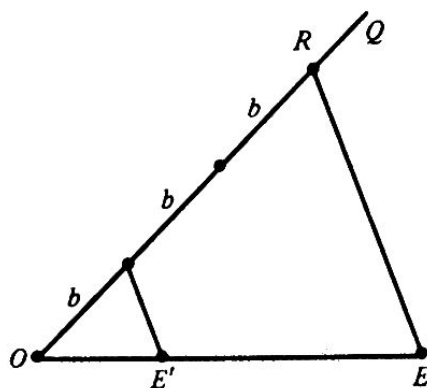



Figura 16.24 Trisseção do segmento *OE*.

22. No Problema 21, seja $a = \pi/2$; a equação cartesiana da quadratriz será $x = y \operatorname{cotg} y$. Troque x por y obtendo a equação $y = x \operatorname{cotg} x$ e use divisão de séries de potências para obter o resultado de Newton de que a área sob a quadratriz $y = x \operatorname{cotg} x$ de 0 a $x \leqslant \pi/2$ é

$$x - \tfrac{1}{9}x^3 - \tfrac{1}{225}x^5 - \tfrac{2}{6615}x^7 - \cdots.$$

23. Verifique a validade do seguinte método para trissecionar um ângulo *AOB*, utilizando a espiral de Arquimedes, $r = a\theta$ (Fig. 16.25):

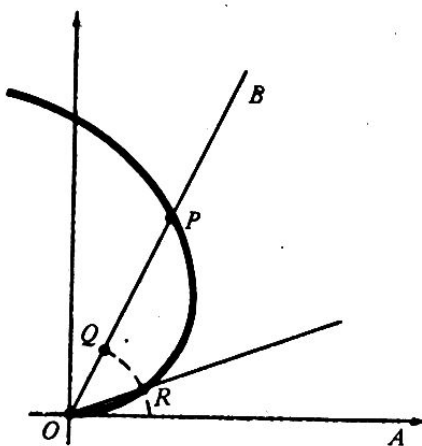



Figura 16.25 Trisseção do ângulo *AOB*.

(a) suponha que *OB* intercepta a espiral em *P* e construa o ponto *Q* que trisseciona *OP*; $OQ = \dfrac{1}{3}\, OP$;

(b) construa a circunferência com centro *O* e raio *OQ* e suponha que essa circunferência intercepta a espiral em *R*;

(c) trace *OR* e conclua que $\angle AOR = \dfrac{1}{3} \angle AOB$*

---

* Nos Problemas Suplementares mostramos como a espiral de Arquimedes pode ser utilizada também para a quadratura do círculo.

16.4 COMPRIMENTO DE ARCO E RETAS TANGENTES

Considere uma curva cuja equação polar é $r = f(\theta)$ e denote por s o comprimento do arco medido ao longo da curva a partir de um ponto dado num sentido especificado (Fig. 16.26).

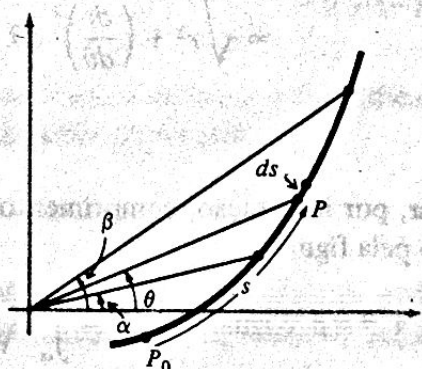



Figura 16.26

Da Seção 7.5 sabemos que o elemento diferencial do comprimento de arco ds é dado pela fórmula

$$ds^2 = dx^2 + dy^2.$$

Mas $x = r\cos\theta$ e $y = r\,\text{sen}\,\theta$ e derivando com relação a θ pela regra do produto, obtemos

$$\frac{dx}{d\theta} = -r\,\text{sen}\,\theta + \cos\theta\,\frac{dr}{d\theta} \quad \text{e} \quad \frac{dy}{d\theta} = r\cos\theta + \text{sen}\,\theta\,\frac{dr}{d\theta}$$

ou, equivalentemente, na notação de diferenciais,

$$dx = -r\,\text{sen}\,\theta\,d\theta + \cos\theta\,dr \quad \text{e} \quad dy = r\cos\theta\,d\theta + \text{sen}\,\theta\,dr. \tag{1}$$

Segue-se dessas fórmulas que

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2 \\ &= r^2\text{sen}^2\,\theta\,d\theta^2 - 2r\,\text{sen}\,\theta\cos\theta\,dr\,d\theta + \cos^2\theta\,dr^2 \\ &\qquad + r^2\cos^2\theta\,d\theta^2 + 2r\,\text{sen}\,\theta\cos\theta\,dr\,d\theta + \text{sen}^2\,\theta\,dr^2 \\ &= r^2\,d\theta^2 + dr^2. \end{aligned}$$

Assim, temos

$$ds^2 = r^2\,d\theta^2 + dr^2 \tag{2}$$

ou

$$ds = \sqrt{r^2\,d\theta^2 + dr^2} = \sqrt{\left(r^2 + \frac{dr^2}{d\theta^2}\right) d\theta^2}$$

$$= \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta.$$

Essa fórmula possibilita-nos computar, por integração, comprimentos de arco de curvas dadas em coordenadas polares, como é sugerido pela figura:

$$\text{Comprimento de arco de } \theta = \alpha \text{ a } \theta = \beta \text{ é igual a } \int ds = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta.$$

Exemplo 1 Calcule o comprimento do arco da cardióide $r = a(1 - \cos\theta)$.

Solução Essa curva nos é bem familiar (Fig. 16.29). Da equação da curva, temos $dr = a \operatorname{sen}\theta\, d\theta$, logo a fórmula (2) dá

$$\begin{aligned} ds^2 &= a^2(1-\cos\theta)^2\, d\theta^2 + a^2 \operatorname{sen}^2\theta\, d\theta^2 \\ &= a^2[(1-\cos\theta)^2 + \operatorname{sen}^2\theta]\, d\theta^2 \\ &= 2a^2(1-\cos\theta)\, d\theta^2. \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{2}a\sqrt{1-\cos\theta}\, d\theta \\ &= 2a|\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}\theta|\, d\theta, \end{aligned}$$

como $1 - \cos\theta = 2\operatorname{sen}^2 \dfrac{1}{2}\theta$. Sabemos que $\operatorname{sen}\dfrac{1}{2}\theta \geqslant 0$ para $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, logo, podemos retirar os sinais de valor absoluto e escrever

$$\begin{aligned} s = \int ds &= \int_0^{2\pi} 2a \operatorname{sen}\frac{1}{2}\theta\, d\theta \\ &= -4a\cos\frac{1}{2}\theta\Big]_0^{2\pi} = 4a - (-4a) = 8a. \end{aligned}$$

A simetria dessa curva em torno do eixo horizontal garante que poderíamos obter o comprimento total, integrando de 0 a π e multiplicando por 2.

$$s = 2\int_0^{\pi} 2a \operatorname{sen}\frac{1}{2}\theta\, d\theta = -8a\cos\frac{1}{2}\theta\Big]_0^{\pi}$$

$$= 0 - (-8a) = 8a.$$

Como assunto de rotina, devemos nos acostumar a simplificar o cálculo de integrais tanto quanto possível explorando qualquer simetria disponível.

A fórmula acima para ds em coordenadas polares pode também ser utilizada para calcular áreas de superfícies de revolução, como está explicado na Seção 7.6.

Exemplo 2 Calcule a área da superfície gerada quando a lemniscata $r^2 = 2, a^2 \cos 2\theta$ é girada em torno do eixo x.

Solução Um elemento de comprimento de arco ds (Fig. 16.27) gera um elemento de área de superfície

$$dA = 2\pi y\, ds,$$

onde

$$y = r\operatorname{sen}\theta \quad \text{e} \quad ds = \sqrt{r^2\, d\theta^2 + dr^2},$$

logo

$$dA = 2\pi r \operatorname{sen}\theta\sqrt{r^2\, d\theta^2 + dr^2} = 2\pi \operatorname{sen}\theta\sqrt{r^4\, d\theta^2 + r^2\, dr^2}. \tag{3}$$

Da equação da curva obtemos

$$r\, dr = -2a^2 \operatorname{sen} 2\theta\, d\theta,$$

logo

$$r^4\, d\theta^2 + r^2\, dr^2 = (4a^4\cos^2 2\theta + 4a^4\operatorname{sen}^2 2\theta)\, d\theta^2 = 4a^4\, d\theta^2$$

e (3) se torna

$$dA = 4\pi a^2 \operatorname{sen}\theta\, d\theta.$$

A área da superfície total é o dobro da área da metade direita, gerada quando ds se move ao longo da parte da lemniscata do primeiro quadrante, isto é, quando θ cresce de 0 a $\pi/4$. Temos portanto

$$A = 2\int_0^{\pi/4} 4\pi a^2 \operatorname{sen}\theta\, d\theta = -8\pi a^2 \cos\theta\Big]_0^{\pi/4} = -8\pi a^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) = 4\pi a^2(2-\sqrt{2}).$$

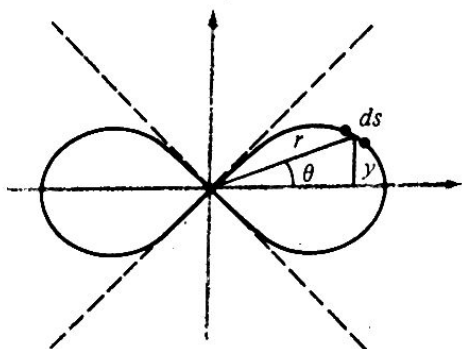



Figura 16.27

Ao trabalhar com coordenadas cartesianas, especificamos o sentido de uma curva $y = f(x)$ num ponto pelo ângulo α do semi-eixo positivo dos x à reta tangente. Entretanto, no caso de uma curva em coordenadas polares, $r = f(\theta)$, é mais fácil trabalhar com o ângulo ψ (psi) do raio vetor à reta tangente (Fig. 16.28).

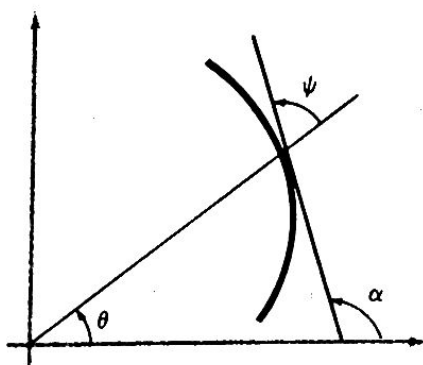



Figura 16.28

Vemos a partir da figura que $\alpha = \theta + \psi$, logo $\psi = \alpha - \theta$ e como $\operatorname{tg}\alpha = dy/dx$ e $\operatorname{tg}\theta = y/x$, a fórmula de subtração para a tangente dá

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}\psi &= \operatorname{tg}(\alpha - \theta) \\ &= \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\theta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\ \operatorname{tg}\theta}\end{aligned}$$

$$= \frac{dy/dx - y/x}{1 + (dy/dx)\cdot(y/x)}$$

$$= \frac{x\,dy - y\,dx}{x\,dx + y\,dy}. \tag{4}$$

A razão pela qual ψ é um ângulo conveniente para se usar com coordenadas polares é que (4) pode ser colocada numa forma muito simples. Primeiro, o fato de que $x^2 + y^2 = r^2$ revela que $x\,dx + y\,dy = r\,dr$. A seguir, obtemos a partir de (1)

$$\begin{aligned} x\,dy - y\,dx &= r^2 \cos^2\theta\, d\theta + r \operatorname{sen}\theta \cos\theta\, dr + r^2 \operatorname{sen}^2\theta\, d\theta - r\operatorname{sen}\theta\cos\theta\, dr \\ &= r^2\, d\theta. \end{aligned}$$

Substituindo essas expressões em (4), encontramos que

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{r\,d\theta}{dr} = \frac{r}{dr/d\theta}. \tag{5}$$

Essa fórmula é o instrumento básico para trabalhar com retas tangentes a curva dadas em coordenadas polares.

Exemplo 3 Calcule o ângulo ψ para a cardióide $r = a(1 - \cos\theta)$.

Solução Essa curva é mostrada na Fig. 16.29.

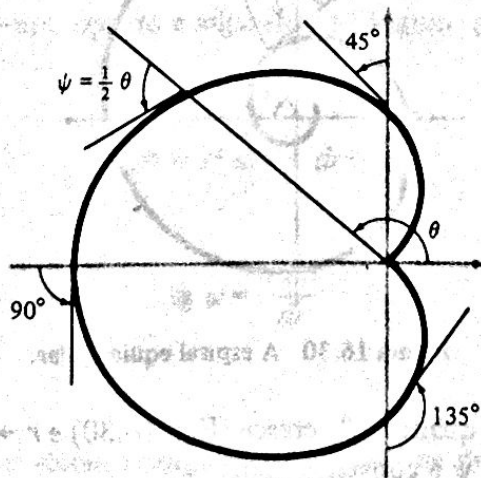



Figura 16.29

A equação da curva dá

$$\frac{dr}{d\theta} = a \operatorname{sen}\theta,$$

logo

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\psi = \frac{r}{dr/d\theta} &= \frac{a(1-\cos\theta)}{a \operatorname{sen}\theta} \\ &= \frac{2\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}\theta}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\theta} \\ &= \operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta. \end{aligned}$$

Temos portanto $\psi = \frac{1}{2}\theta$, e quando θ cresce de 0 a 2π, ψ cresce de 0 a π, como indicado na figura.

Como outro exemplo do uso da fórmula da tg ψ, consideramos uma curva interessante chamada *espiral exponencial.*

Exemplo 4 Calcule o ângulo ψ para a curva $r = a\,e^{b\theta}$, onde $a > 0$ e $b \neq 0$

Solução Se $b > 0$, vemos que r cresce quando θ cresce (Fig. 16.30).

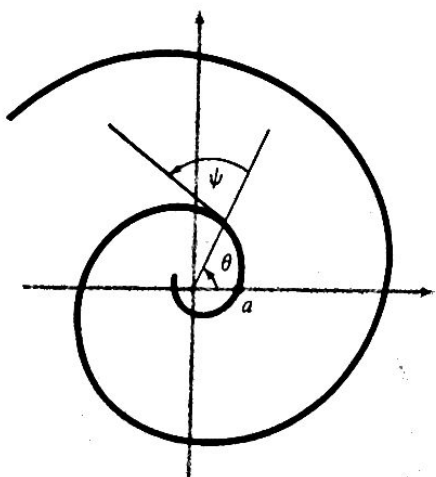



Figura 16.30 A espiral eqüiangular.

Além disso, é claro que $r \to \infty$ quando θ cresce (Fig. 16.30) e $r \to 0$ quando $\theta \to -\infty$. O aspecto característico dessa curva é que ψ é constante, pois

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{r}{dr/d\theta} = \frac{ae^{b\theta}}{abe^{b\theta}} = \frac{1}{b}.$$

Isto nos possibilita calcular ψ: $\psi = \text{arc tg}\,(1/b)$. Se $b < 0$, a curva se fecha para a origem em vez de para fora quando θ cresce. A curva $r = a\,e^{b\theta}$ é, às vezes, chamada de *espiral eqüiangular* por causa da constância de ψ.

Os dois principais fatos desta seção, as fórmulas (2) e (5), são fáceis de ser lembrados usando a Fig. 16.31 como artifício mnemônico.

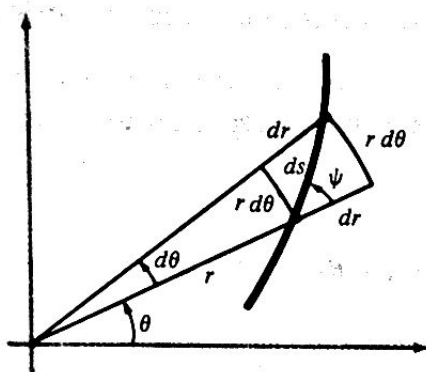



Figura 16.31

Nessa figura temos um comprimento de arco ds unindo dois pontos com coordenadas polares r, θ e $r + dr, \theta + d\theta$. A parte exterior da figura é aproximadamente um retângulo e o "triângulo diferencial" da direita é aproximadamente um triângulo retângulo, tendo hipotenusa ds e catetos $r\,d\theta$ e dr, respectivamente, oposto e adjacente ao ângulo ψ. As fórmulas

$$ds^2 = r^2\,d\theta^2 + dr^2$$

e

$$\text{tg}\,\psi = \frac{r\,d\theta}{dr}$$

são agora auto-evidentes a partir desse triângulo, pelo Teorema de Pitágoras e pela definição de tangente de ângulos no triângulo retângulo. Não é preciso dizer que esse modo de raciocinar não constitui prova, mas, apesar disso, é muito útil. É também um bom exemplo do verdadeiro espírito de Leibniz no Cálculo, no sentido repetidamente explanado no Capítulo 7.

Problemas

1. Para a espiral de Arquimedes $r = a\theta$ $(\theta \geqslant 0)$, mostre que $\psi = 45^\circ$ quando $\theta = 1$ radiano e também que $\psi \to 90^\circ$ quando a espiral se enrola em torno da origem no sentido anti-horário. Esboce a curva e mostre o ângulo ψ para a direção $\theta = 1$ radiano.

2. Se duas curvas $r = f_1(\theta)$ e $r = f_2(\theta)$ se interceptam num ponto diferente da origem para um valor comum de θ, mostre que, analisando uma figura, o ângulo γ entre suas tangentes pode ser determinado pela fórmula

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\operatorname{tg} \psi_2 - \operatorname{tg} \psi_1}{1 + \operatorname{tg} \psi_2 \operatorname{tg} \psi_1}.$$

Em que circunstâncias as duas curvas se interceptarão ortogonalmente (em ângulos retos)?

3. Esboce cada um dos seguintes pares de curvas numa única figura e use o resultado do Problema 2 para mostrar que elas se interceptam ortogonalmente:

   (a) $r = 2a \operatorname{sen} \theta$, $r = 2b \cos \theta$;
   (b) $r = a(1 + \cos \theta)$, $r = b(1 - \cos \theta)$, exceto na origem;
   (c) $r = a/(1 - \cos \theta)$, $r = b/(1 + \cos \theta)$;
   (d) $r = a/(1 - \cos \theta)$, $r = a(1 - \cos \theta)$;
   (e) $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$, $r^2 = 2b^2 \operatorname{sen} 2\theta$, exceto na origem.

4. Mostre que as espirais $r = \theta$ e $r = 1/\theta$ se interceptam ortogonalmente em $\theta = 1$.

5. Calcule a área da superfície gerada, girando a cardióide $r = a(1 - \cos \theta)$ em torno do eixo x.

6. A lemniscata $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$ é girada em torno do eixo y. Calcule a área da superfície de revolução gerada dessa maneira.

7. Considere a tangente num ponto P da espiral $r = a\theta$ $(\theta \geqslant 0)$ e suponha que a reta OT, que é perpendicular a OP na origem 0, encontra essa tangente em T (Fig. 16.32). Mostre que o segmento OT é igual ao arco circular ASP com centro O traçado do eixo polar ao ponto P.

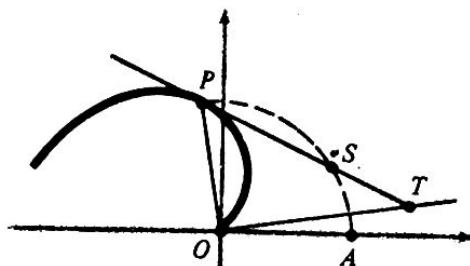



Figura 16.32

8. Em que ângulo a lemniscata $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$ intercepta a circunferência $r = a$?

9. Na metade superior da parábola $r = a(1 - \cos \theta)$, mostre que $\text{tg}\ \psi = -\text{tg}\ \frac{1}{2}\theta$ e conclua que $\psi = \pi - \frac{1}{2}\theta$. Mostre que isto estabelece a seguinte propriedade de reflexão: a tangente em qualquer ponto da parábola forma ângulos iguais com a horizontal por aquele ponto e com a reta da origem ao ponto.

10. Mostre que a parte da espiral hiperbólica $r\theta = 1$ de $\theta = \pi/2$ a $\theta = \infty$ tem comprimento infinito.

11. Calcule a área de superfície gerada girando a circunferência $r = 2a \cos \theta$ em torno da reta

    (a) $\theta = 0$;
    (b) $\theta = \pi/2$.

12. Calcule o comprimento de uma volta da espiral $r = \theta$, de $\theta = 0$ a $\theta = 2\pi$.

13. Se uma curva $r = f(\theta)$ tem a propriedade de que ψ é constante $\neq \pi/2$, mostre que a curva deve ser a espiral exponencial $r = ae^{b\theta}$.

14. Use integração para calcular o comprimento da circunferência $r = 2a \cos \theta$.

15. Mostre que, se um ponto se move com velocidade constante, ao longo da espiral exponencial $r = a\,e^{b\theta}$, então o raio r muda a uma taxa constante.

16. Se uma curva $r = f(\theta)$ tem a propriedade de que $\psi = \frac{1}{2}\theta$, mostre que a curva deve ser a cardióide $r = a(1 - \cos \theta)$.

17. Calcule o comprimento da espiral exponencial $r = e^{-\theta}$ de $r = 1$ a origem.

18. Esboce a espiral exponencial $r = a\,e^{b\theta}$ para o caso em que a é positivo e b é negativo, e mostre que o comprimento de arco de $\theta = 0$ a $\theta = \infty$ é igual ao comprimento da parte da tangente em $\theta = 0$ entre os eixos x e y.

19. Mostre que o comprimento L do laço direito da lemniscata $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$ pode ser expresso na forma

$$L = \sqrt{2}a \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}$$

$$= \sqrt{2}a \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - 2\,\text{sen}^2\,\theta}}.$$

Introduza a nova variável $u = \operatorname{tg}\theta$ e mostre que

$$\operatorname{sen}^2\theta = \frac{u^2}{1+u^2} \quad \text{e} \quad d\theta = \frac{du}{1+u^2},$$

e que portanto

$$L = \sqrt{2}a \int_{-1}^{1} \frac{du}{\sqrt{1-u^4}}*.$$

16.5 ÁREAS EM COORDENADAS POLARES

Nosso problema aqui é calcular a área A da região limitada por uma curva polar $r=f(\theta)$ e duas semi-retas $\theta = \alpha$ e $\theta = \beta$ (Fig. 16.33). Nossa abordagem é modelada pelo "elemento de área diferencial", descrito na Seção 7.1

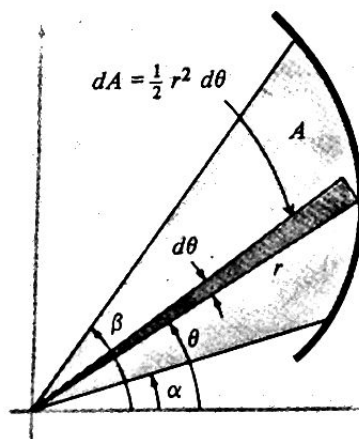



Figura 16.33

Ao trabalhar com áreas em coordenadas cartesianas, usamos faixas retangulares finas e exploramos o fato de que a área de um retângulo é igual ao comprimento vezes a largura. Aqui precisamos do fato ilustrado na Fig. 16.34 de que a área de um setor circular de raio r e ângulo central θ (medido em radianos) é $\frac{1}{2} r^2 \theta$.

* Esta é uma integral elíptica especial muito importante nas investigações de Gauss mencionadas num rodapé da Seção 16.2. Veja também o Problema 16 da Seção 10.8 (Volume I).

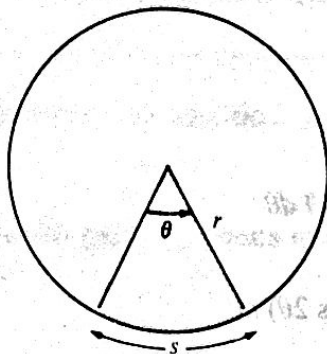



Figura 16.34

Na Fig. 16.33 nosso elemento de área dA é a área do setor muito fino com raio r e ângulo central $d\theta$, logo

$$dA = \tfrac{1}{2}r^2\,d\theta. \tag{1}$$

Igualmente o nosso procedimento na Seção 7.1, pensamos na área total A como resultado da soma desses elementos de área dA quando nosso setor fino varre toda a região, isto é, quando θ cresce de α a β:

$$A = \int dA = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2}r^2\,d\theta. \tag{2}$$

Novamente, a essência do processo de integração é que calculamos o todo de uma quantidade, cortando-o num grande número de pequenos pedaços convenientes, e depois juntamos esses pedaços.

Daremos um enfoque matematicamente mais sofisticado à fórmula (2) na Observação 2. No entanto, primeiro ilustramos seu uso em vários exemplos. Como os estudantes observarão nesses exemplos, é essencial ao resolvermos problemas de área termos uma boa idéia do que a curva parece, pois os limites corretos de integração serão determinados pela figura.

Exemplo 1 Use integração para calcular a área do círculo $r = 2a\cos\theta$.

Solução O círculo completo (Fig. 16.35) é varrido quando θ cresce de $-\pi/2$ a $\pi/2$. Por simetria, podemos integrar de 0 a $\pi/2$ e multiplicar por 2,

$$A = 2\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} r^2\, d\theta = 2\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} \cdot 4a^2 \cos^2\theta\, d\theta$$

$$= 4a^2 \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)\, d\theta$$

$$= 2a^2\left(\theta + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\theta\right)\Big]_0^{\pi/2} = \pi a^2.$$

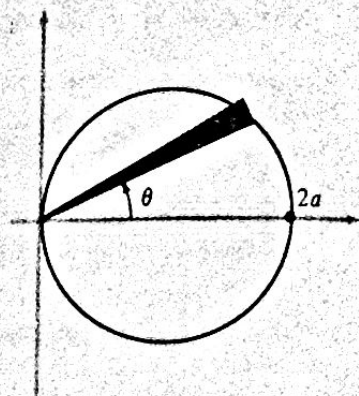



Figura 16.35

Naturalmente esperávamos essa resposta, pois nosso círculo tem raio a, mas é tranqüilizador obter um resultado familiar por um novo método.

Exemplo 2 Calcule a área total englobada pela lemniscata $r^2 = 2a^2 \cos\theta$ (Fig. 16.36).

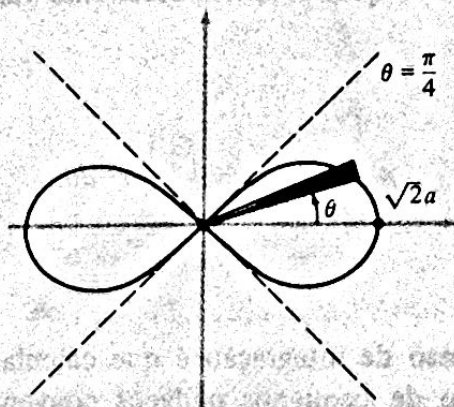



Figura 16.36

Solução Por simetria, calculamos a área da parte do primeiro quadrante e multiplicamos por 4:

$$A = 4\int_0^{\pi/4} \frac{1}{2} r^2\, d\theta = 4\int_0^{\pi/4} \frac{1}{2} \cdot 2a^2 \cos 2\theta\, d\theta$$

$$= 4a^2 \int_0^{\pi/4} \cos 2\theta\, d\theta = 2a^2 \operatorname{sen} 2\theta\Big]_0^{\pi/4} = 2a^2.$$

Esse problema fornece uma boa ilustração do valor da exploração da simetria, pois se nós integrássemos descuidadamente por todo o caminho de 0 a 2π, esquecendo que r^2 é, às vezes, positivo e, às vezes, negativo, nossa resposta final seria 0, o que está obviamente errado.

Exemplo 3 Calcule a área no interior do círculo $r = 6a \cos \theta$ e exterior à cardióide $r = 2a(1 + \cos \theta)$.

Solução Igualando os r e resolvendo para θ, vemos que as curvas se interceptam no primeiro quadrante em $\theta = \pi/3$ (Fig. 16.37)

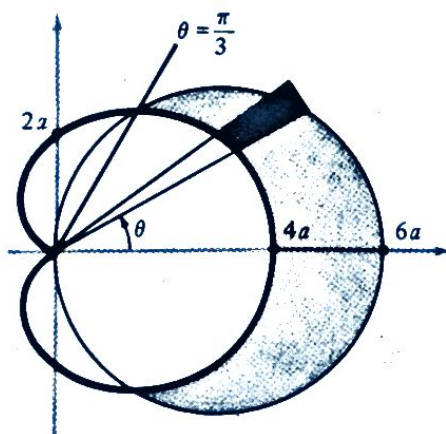



Figura 16.37

O elemento de área indicado é

$$\begin{aligned} dA &= \tfrac{1}{2}(r_{\text{círculo}})^2\, d\theta - \tfrac{1}{2}(r_{\text{cardióide}})^2\, d\theta \\ &= \tfrac{1}{2}[(r_{\text{círculo}})^2 - (r_{\text{cardióide}})^2]\, d\theta \\ &= \tfrac{1}{2}[36a^2 \cos^2 \theta - 4a^2(1 + \cos \theta)^2]\, d\theta \\ &= 2a^2(8 \cos^2 \theta - 1 - 2 \cos \theta)\, d\theta. \end{aligned}$$

Por simetria, a área que procuramos é o dobro da área do primeiro quadrante, logo,

$$\begin{aligned} A &= 2 \int_0^{\pi/3} 2a^2(8 \cos^2 \theta - 1 - 2 \cos \theta)\, d\theta \\ &= 4a^2 \int_0^{\pi/3} [4(1 + \cos 2\theta) - 1 - 2 \cos \theta]\, d\theta \\ &= 4a^2 \Big[3\theta + 2 \operatorname{sen} 2\theta - 2 \operatorname{sen} \theta \Big]_0^{\pi/3} = 4\pi a^2. \end{aligned}$$

Observação 1 As idéias desta seção têm uma importante aplicação à parte da Astronomia relativa ao sistema solar. Considere um ponto P movendo-se ao longo de uma curva que tem equação polar $r = f(\theta)$. Podemos pensar em P como um planeta movendo-se ao longo de sua órbita, com o Sol na origem. Se A for a área varrida pelo raio OP de uma direção fixa α a uma direção variável θ (Fig. 16.38), então teremos

$$dA = \tfrac{1}{2}r^2\, d\theta.$$

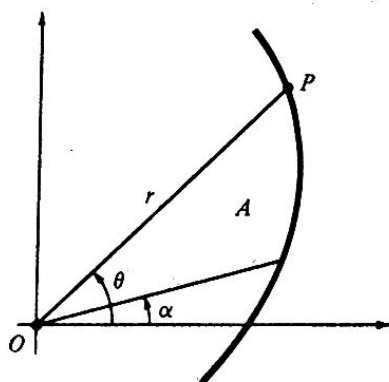



Figura 16.38

Sendo ambos A e θ encarados como funções do tempo t, então vemos que

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\, r^2 \frac{d\theta}{dt}.$$

A derivada dA/dt é, naturalmente, a taxa de variação da área A. A segunda Lei do Movimento Planetário de Kepler diz que um planeta move-se de tal modo que o raio que une o planeta ao Sol varre áreas a uma taxa constante. Isto significa que dA/dt é constante, o que por sua vez significa que

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = \text{constante} \tag{3}$$

para todo planeta. Assim, por exemplo, se uma órbita de um planeta leva-o duas vezes mais próximo da origem, então sua velocidade angular $d\theta/dt$ deve crescer de um fator 4. Esse fato tem largas implicações que examinaremos mais completamente na última seção do próximo capítulo.

Observação 2 Reconsideramos brevemente a fórmula (2) para a área mostrada na Fig. 16.33. Nosso objetivo é lembrar aos estudantes o ponto de vista desenvolvido na Seção 6.4, ou seja, de que uma integral definida é limite de somas aproximadoras. Como é usual, começamos nossa análise com uma subdivisão do intervalo de integração $[\alpha, \beta]$:

$$\alpha = \theta_0 < \theta_1 < \cdots < \theta_n = \beta.$$

Para $k = 1, 2, ..., n$, sejam m_k e M_k os valores mínimo e máximo de $f(\theta)$ no k-ésimo intervalo $[\theta_{k-1}, \theta_k]$ de comprimento $\Delta\theta_k = \theta_k - \theta_{k-1}$. Além disso, seja ΔA_k a área limitada pela curva $r = f(\theta)$ correspondente a esse subintervalo. Na Fig. 16.39 mostramos a área ΔA_k exprimida entre as áreas do setor inscrito com raio $r = m_k$ e o setor circunscrito com raio $r = M_k$. Temos portanto

$$\tfrac{1}{2}m_k^2\,\Delta\theta_k \leq \Delta A_k \leq \tfrac{1}{2}M_k^2\,\Delta\theta_k.$$

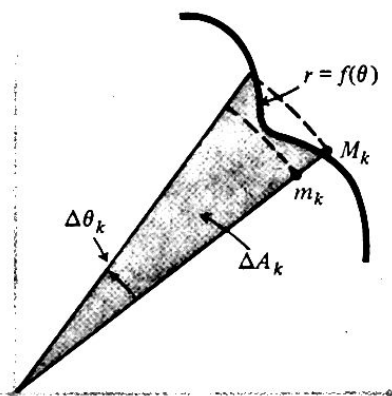



Figura 16.39

Somando essas desigualdades de $k = 1$ a $k = n$, obtemos

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} m_k^2\,\Delta\theta_k \leq A \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} M_k^2\,\Delta\theta_k,$$

pois A é a soma dos ΔA_k's. Agora variamos a subdivisão da maneira descrita na Seção 6.4, de modo que max $\Delta\theta_k \to 0$. Então cada uma dessas somas tende à integral definida

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} f(\theta)^2\,d\theta$$

para toda função contínua $r = f(\theta)$. Como a área A está exprimida entre essas somas, concluímos legitimamente que

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} f(\theta)^2\,d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} r^2\,d\theta,$$

que é (2).

Problemas

1. Calcule a área englobada pela cardióide $r = a(1 + \cos\theta)$.

2. Calcule a área entre a parábola $r = 8/(1 - \cos\theta)$ e o eixo y.

3. Mostre que a área dentro da primeira volta da espiral $r = a\theta$, isto é, para $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, é igual a um terço da área do círculo que passa pela extremidade dessa volta e tem centro na origem*.

4. Calcule a área total do interior da rosa $r = \text{sen } 2\theta$.

5. Calcule a área total do interior da rosa $r = \text{sen } 3\theta$.

6. Calcule a área do interior do menor laço da limaçon $r = 1 + 2\cos\theta$.

7. Calcule a área entre os dois laços da limaçon $r = 1 + 2\cos\theta$.

8. Calcule a área entre a circunferência $r = 2a\cos\theta$ e a reta $y = x$.

   (a) por integração;

   (b) por geometria elementar.

9. Calcule a área que está no interior de ambas as curvas $r = a\cos\theta$ e $r = a(1 - \cos\theta)$.

10. Calcule a área que está no interior de ambas as curvas $r = a$ e $r^2 = 2a^2\cos 2\theta$.

11. Use integração em coordenadas polares para mostrar que a área do retângulo limitado por $x = 0, y = 0, x = a, y = b$ é ab.

12. Calcule a área comum às duas circunferências $r = 2a\cos\theta$ e $r = 2b\text{ sen }\theta$.

13. Mostre que a área entre a cissóide $r = 2a$ $\sec\theta - \cos\theta)$ e sua assíntota $x = 2a$ (veja o Problema 12 da Seção 16.2) é três vezes a área do círculo gerador.

14. Na equação (3) mostre que o valor da constante é $2A_e/T$, onde A_e é a área da órbita elíptica e T é o tempo exigido para o planeta percorrer uma vez sua órbita.

---

* Essa afirmação e o resultado do Problema 7 da Seção 16.4 são os principais teoremas provados por Arquimedes em seu tratado *Sobre Espirais* (Proposições 20 e 24).

Problemas Suplementares do Capítulo 16

Seção 16.2

1. Transforme a equação cartesiana dada na equação polar equivalente:

(a) $y = 4x$;
(b) $4x^2 + 9y^2 = 36$;
(c) $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$;
(d) $2x - 5y = 3$;
(e) $y^2 = 4x$;
(f) $x^2 + y^2 - 4y = \sqrt{x^2 + y^2}$;
(g) $x^3 + y^3 = 12xy$.

2. Transforme a equação polar dada na equação cartesiana correspondente:

(a) $r = -3$;
(b) $\theta = 3\pi/4$;
(c) $r \operatorname{sen} \theta = -5$;
(d) $r = 2 \sec \theta$;
(e) $r^2 = \operatorname{sen} 2\theta$;
(f) $r = \cos 2\theta$;
(g) $r = \operatorname{sen} 3\theta$;
(h) $r = \cos 3\theta$;
(i) $r^2 = \operatorname{sen}^2 \theta \ \operatorname{tg} \theta$.

3. Determine todos os pontos de interseção dos seguintes pares de curvas:

(a) $r \operatorname{sen} \theta = a$, $r \cos \theta = a$;
(b) $r = a(1 + \cos \theta)$, $r = a(1 - \operatorname{sen} \theta)$;
(c) $r = a \cos 2\theta$, $4r \cos \theta = \sqrt{3}a$;
(d) $r \operatorname{sen} \theta = 3$, $r = 6 \operatorname{sen} \theta$;
(e) $r = 1 + \cos \theta$, $r^2 = \frac{1}{2} \cos \theta$;
(f) $r = a$, $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$;
(g) $r = a(1 + \operatorname{sen} \theta)$, $r = 2a \cos \theta$;
(h) $r \cos \theta = 2$, $r \operatorname{sen} \theta + 2\sqrt{3} = 0$;
(i) $r = 2 \operatorname{sen}^2 \theta$, $r = -2$;
(j) $r \cos \theta = 1$, $r = 2 \cos \theta + 1$;
(k) $r = 1 + \cos \theta$, $r = 3 \cos \theta$;
(l) $r = a(1 + \cos \theta)$, $r = a(1 + \operatorname{sen} \theta)$;
(m) $r = a \operatorname{sen} 2\theta$, $r = a(1 - \cos 2\theta)$.

4. Diocles criou sua cissóide para resolver o problema grego clássico da duplicação de um cubo, isto é, construção de um segundo cubo cujo volume fosse o dobro do volume do cubo dado. Sendo OA no Problema 12 da Seção 16.2 a aresta do cubo dado, a aresta do segundo cubo deverá ter comprimento $\sqrt[3]{2}\,OA$. Verifique que a seguinte construção produz tal comprimento. Seja D um ponto do semi-eixo positivo dos y tal que $OD = 2\,OA$; seja E o ponto de interseção de AD com a cissóide. Prolongue OE até interceptar a assíntota $x = 2a$ em F. Então $(AF)^3 = 2\,(OA)^3$; logo AF é o comprimento pedido*. Sugestão:, sendo $E = (x, y)$, mostre que $y^3 = 2x^3$.

5. Verifique que a seguinte construção, usando a conchóide discutida no Problema 15 da Seção 16.2, trisseciona o ângulo dado BOP (Fig. 16.40).

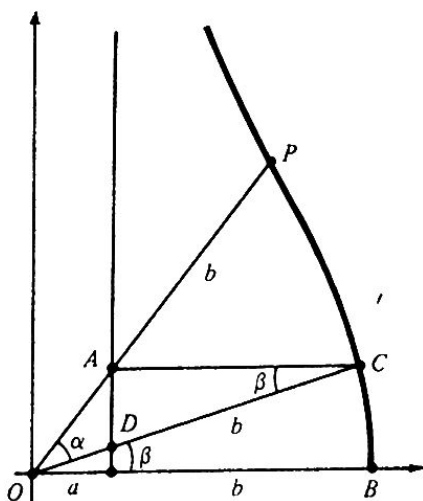



Figura 16.40

Trace uma reta qualquer $x = a$ e seja A o ponto em que ela intercepta OP. Forme a conchóide determinada pelos números a e b, onde $b = 2\,OA$. Sendo C o ponto em que a reta horizontal por A intercepta essa conchóide, seja D o ponto em que OC intercepta a reta $x = a$, de modo que $DC = b = 2\,OA$. Seja α o ângulo POC e β o ângulo BOC, de modo que o ângulo dado BOP fique sendo $\alpha + \beta$. Então, pela Lei dos Senos, teremos

$$\frac{OA}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{AC}{\operatorname{sen}\alpha},$$

---

* Hipócrates de Chios (veja a Seção 6.2 do Volume I) reduziu o problema de duplicar um cubo de aresta a ao problema de construir duas médias proporcionais x e y entre a e $2a$:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}.$$

Dessas equações, temos $x^2 = ay$ e $xy = 2a^2$ e, eliminando y, obtemos $x^3 = 2a^3$. Assim x é a aresta de um cubo que tem o dobro do volume do primeiro cubo. Esse valor é a coordenada x do ponto de interseção da parábola $x^2 = ay$ com a hipérbole $xy = 2a^2$; logo, o problema de duplicar um cubo é resolvido se concordarmos em usar essas curvas como instrumentos. Os historiadores da Matemática acreditam que as seções cônicas podem ter surgido exatamente dessa maneira.

logo

$$\frac{OA}{\operatorname{sen}\beta}=\frac{2\ OA\cos\beta}{\operatorname{sen}\alpha}$$

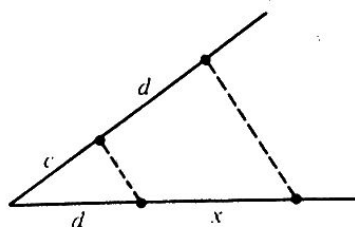
e sen $\alpha = 2$ sen β cos β = sen 2β. Portanto $\alpha = 2\beta$ e $< BOP = 3\beta$; logo $\beta = \frac{1}{3} \angle BOP$ e a reta OC trisseciona o ângulo dado.

6. Uma conchóide genérica pode ser definida como se segue. Seja O um ponto fixo e C uma dada curva. Sobre a reta OA de O a um ponto A de C, continue até um ponto P, tal que AP seja uma constante positiva b. Então o lugar geométrico descrito por P chama-se *conchóide de* C *com pólo* O *e constante* b. Se C é uma reta e O é um ponto qualquer fora de C, temos a conchóide de Nicomedes (Problema 15 da Seção 16.2) como caso particular. Mostre que a conchóide de uma circunferência $r = a \cos\theta$ com pólo O na origem e constante b é a limaçon $r = a\cos\theta + b$. Assim as conchóides englobam limaçons –e portanto cardióides – como casos particulares *.

Seção 16.3

7. Verifique a validade do seguinte procedimento para quadrar um círculo de raio a, usando a quadratriz definida no Problema 21 da Seção 16.3:
   (a) Pela parte (d) do problema mencionado,

$$\frac{OG}{OC}=\frac{OC}{ADC}.$$

Logo, um segmento cujo comprimento é $\frac{1}{4}$ do comprimento de nossa circunferência pode ser construído como a terceira proporcional aos segmentos OG e OC. (Numa equação da forma $c/d = d/x$, x chama-se *terceira proporcional* dos segmentos dados de comprimentos c e d; x pode ser construído com régua e compasso, como indicado na Fig. 16.41.)

* Consta que a limaçon foi batizada assim pelo matemático francês Roberval, que a utilizou como exemplo num de seus escritos na década de 1630, denominando-a "limaçon do senhor Pascal", referindo-se a Étienne Pascal, pai do famoso Blaise Pascal. Étienne era um amigo e correspondente de Mersenne, o que facilitou a entrada de seu filho com idade prematura nos círculos intelectuais da França.

(b) Pela parte (a), podemos construir um segmento cujo comprimento b seja $\frac{1}{2}$ do comprimento da circunferência, tendo ab como a área do círculo. O lado s de um quadrado cuja área é ab pode agora ser construído como média proporcional de a e b. (Numa equação da forma $a/s = s/b$, s chama-se *média proporcional* de a e b e pode ser construído com régua e compasso, como indicado na Fig. 16.42.)

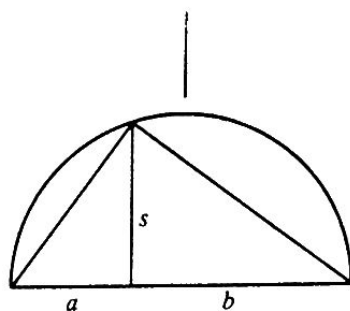



Figura 16.42

8. Verifique a validade do seguinte procedimento para quadrar um círculo de raio a usando a espiral de Arquimedes:

(a) trace a circunferência com centro O e raio a, e superponha a espiral $r = a\,\theta$ com constante de proporcionalidade igual ao raio desse círculo (Fig. 16.43);

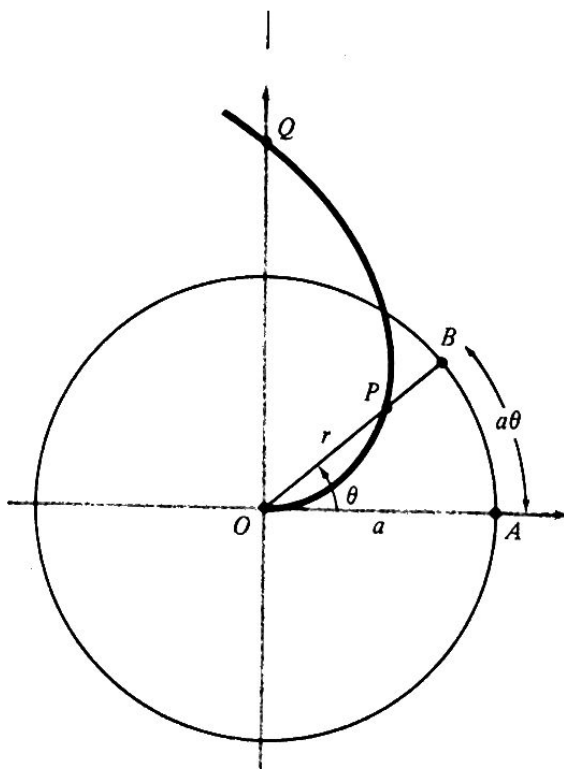



Figura 16.43

(b) como OP e o arco AB têm ambos comprimentos $a\,\theta$ e são, portanto, iguais, segue-se que o raio OQ para $\theta = \pi/2$ é um segmento cujo comprimento é $\frac{1}{4}$ do comprimento de nossa circunferência;

(c) a quadratura do círculo está completa exatamente como na parte (b) do Problema 7.

Seção 16.4

9. Para a espiral hiperbólica $r\theta = a$ $(\theta > 0)$, mostre que $\psi = 135°$ quando $\theta = 1$ radiano e também que $\psi \to 90°$ quando a espiral se enrola em torno da origem no sentido anti-horário. Esboce a curva e mostre o ângulo ψ para a direção $\theta = 1$ radiano.

10. Se um ponto se move ao longo de uma curva polar $r = f(\theta)$ com velocidade constante e está também se movendo para fora da origem com velocidade constante, mostre que a curva deve ser a espiral exponencial $r = a\,e^{b\theta}$.

11. Mostre que o comprimento do arco de uma folha de cada uma das seguintes rosas é igual ao comprimento do arco total da elipse correspondente (mas não tente calcular as integrais envolvidas, pois elas não podem ser calculadas:

(a) $r = 2\,\mathrm{sen}\,2\theta$, $x^2 + 4y^2 = 1$;
(b) $r = 6\cos 3\theta$, $x^2 + 9y^2 = 9$.

12. As distâncias r_1 e r_2 dos focos a qualquer ponto de uma elipse satisfazem a equação

$$r_1 + r_2 = \text{constante}.$$

Derivando ambos os membros dessa equação com relação ao comprimento de arco s e interpretando o resultado em termos de diferenciais, mostre que a tangente em qualquer ponto da elipse forma ângulos iguais com as retas que a ligam aos focos.

13. Estabeleça a propriedade da reflexão de parábolas fazendo uma adaptação do argumento usado no Problema 12.

14. Considere a parte da lemniscata $r^2 = 2a^2\cos 2\,\theta$ que está no primeiro quadrante e mostre que em qualquer ponto desta curva o ângulo entre a direção radial e a normal para fora é $2\,\theta$.

15. Calcule o ângulo em que as circunferências $r = a$ e $r = 2\,a\cos\theta$ se interceptam.

16. Mostre que o comprimento de um arco da espiral exponencial $r = a\,e^{b\theta}$ é proporcional à diferença dos raios em suas extremidades.

17. Calcule o comprimento da espiral $r = a\,\theta^2$ de $\theta = 0$ a $\theta = 2\pi$. Esboce a curva.

18. Calcule o comprimento da curva $r = a \operatorname{sen}^3 \frac{1}{3}\theta$ de $\theta = 0$ a $\theta = \frac{3\pi}{2}$. Qual o comprimento total dessa curva?

Seção 16.5

19. Suponha que uma curva polar $r = r(\theta)$, $\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$, tem tambem representação cartesiana $y = y(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$ (Fig. 16.44). (É conveniente aqui denotar a função e a variável dependente pela mesma letra.)

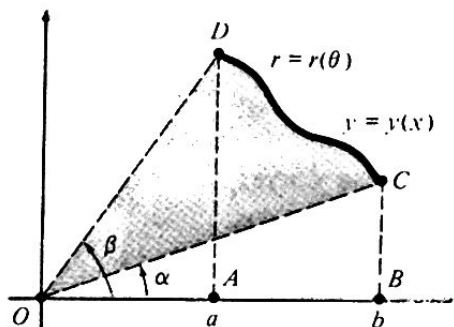



Figura 16.44

Do ponto de vista de coordenadas cartesianas, a área da região OCD é

$$\begin{aligned}
A_{OCD} &= A_{OAD} + A_{ABCD} - A_{OBC} \\
&= \tfrac{1}{2} r^2(\beta) \operatorname{sen}\beta \cos\beta + \int_a^b y\,dx - \tfrac{1}{2} r^2(\alpha) \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha \\
&= \tfrac{1}{4}\Big[r^2(\theta) \operatorname{sen} 2\theta \Big]_\alpha^\beta + \int_\beta^\alpha r(\theta) \operatorname{sen}\theta [r'(\theta)\cos\theta - r(\theta)\operatorname{sen}\theta]\, d\theta.
\end{aligned}$$

Integrando por partes no momento certo, mostre que essa fórmula reduz-se a

$$A_{OCD} = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2} r^2\, d\theta.$$

20. Calcule a área comum ao interior da circunferência $r = a$ e ao exterior da cardióide $r = a(1 - \cos\theta)$.

21. Calcule a área comum ao exterior da circunferência $r = 4\cos\theta$ e ao interior da limaçon $r = 1 + 2\cos\theta$.

22. Calcule a área comum ao exterior da circunferência $r = a$ e ao interior da circunferência $r = 2a\cos\theta$.

23. Mostre que a área no interior da primeira volta da espiral exponencial $r = a\,e^{b\theta}$ é $(r_2^2 - r_1^2)/4b$, onde r_1 é o raio inicial e r_2 é o raio terminal.

24. Calcule a área no interior de um laço da curva $r^2 = a^2 \operatorname{sen}\theta$.

25. Calcule a área total comum ao exterior da circunferência $r = a$ e ao interior da lemniscata $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$.

CAPÍTULO

17

EQUAÇÕES PARAMÉTRICAS. VETORES DO PLANO

17.1 EQUAÇÕES PARAMÉTRICAS DE CURVAS

Quando consideramos uma curva como trajetória de um ponto móvel é, na maior parte das vezes, mais conveniente estudar a curva utilizando duas equações simples, uma para x e outra para y em termos de uma terceira variável independente t,

$$x = f(t) \qquad \text{e} \qquad y = g(t), \tag{1}$$

do que utilizando uma única equação mais complicada da forma

$$F(x, y) = 0. \tag{2}$$

Em problemas físicos, consideramos um ponto móvel, e t é encarado como sendo o tempo medido a partir do instante em que o movimento se iniciou. O ponto P, cujas coordenadas são x e y, traça então a curva quando t varia em algum intervalo definido, digamos $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$. Temos assim não só uma descrição da trajetória onde o ponto se move mas também informações sobre o sentido de seu movimento e sobre sua localização na trajetória para vários valores de t (Fig. 17.1).

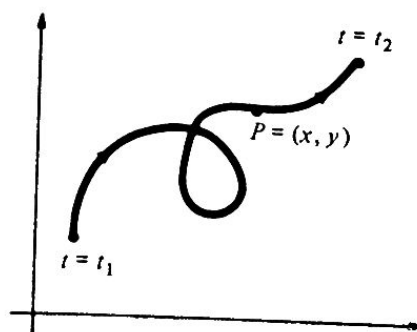



Figura 17.1

A terceira variável t em termos da qual x e y são expressas chama-se *parâmetro* (do grego *para*, que significa junto, e *meter*, que significa medida), e as equações (1) chamam-se equações paramétricas da curva. Se desejarmos a equação cartesiana da curva na forma (2), devemos eliminar o parâmetro das equações (1).

Exemplo 1 Esboce a curva $x = t^2, y = t^3$ e determine sua equação cartesiana.

Solução Podemos assinalar alguns pontos calculando x e y para diversos valores de t, como na tabela da Fig. 17.2.

t	x	y
0	0	0
1	1	1
2	4	8
−1	1	−1
−2	4	−8

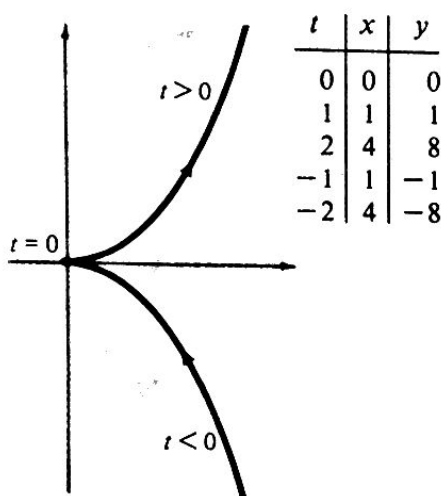



Figura 17.2

Alguns cálculos são convenientes para termos alguma coisa concreta com que começar. Entretanto, é mais proveitoso estudar a maneira pela qual x e y variam quando t varia em vez de simplesmente assinalar pontos. Aqui nós vemos que quando t cresce de 0 a ∞, ambos x e y começam em 0 e crescem, com valores positivos, mas y cresce mais depressa que x. Isto significa que para t grandes o ponto $P = (x, y)$ move-se afastando-se do eixo x mais depressa que do eixo y. Para t negativos, x é ainda positivo mas y é negativo, logo essa parte da curva é uma reflexão em torno do eixo x da parte superior que acabamos de descrever. A forma geral da curva pode ser descoberta a partir do comportamento do coeficiente angular da tangente dy/dx, que pode ser facilmente calculado como função de t dividindo $dy = 3\,t^2 dt$ por $dx = 2\,t dt$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3t^2\,dt}{2t\,dt} = \frac{3}{2}t \begin{cases} \to 0 & \text{quando } t \to 0, \\ \to \infty & \text{quando } t \to \infty, \\ \to -\infty & \text{quando } t \to -\infty. \end{cases}$$

Finalmente, notamos pelas equações paramétricas que o quadrado de y é igual ao cubo de x, logo

$$y^2 = x^3 \qquad \text{ou} \qquad y = x^{3/2}$$

é a equação cartesiana da curva.

Como observamos anteriormente, o uso de equações paramétricas é muito natural se considerarmos a curva como trajetória de um ponto móvel cuja posição é determinada em função do tempo t medido a partir de algum instante inicial conveniente.

Exemplo 2 Suponha que um projétil seja disparado da origem no instante $t = 0$ com uma velocidade inicial de grandeza v_0 *m/s* e sentido dado pelo ângulo de elevação α (Fig. 17.3); suponha que a única força que atua sobre o projétil é a força da gravidade. Discuta o movimento.

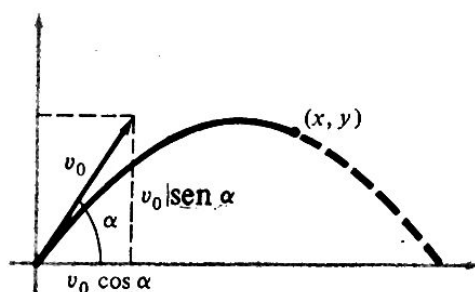



Figura 17.3

Solução consideremos separadamente as componentes x e y da aceleração. Como a força da gravidade age para baixo, temos

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = 0 \qquad \text{e} \qquad a_y = \frac{dv_y}{dt} = -g,$$

onde $g = 9{,}8 \text{ m/s}^2$ é a aceleração devida à gravidade. Portanto,

$$v_x = c_1 \qquad \text{e} \qquad v_y = -gt + c_2$$

para certas constantes c_1 e c_2. Mas quando $t = 0$, temos $v_x = v_0 \cos \alpha$ e $v_y = v_0 \operatorname{sen} \alpha$ e, conseqüentemente,

$$v_x = \frac{dx}{dt} = v_0 \cos \alpha \qquad \text{e} \qquad v_y = \frac{dy}{dt} = -gt + v_0 \operatorname{sen} \alpha.$$

Uma outra integração acarreta

$$x = (v_0 \cos \alpha)t + c_3 \qquad \text{e} \qquad y = -\tfrac{1}{2}gt^2 + (v_0 \operatorname{sen} \alpha)t + c_4.$$

Mas $x = y = 0$ quando $t = 0$, logo $c_3 = c_4 = 0$ e

$$x = (v_0 \cos \alpha)t, \qquad y = -\tfrac{1}{2}gt^2 + (v_0 \operatorname{sen} \alpha)t. \tag{3}$$

Estas são equações paramétricas da trajetória do projétil. Podemos utilizar as equações (3) para mostrar que o projétil segue uma trajetória parabólica: eliminamos o parâmetro resolvendo a primeira equação para t e substituindo-o na segunda:

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}.$$

$$y = -\frac{1}{2} g \cdot \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha} + (v_0 \operatorname{sen} \alpha) \cdot \frac{x}{v_0 \cos \alpha}$$

$$= -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + (\operatorname{tg} \alpha) x.$$

o fato de y ser uma função quadrática de x revela que o ponto (x, y) move-se sobre uma parábola. Outras propriedades desse movimento são desenvolvidas no Problema 13.

É natural utilizar o tempo t como parâmetro em qualquer problema de movimento como o discutido no Exemplo 2. Entretanto, em problemas que são mais ligados à Geometria do que à Física, é plausível que o parâmetro mais conveniente tenha algum significado geométrico. No Exemplo 1, é perfeitamente possível pensar no parâmetro t como uma variável pura, sem qualquer conotação especial. Por outro lado, nesse exemplo temos $y/x = t^3/t^2 = t$; logo poderíamos encarar t como o coeficiente angular da reta radial da origem a um ponto móvel sobre a curva. Essa visão certamente dá um brilho adicional a nossa concepção da maneira como a curva é traçada quando o parâmetro varia. Não é necessário declarar que não existe nada de sagrado com relação à letra t e estamos completamente livres para utilizar qualquer letra que desejarmos para denotar o parâmetro.

Exemplo 3 Considere a circunferência com raio a e centro na origem (Fig. 17.4).

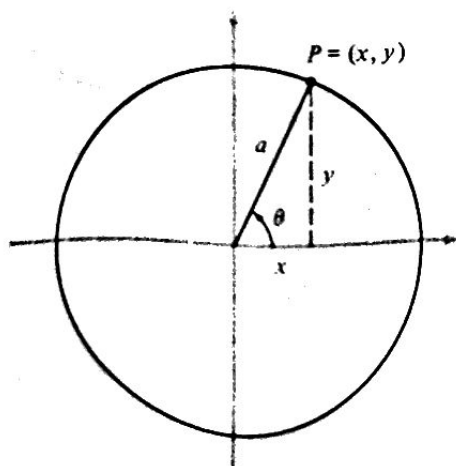



Figura 17.4

É fácil ver que

$$x = a\cos\theta, \qquad y = a\,\text{sen}\,\theta \tag{4}$$

são equações paramétricas dessa circunferência; θ é o ângulo central indicado. Quando θ varia de 0 a 2π, o ponto $P = (x, y)$ parte de $(a, 0)$ e completa uma volta pela circunferência no sentido anti-horário. Se não conhecêssemos a equação cartesiana dessa circunferência, a obteríamos da identidade $\cos^2\theta + \text{sen}^2\,\theta = 1$, da qual obtemos

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \qquad \text{ou} \qquad x^2 + y^2 = a^2. \tag{5}$$

Mas os estudantes devem observar que essa equação transmite uma visão estática; ao passarmos de (4) a (5) perdemos a idéia da circunferência como uma curva percorrida por um ponto móvel.

Exemplo 4 A elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

mostrada na Fig. 17.5 pode ser parametrizada fazendo-se as seguintes considerações:

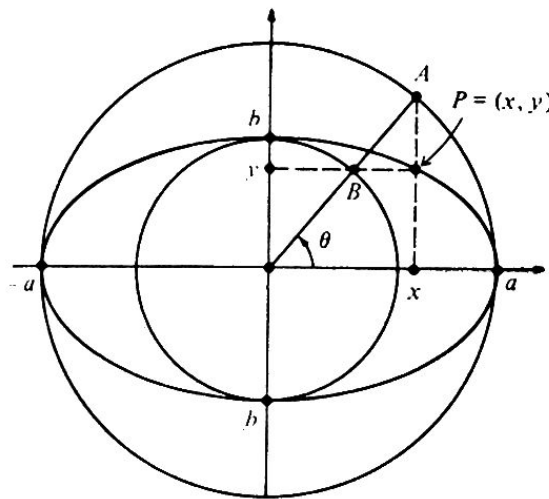



Figura 17.5

Como

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1,$$

existe um ângulo θ tal que $\cos\theta = x/a$ e $\operatorname{sen}\theta = y/b$; logo

$$x = a\cos\theta, \qquad y = b\operatorname{sen}\theta.$$

Quando θ varia de 0 a 2π, o ponto $P = (x, y)$ parte de $(a, 0)$ e completa uma volta sobre a elipse no sentido anti-horário. Observe pela figura que θ não é o ângulo central do arco de elipse de a ao ponto $P(x, y)$. θ é o ângulo central subentendido pelos arcos determinados pelo eixo polar e pelos pontos A e B sobre as duas circunferências, uma circunscrita à elipse e a outra inscrita na elipse. P é a interseção da reta vertical por A com a reta horizontal por B.

Exemplo 5 A parábola $x^2 = 4py$ (Fig. 17.6) pode ser parametrizada de muitas maneiras. Um método é utilizar o coeficiente angular da tangente em (x, y) como parâmetro,

$$t = \frac{dy}{dx}.$$

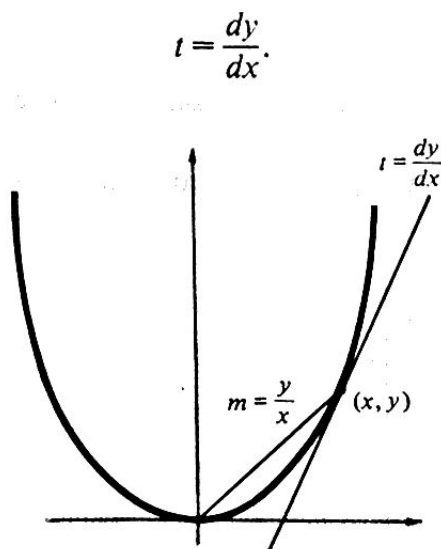



Figura 17.6

Como

$$2x = 4p\frac{dy}{dx} \qquad \text{ou} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{x}{2p},$$

as equações paramétricas nesse caso são

$$x = 2pt, \qquad y = pt^2.$$

Um outro método é utilizar como parâmetro o número

$$m = \frac{y}{x},$$

que é o coeficiente angular da reta radial a (x, y). Nesse caso teremos

$$y = mx \quad \text{e} \quad x^2 = 4py = 4pmx,$$

logo

$$x = 4pm, \qquad y = 4pm^2$$

são as equações paramétricas. Em cada caso a parábola completa é traçada quando o parâmetro cresce de $-\infty$ a ∞.

Nosso exemplo seguinte ilustra a situação em que uma curva paramétrica é somente uma parte da correspondente curva em coordenada retangular.

Exemplo 6 Esboce a curva $x = \cos^2 (\pi/2)t$, $y = \text{sen}^2 (\pi/2)t$ e determine sua equação cartesiana.

Solução Como $\cos^2 (\pi/2)t + \text{sen}^2 (\pi/2)t = 1$, o ponto $P = (x,y)$ move-se na reta $x + y = 1$ (Fig.17.7).

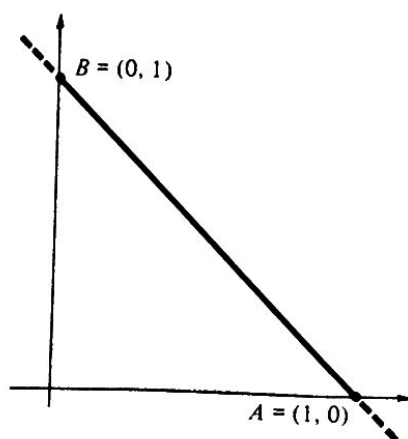



Figura 17.7

Mas nem x nem y podem ser negativos, logo o ponto fica confinado àquela parte da reta que está no primeiro quadrante. É fácil ver que o ponto está em $A = (1, 0)$ quando $t = 0$; se move para $B = (0, 1)$ quando t cresce de 0 a 1; se move de volta a A quando t cresce de 1 a 2 e assim por diante.

Exemplo 7 No Exemplo 6 discutimos uma curva paramétrica consistindo em apenas parte de uma reta. Mostramos agora que as equações paramétricas

$$x = t - 1, \qquad y = 2t + 3 \tag{6}$$

representam *toda* a reta. Eliminando t dessas equações, isto é, multiplicando a primeira por 2 e subtraindo a segunda, obtemos

$$2x - y = -5. \tag{7}$$

Assim, todos os pontos (x, y) satisfazendo (6) satisfazem também (7), que é a equação de uma reta. Reciprocamente, dado um ponto (x, y) satisfazendo (7), seja $t = 1 + x$ [obtemos isto resolvendo a primeira equação em (6) para t]. Então

$$x = t - 1,$$

e de (7) temos

$$y = 2x + 5 = 2(t - 1) + 5 = 2t + 3,$$

logo o ponto (x, y) está na curva paramétrica (6), como desejávamos mostrar

---

As maneiras anteriores de representar curvas por coordenadas cartesianas e coordenadas polares são fáceis de se ajustar a nosso esquema de representação paramétrica. Assim, se tivermos uma curva $y = f(x)$, poderemos escrever

$$y = f(x) \qquad \text{e} \qquad x = x,$$

ou seja, o próprio x é utilizado como o parâmetro. Uma curva dada em coordenadas polares pela equação polar $r = F(\theta)$ pode também ser encarada como uma curva paramétrica com parâmetro θ. Para tanto utilizamos as equações de transformação $x = r \cos\theta$ e $y = r \operatorname{sen}\theta$ e obtemos

$$x = F(\theta)\cos\theta, \qquad y = F(\theta)\operatorname{sen}\theta.$$

Por exemplo, a espiral de Arquimedes $r = a\,\theta$ torna-se

$$x = a\theta\cos\theta, \qquad y = a\theta\operatorname{sen}\theta;$$

e a cardióide $r = a\,(1 + \cos\theta)$ pode ser escrita

$$x = a(\cos\theta + \cos^2\theta), \qquad y = a(\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}\theta\cos\theta).$$

Problemas

1. Em cada caso, esboce a curva representada pelas equações paramétricas dadas, descreva o modo como o ponto (x, y) se move quanto t varia de valores negativos grandes a valores positivos grandes e determine a equação cartesiana:

   (a) $x = 1 + t, y = 1 - t$;
   (b) $x = -1 + 2t, y = 2 + 4t$.

2. Sendo x e y funções lineares de t,

   $x = x_0 + at, \qquad y = y_0 + bt,$

   mostre que o gráfico é sempre uma reta a menos que $a = 0$ e $b = 0$ simultaneamente. Pode qualquer reta ser representada dessa maneira?

3. Esboce o gráfico de $x = 1 - t^2$, $y = 2 + t^2$. Descreva o modo como o ponto (x, y) se move quando t varia de valores negativos grandes a valores positivos grandes e determine a equação cartesiana da curva.

   Para cada um dos seguintes pares de equações paramétricas (Problemas 4 a 9), esboce a curva e determine sua equação cartesiana:

4 $x = 3 \cos t, y = 2 \operatorname{sen} t$.
5 $x = 1 + t^2, y = 3 - t$.
6 $x = \operatorname{sen} t, y = -3 + 2 \cos t$.
7 $x = \sec t, y = \operatorname{tg} t$.
8 $x = t^3, y = 1 - t^2$.
9 $x = \operatorname{sen} t, y = \cos 2t$.

10. Esboce o gráfico de

$$x = t + \frac{1}{t}, \qquad y = t - \frac{1}{t}$$

e determine sua equação cartesiana. Sugestão: eleve ao quadrado e subtraia.

11. São as equações paramétricas

$$x = t + \frac{1}{t}, \qquad y = t - \frac{1}{t}$$

e

$$x = e^t + e^{-t}, \qquad y = e^t - e^{-t}$$

idênticas? Explique.

12. Sabemos, pelo Exemplo 3, que a circunferência unitária $x^2 + y2 = 1$ (Fig. 17.8) pode ser parametrizada pelas equações

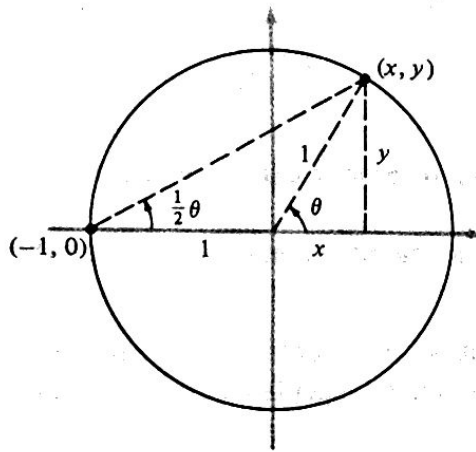



Figura 17.8

$$x = \cos\theta, \qquad y = \operatorname{sen}\theta, \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Uma parametrização muito diferente pode ser obtida, utilizando como parâmetro a tangente do ângulo $\frac{1}{2}\theta$; fazendo $t = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$ teremos

$$t = \frac{y}{1 + x}.$$

(a) Eliminando y primeiro dessa equação e de $x^2 + y^2 = 1$ mostre que as equações

$$x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \qquad y = \frac{2t}{1 + t^2}, \qquad -\infty < t < \infty,$$

parametrizam a circunferência inteira exceto o ponto $(-1, 0)$.

(b) Um ponto (x, y) do plano tal que ambos x e y são números racionais chama-se *ponto racional*. Mostre que para valores racionais de t as equações de (a) dão todos os pontos racionais sobre a circunferência unitária, exceto o ponto $(-1, 0)$*.

13. Considere o movimento do projétil descrito no Exemplo 2.

(a) Mostre que a altura máxima que o projétil atinge é

$$y_{max} = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}{2g}.$$

(b) Mostre que o alcance R do projétil, isto é, a distância da origem ao ponto em que o projétil atinge o solo em sua descida, é dada pela fórmula

$$R = \frac{v_0^2}{g} \operatorname{sen} 2\alpha.$$

(c) Qual ângulo de elevação α produz o alcance máximo?

(d) Mostre que, dobrando a velocidade inicial, a altura máxima e o alcance quadruplicam.

14. A curva de Agnesi é uma curva em forma de sino que pode ser definida como se segue: considere o círculo de raio a que é tangente ao eixo x na origem (Fig. 17.9).

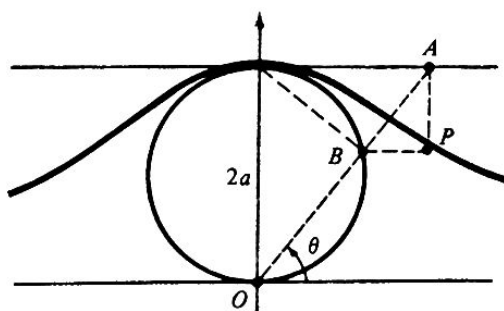



Figura 17.9 Curva de Agnesi.

* Em geral, é muito difícil encontrar pontos racionais sobre curvas e é notável que sejamos capazes de encontrá-los para o caso da circunferência unitária. Por exemplo, foi afirmado que se n é um inteiro qualquer > 2, os únicos pontos racionais sobre a curva $x^n + y^n = 1$ são aqueles para os quais $x = 0$ ou $y = 0$. Essa afirmação é o *último teorema de Fermat*. Foi provado para muitos valores particulares de n nos últimos 300 anos, mas em sua generalidade total permanece até hoje um dos problemas em aberto mais famosos (e intratáveis) da Matemática.

A reta variável OA pela origem intercepta a reta $y = 2a$ no ponto A e a circunferência no ponto B. O ponto P é a interseção da reta vertical por A e a reta horizontal por B, e a curva de Agnesi* é o lugar geométrico de P quando OA varia. Determine as equações paramétricas dessa curva utilizando como parâmetros o ângulo θ formado a partir do semi-eixo positivo dos x à reta OA. Determine também sua equação cartesiana.

15. A *involuta* de uma circunferência é a curva traçada pelo ponto da extremidade de um fio quando o fio é mantido tenso e desenrolado de um carretel fixo (Fig. 17.10).

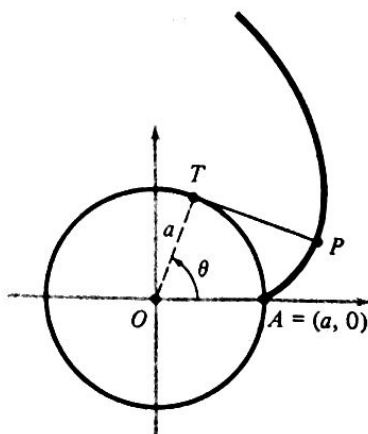



Figura 17.10 A involuta de uma circunferência

Se o centro do carretel está colocado na origem e seu raio é a, e se o fio começa a desenrolar no ponto $A = (a, 0)$, determine equações paramétricas da involuta utilizando o ângulo AOT, mostrado na figura como o parâmetro θ.

16. O *folium de Descartes*, mostrado na Fig. 17.11, é o gráfico da equação $x^3 + y^3 = 3axy$.**.

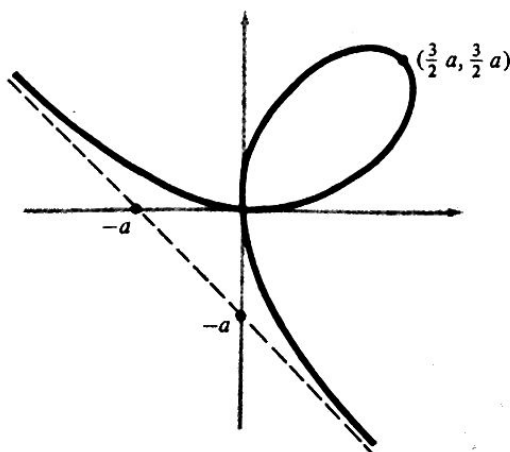



Figura 17.11 O *folium* de Descartes.

---

* Essa curva é chamada de Agnesi, em homenagem à matemática italiana Maria Agnesi (1718-1799), que a citou em seu livro de Cálculo publicado em 1748.

** A palavra *folium* significa folha em Latim. Essa curva foi originalmente utilizada por Descartes num desafio a Fermat: o problema era determinar a equação da reta tangente num ponto arbitrário. Fermat teve sucesso imediato, para espanto de Descartes.

(a) Introduza o parâmetro $t = y/x$ e determine equações paramétricas da curva.

(b) Utilize as equações encontradas em (a) para mostrar que a reta $x + y + a = 0$ é uma assíntota, mostrando que $x + y \to -a$ quando $t \to -1$.

(c) O *folium* é claramente simétrico em relação à reta $y = x$, pois a troca de x por y não altera a equação. Utilize esse fato juntamente com o significado geométrico de t e os resultados de (a) e (b), para verificar, tanto quanto possível, a natureza geral da curva como sugerido pela figura. Em particular, decida como as várias partes da curva são traçadas quando t varia em diversos domínios de valores.

17.2 (OPCIONAL) CICLÓIDE E OUTRAS CURVAS SEMELHANTES

A *ciclóide* é a curva traçada por um ponto da circunferência quando o círculo rola sobre uma reta (Fig. 17.12).

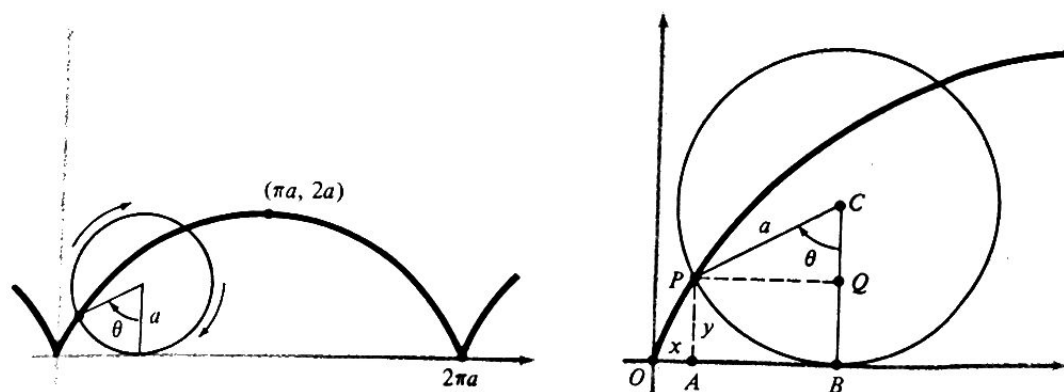



Figura 17.12 A ciclóide.

Veremos que essa curva tem muitas propriedades geométricas e físicas notáveis.

O único modo conveniente de representar uma ciclóide é por meio de equações paramétricas. Supomos que o círculo rolante tem raio a e que ele rola sobre o eixo x, começando de uma posição em que o centro do círculo está no semi-eixo positivo dos y. A curva é o lugar geométrico do ponto P da circunferência, localizado na origem O quando o centro C está no eixo y. O ângulo θ da figura é o ângulo varrido pelo raio CP quando o círculo rola para uma nova posição. Se x e y são as coordenadas de P, então o giro do círculo implica que $OB =$ arco $BP = a\theta$, logo $x = OB - AB = OB - PQ = a\theta - a \operatorname{sen} \theta = a(\theta - \operatorname{sen} \theta)$. Também, $y = BC - QC = a - a\cos\theta = a(1 - \cos\theta)$. Portanto a ciclóide tem a representação paramétrica.

$$x = a(\theta - \operatorname{sen} \theta), \qquad y = a(1 - \cos \theta).$$

É claro, pela Fig. 17.12, que y é uma função de x, mas é também claro pelas equações (1) que não é possível encontrar uma fórmula simples para essa função. A ciclóide é uma das muitas curvas cujas equações paramétricas são muito mais simples e mais fáceis de se trabalhar do que a equação cartesiana.

Pelas equações (1), temos

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{a \operatorname{sen} \theta \, d\theta}{a(1 - \cos \theta) \, d\theta} = \frac{\operatorname{sen} \theta}{1 - \cos \theta}$$

$$= \frac{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}\theta \cos \frac{1}{2}\theta}{2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}\theta} = \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}\theta. \tag{2}$$

Observamos que a derivada y' não está definida para $\theta = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi$ etc. Esses valores de θ correspondem aos pontos em que a ciclóide toca o eixo x; esses pontos chamam-se *cúspides*. A tangente à ciclóide é vertical nas cúspides.

Nos exemplos seguintes estabelecemos as principais propriedades geométricas da ciclóide.

Exemplo 1 Mostre que a área sob um arco da ciclóide é três vezes a área do círculo rolante.

Solução O arco é traçado quando o círculo perfaz uma revolução completa. A integral de área usual pode, portanto, ser escrita como se segue, utilizando-se o parâmetro θ como variável de integração:

$$A = \int_0^{2\pi a} y \, dx = \int_0^{2\pi} y \frac{dx}{d\theta} \, d\theta = \int_0^{2\pi} a(1 - \cos \theta) a(1 - \cos \theta) \, d\theta$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos \theta)^2 \, d\theta = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2 \cos \theta + \cos^2 \theta) \, d\theta$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} (1 + \cos^2 \theta) \, d\theta = a^2 \int_0^{2\pi} d\theta + a^2 \int_0^{2\pi} \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2\theta) \, d\theta = 3\pi a^2.$$

Exemplo 2 Mostre que o comprimento de um arco da ciclóide é quatro vezes o diâmetro do círculo rolante.

Solução Como $dx = a(1 - \cos \theta) \, d\theta$ e $dy = a \operatorname{sen} \theta \, d\theta$, o elemento de comprimento do arco é dado por

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = a^2[(1 - \cos \theta)^2 + \operatorname{sen}^2 \theta] \, d\theta^2$$

$$= 2a^2[1 - \cos \theta] \, d\theta^2 = 4a^2 \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2}\theta \, d\theta^2,$$

logo

$$ds = 2a \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}\theta \, d\theta.$$

O comprimento de arco é, portanto,

$$L = \int ds = \int_0^{2\pi} 2a \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}\theta \, d\theta = -4a \cos \tfrac{1}{2}\theta \Big]_0^{2\pi} = 8a.$$

Exemplo 3 Mostre que a tangente à ciclóide no ponto P na Fig. 17.12 passa pelo topo do círculo rolante.

Solução O ponto no topo do círculo tem coordenadas $(a\theta, 2a)$. O coeficiente angular da tangente em P é dado por (2). A equação da tangente em P é, portanto,

$$y - a(1 - \cos \theta) = \frac{\operatorname{sen} \theta}{1 - \cos \theta}(x - a\theta + a \operatorname{sen} \theta).$$

Substituímos $x = a\theta$ nessa equação e isolamos y, o que dá

$$y = a(1 - \cos \theta) + \frac{\operatorname{sen} \theta}{1 - \cos \theta} \cdot a \operatorname{sen} \theta = \frac{a(1 - \cos \theta)^2 + a \operatorname{sen}^2 \theta}{1 - \cos \theta} = 2a.$$

Isto mostra que a tangente em P passa, de fato, pelo ponto $(a\theta, 2a)$ no topo do círculo.

Parece ter sido Galileu o primeiro a notar a ciclóide e a investigar suas propriedades, no início de 1600. Ele, na verdade, não descobriu quaisquer dessas propriedades, mas deu à curva, seu nome e recomendou seu estudo a seus amigos, incluindo Mersenne, de Paris. Mersenne informou Descartes e outros e, em 1638, Descartes descobriu uma construção para a tangente que é equivalente à propriedade dada no Exemplo 3. Em 1644, o discípulo de Galileu, Torricelli (que inventou o barômetro) publicou sua descoberta da área sob o arco. O comprimento de um arco de ciclóide foi descoberto em 1658 pelo grande arquiteto inglês Christopher Wren*. Continuaremos a lista de homens famosos que trabalharam sobre a ciclóide, mas antes consideramos algumas outras curvas a ela relacionadas.

---

* Wren era um astrônomo e matemático – de fato, professor de Astronomia em Oxford – antes do grande incêndio de Londres em 1666 dar-lhe a oportunidade de construir a catedral de St. Paul, e dezenas de pequenas igrejas por toda a cidade.

Se um círculo rola na parte *interna* de uma circunferência fixa, o lugar geométrico de um ponto sobre o círculo rolante chama-se *hipociclóide*. Se um círculo rola na parte externa de uma circunferência fixa, o lugar geométrico de um ponto sobre a circunferência rolante chama-se *epiciclóide**:

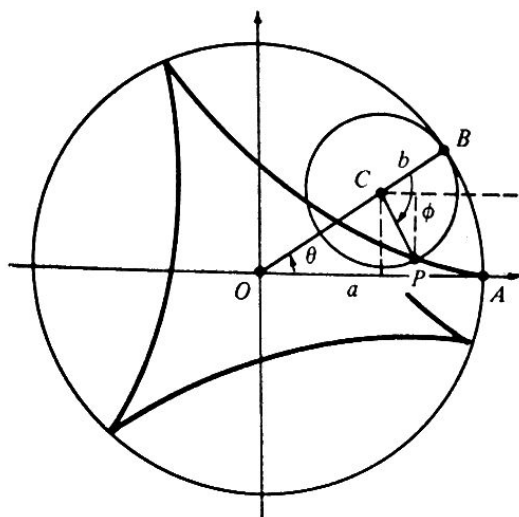



Figura 17.13 A hipociclóide.

Mostraremos como representar uma hipociclóide parametricamente. Suponha que a circunferência fixada tenha raio a e o círculo rolante tenha raio b, $b < a$. Suponha que a circunferência fixada tenha seu centro na origem (Fig. 17.13) e que o círculo rolante menor comece a rolar a partir de posição internamente tangente à circunferência fixada no ponto A no semi-eixo positivo dos x. Consideremos o ponto P sobre o círculo rolante que estava inicialmente em A. Com θ e ϕ como se mostra na figura, o giro do pequeno círculo implica que os arcos AB e BP sejam iguais: $a\theta = b\phi$. Podemos então ver que as coordenadas de P são

$$x = (a-b)\cos\theta + b\cos(\phi-\theta),$$
$$y = (a-b)\operatorname{sen}\theta - b\operatorname{sen}(\phi-\theta).$$

Mas $\phi - \theta = [(a-b)/b]\,\theta$, logo as equações paramétricas da hipociclóide são

$$x = (a-b)\cos\theta + b\cos\frac{a-b}{b}\theta,$$
$$y = (a-b)\operatorname{sen}\theta - b\operatorname{sen}\frac{a-b}{b}\theta. \tag{3}$$

* A distinção entre essas palavras é fácil de lembrar, pois o prefixo grego *hipo* significa sob ou abaixo, como em "hipodérmico" e *epi* significa sobre ou acima, como em "epicentro".

O comprimento de arco ao longo da circunferência fixada entre sucessivas cúspides da hipociclóide é $2\pi b$. Se $2\pi a$ é um múltiplo inteiro de $2\pi b$, isto é a/b é um inteiro n, então a hipociclóide tem n cúspides e o ponto P retorna a A depois que o pequeno círculo rola sua circunferência n vezes sobre a circunferência fixa. Deixamos aos estudantes decidir quando P retornará a A se a/b for um número racional mas não um inteiro como, por exemplo, $a/b = \frac{5}{2}$. Uma discussão do caso em que a/b é irracional está além do objetivo deste livro; basta dizer que quando o pequeno círculo rola indefinidamente, as cúspides da hipociclóide resultante são densamente distribuídas na circunferência fixa*.

As equações paramétricas de uma hipociclóide de quatro cúspides podem ser escritas de forma muito simples utilizando algumas identidades trigonométricas. Se $a = 4b$, as equações (3) tornam-se

$$x = 3b\cos\theta + b\cos 3\theta, \qquad y = 3b\,\text{sen}\,\theta - b\,\text{sen}\,3\theta.$$

Mas

$$\begin{aligned}\cos 3\theta &= \cos(2\theta + \theta) = \cos 2\theta\cos\theta - \text{sen}\,2\theta\,\text{sen}\,\theta\\ &= (2\cos^2\theta - 1)\cos\theta - 2\text{sen}^2\theta\cos\theta\\ &= [2\cos^2\theta - 1 - 2(1 - \cos^2\theta)]\cos\theta\\ &= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta,\end{aligned}$$

e um cálculo semelhante acarreta

$$\text{sen}\,3\theta = 3\,\text{sen}\,\theta - 4\,\text{sen}^3\theta. \tag{4}$$

Nossas equações paramétricas tornam-se, portanto,

$$x = 4b\cos^3\theta = a\cos^3\theta, \qquad y = 4b\,\text{sen}^3\theta = a\,\text{sen}^3\theta. \tag{5}$$

Dessas equações é fácil obter a correspondente equação cartesiana

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}.$$

Em virtude de sua aparência (Fig. 17.14) uma hipociclóide de quatro cúspides chama-se *astróide*.

---

* O leitor curioso encontrará informação adicional no Teorema 439 de G. H. Hardy e E. M. Wright, *Introduction to the Theory of Numbers* (Oxford, 1954); ou no Teorema 6.3 de I. Niven, *Irrational Numbers* (Wiley, 1956).

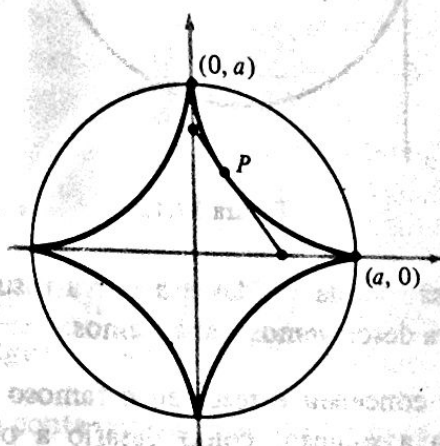



Figura 17.14 A astróide

Exemplo 4 Considere a tangente à astróide num ponto P no primeiro quadrante. Mostre que a parte dessa tangente que é cortada pelos eixos coordenados tem comprimento constante, independente da posição de P.

Solução Pelas equações (4), o coeficiente angular da tangente é

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{3a\text{sen}^2\,\theta\cos\theta\,d\theta}{-3a\cos^2\theta\,\text{sen}\,\theta\,d\theta} = -\,\text{tg}\,.\,\theta,$$

logo a equação da tangente é

$$y - a\text{sen}^3\,\theta = -\,\text{tg}\;\theta\,(x - a\cos^3\theta).$$

Determinamos o intercepto x pondo $y = 0$ e isolando x,

$$x = a\cos^3\theta + a\text{sen}^2\,\theta\cos\theta = a\cos\theta.$$

Analogamente, o intercepto y é $y = a$ sen θ. O comprimento da tangente cortada pelos eixos é, portanto,

$$\sqrt{a^2\cos^2\theta + a^2\text{sen}^2\,\theta} = a,$$

que é constante.

Retornamos à ciclóide discutida anteriormente e refletimos a curva e o eixo y com relação ao eixo x (Fig. 17.15).

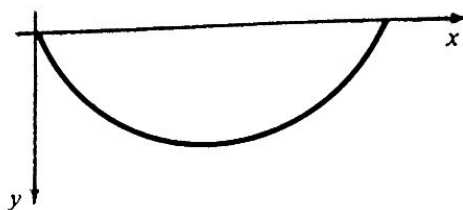



Figura 17.15

As equações paramétricas (1) são ainda válidas e a curva resultante tem diversas propriedades físicas interessantes que nós agora descrevemos e analisamos.

Em 1696, John Bernoulli concebeu e resolveu o famoso problema da *braquistócrona*. Ele publicou o problema (mas não a solução) como desafio a outros matemáticos da época. O problema era: dentre todas as curvas lisas de um plano vertical que une dois pontos dados P_0 e P_1 estando P_1 abaixo de P_0, mas não diretamente abaixo, determinar a curva particular sobre a qual uma partícula deslizará de P_0 a P_1 no tempo mais curto*. Podemos pensar na partícula como uma conta de massa m deslizando por um fio ideal sem atrito, com a força da gravidade mg como única força agindo sobre a conta.

Admitimos que os pontos P_0 e P_1 estão, respectivamente na origem e em (x_1, y_1) do primeiro quadrante (Fig. 17.16); o enunciado matemático do problema de Bernoulli é o seguinte:

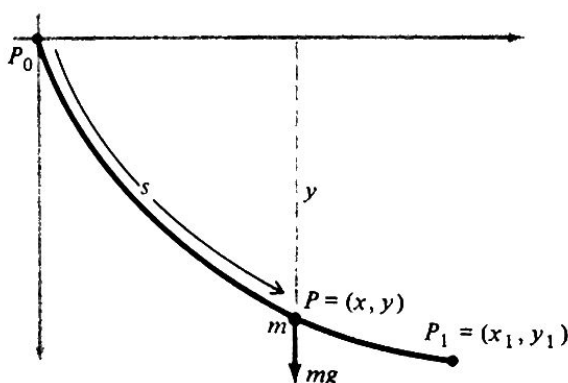



Figura 17.16

a conta é solta do repouso em P_0, logo sua velocidade inicial e sua energia cinética inicial são nulas. O trabalho realizado pela gravidade quando ela vai da origem a um ponto arbitrário $P = (x, y)$ é mgy. Essa quantia deve ser igual ao acréscimo da energia cinética da conta quando ela desliza pelo fio até esse ponto, logo

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = mgy,$$

* A palavra *braquistócrona* vem de duas palavras gregas que significam tempo mais curto.

e, portanto,

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{2gy}. \tag{6}$$

Essa expressão pode ser escrita como

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{2gy}} = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{\sqrt{2gy}} = \frac{\sqrt{1 + (dy/dx)^2}\,dx}{\sqrt{2gy}}. \tag{7}$$

O tempo total T_1 exigido para a conta deslizar pelo fio de P_0 a P_1 dependerá da forma do fio, especificada por sua equação $y = f(x)$, esse tempo é dado por

$$T_1 = \int dt = \int_0^{x_1} \sqrt{\frac{1 + (y')^2}{2gy}}\,dx. \tag{8}$$

O problema da braquistócrona é, então, o seguinte: determinar a curva particular $y = f(x)$ que passa por P_0 e P_1 e minimiza o valor da integral (8).

Como a reta que une P_0 a P_1 é certamente o caminho mais curto, poderíamos pensar que a ela corresponderia o tempo mínimo. Entretanto, uma consideração sobre as várias possibilidades nos fará mais céticos sobre essa conjectura. Poderia haver vantagem no caso de a conta começar mais intensamente o movimento, aumentando sua velocidade mais rapidamente no início, pois com um início mais rápido, é razoável supor que a conta alcance P_1 num tempo mais curto, embora percorra um caminho mais longo. E este é o caminho que corresponde ao menor tempo de percurso: a curva braquistócrona é um arco de ciclóide por P_0 e P_1 com cúspide na origem.

Leibniz e Newton, assim como John Bernoulli e seu irmão mais velho James, resolveram o problema. A solução de John, que é muito engenhosa mas bastante especializada por causa dos métodos utilizados, foi dada no Apêndice A.8 (Volume I). A ciclóide era bem conhecida de todos esses homens pelo conhecimento de um trabalho anterior do grande cientista holandês Huygens sobre relógios de pêndulo. Quando John descobriu que a ciclóide também era a solução de seu problema da braquistócrona, ficou surpreso e encantado. Ele escreveu: "Admiramos Huygens com justiça, porque foi ele o primeiro a descobrir que uma partícula pesada desliza até a parte mais baixa de uma ciclóide gastando um mesmo tempo, não importando de onde comece. Mas vocês [seus leitores] ficarão petrificados de surpresa com a afirmação de que essa ciclóide, a tautócrona de Huygens, é também a braquistócrona que estamos procurando*".

---

* Uma tradução inglesa dos escritos de Bernoulli sobre esse assunto pode ser encontrada nas pp. 644-655 de D. E. Smith, *A Source Book in Mathematics* (Macmillan, 1929). O estilo vívido, entusiástico e pessoal de Bernoulli contrasta fortemente com o estilo mortiço, cinzento e impessoal da maioria dos escritos em revistas científicas de hoje.

Huygens foi um profundo estudioso da teoria do pêndulo, sendo o inventor do relógio de pêndulo. Ele estava bem consciente da imperfeição teórica na concepção de tal relógio, em virtude do fato de que o período de oscilação do pêndulo não independia estritamente da amplitude*. Podemos expressar essa imperfeição de outra maneira: se uma conta é solta num fio circular sem atrito num plano vertical, o tempo que ela leva para deslizar até a parte mais baixa dependerá da altura do ponto de partida. Huygens queria saber o que aconteceria se o fio circular fosse substituído por um fio em forma de um arco de ciclóide invertido. Mas ele fez mais do que meramente querer saber, pois prosseguiu fazendo a notável descoberta já referida, de que no caso de um fio com essa forma, a conta deslizaria de qualquer ponto à parte mais baixa, gastando sempre o mesmo tempo, não importando o ponto onde fosse largada (Fig. 17.17).

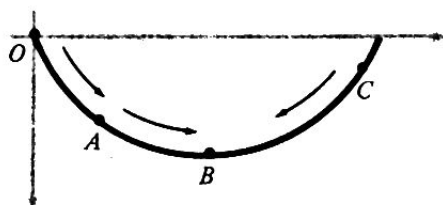



Figura 17.17 Contas largadas no fio cicloidal em *O, A, C*, alcançarão *B* depois de decorrido o mesmo intervalo de tempo.

Esta é a *propriedade tautócrona* ("Tempo igual") da ciclóide, e vamos prová-la utilizando as fórmulas dadas acima.

Escrevemos (8) na forma equivalente

$$T_1 = \int \sqrt{\frac{dx^2 + dy^2}{2gy}}$$

e então substituímos as equações (1). Obtemos

$$T_1 = \int_0^{\theta_1} \sqrt{\frac{2a^2(1 - \cos\theta)}{2ag(1 - \cos\theta)}}\, d\theta = \theta_1 \sqrt{\frac{a}{g}}$$

para o tempo necessário para a conta deslizar num fio cicloidal de P_0 a P_1. O tempo necessário para a conta alcançar o ponto mais baixo desse fio é o valor de T_1 quando $\theta_1 = \pi$, ou seja $\pi\sqrt{a/g}$. A propriedade tautócrona de Huygens corresponde à afirmação de que a conta atingirá o ponto mais baixo gastando o mesmo tempo que gastaria se iniciasse o movimento em qualquer ponto intermediário (x_0, y_0). Para provar isso, substituímos (6) por

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{2g(y - y_0)}.$$

* Veja a observação sobre o "erro circular" no Exemplo 3 da Seção 9.6 (Volume I).

O tempo total exigido para a conta deslizar até o ponto mais baixo é, portanto,

$$T = \int_{\theta_0}^{\pi} \sqrt{\frac{2a^2(1 - \cos\theta)}{2ag(\cos\theta_0 - \cos\theta)}}\, d\theta = \sqrt{\frac{a}{g}} \int_{\theta_0}^{\pi} \sqrt{\frac{1 - \cos\theta}{\cos\theta_0 - \cos\theta}}\, d\theta$$

$$= \sqrt{\frac{a}{g}} \int_{\theta_0}^{\pi} \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}\theta \, d\theta}{\sqrt{\cos^2 \frac{1}{2}\theta_0 - \cos^2 \frac{1}{2}\theta}}, \qquad (9)$$

onde, na última etapa, utilizamos as identidades trigonométricas $2 \operatorname{sen}^2 \theta = 1 - \cos 2\theta$ e $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta = 2\cos^2 \theta - 1$. Utilizando agora a substituição

$$u = \frac{\cos \frac{1}{2}\theta}{\cos \frac{1}{2}\theta_0}, \qquad du = -\frac{1}{2} \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}\theta \, d\theta}{\cos \frac{1}{2}\theta_0},$$

a integral (9) torna-se

$$T = -2\sqrt{\frac{a}{g}} \int_1^0 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = 2\sqrt{\frac{a}{g}} \operatorname{arc\,sen}^{-1} u \Big]_0^1 = \pi\sqrt{\frac{a}{g}}.$$

Isto mostra que T tem o mesmo valor anteriormente obtido e, portanto, é independente do ponto inicial.

Uma vez estabelecida por Huygens a propriedade tautócrona da ciclóide, um problema posterior surge por si mesmo. O que se poderia fazer para que o pêndulo de um relógio se mova ao longo de uma trajetória cicloidal em vez de circular? Huygens fez uma bela descoberta. Suspendendo-se do ponto P, na cúspide entre dois semi-arcos cicloidais invertidos, um pêndulo de haste flexível cujo comprimento seja igual ao comprimento de um dos semi-arcos (Fig. 17.18), a massa irá para cima enquanto balança percorrendo uma trajetória que é uma outra ciclóide*.

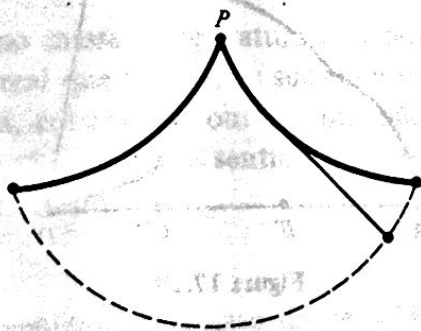



Figura 17.18 Um pêndulo flexível restrito por curvas cicloidais balança ao percorrer uma outra ciclóide.

* Uma prova dessa afirmação é dada no Apêndice A.13, mas, para compreender esse apêndice, devemos primeiro compreender as idéias expostas na Seção 17.5.

Problemas

1. Determine a equação cartesiana da ciclóide eliminando θ das equações paramétricas (1). Observe que é inútil tentar isolar y para obter uma função simples de x.

2. Mostre que, para a ciclóide (1), a segunda derivada é dada por $y'' = dy'/dx = -a/y^2$. Observe que esse fato implica que a ciclóide é côncava para baixo entre as cúspides (Fig. 17.12).

3. Utilize a equação da normal à ciclóide em P (Fig. 17.12) para mostrar que essa normal passa pelo ponto B que é a posição mais baixa do círculo rolante. Chegue a essa conclusão a partir do resultado do Exemplo 3, utilizando geometria elementar.

4. Suponha que a circunferência da Fig. 17.12 rola para a direita ao longo do eixo x numa velocidade constante com o centro C deslocando-se v_0 unidades por segundo. (a) Calcule as taxas de variação das coordenadas x e y do ponto P. (b) Qual a maior taxa de crescimento de x e onde está P quando esta é atingida? (c) Qual a maior taxa de crescimento de y e qual o valor de θ quando ocorre esta taxa?

5. Um polígono $ABCD$ rola desajeitadamente numa reta $A'D'$ (Fig. 17.19), o ponto A traça sucessivamente diversos arcos de círculos com centros B', C', D'. A tangente a qualquer desses arcos é evidentemente perpendicular à reta que une o ponto de tangência ao correspondente centro. Entretanto, no caso em que o círculo rolante que gera uma ciclóide é encarado como um polígono com um número infinito de lados, a tangente à ciclóide em qualquer ponto é a reta perpendicular à reta que une o ponto de tangência ao ponto inferior do círculo rolante. Este é o método de Descartes para determinar a tangente em qualquer ponto de uma ciclóide. Verifique que esta afirmação é correta.

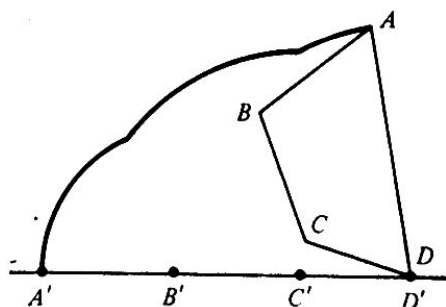



Figura 17.19

6. Calcule a área do interior do astróide (5).

7. Calcule o comprimento total do astróide (5).

8. Calcule a área da superfície gerada girando-se o astróide (5) ao redor do eixo x.

9. Mostre que a hipociclóide de duas cúspides, com $a = 2b$, é simplesmente o diâmetro da circunferência fixa que fica ao longo do eixo x. Nesse caso, supondo-se que o centro C do círculo rolante gira com velocidade angular constante ω, $d\theta/dt = \omega$, mostre que P move-se para frente e para trás sobre o eixo x, num movimento harmônico simples (Seção 9.6) de período $2\pi/\omega$ e velocidade máxima $a\,\omega$.

10. Se a astróide (4) é gerada pelo pequeno círculo que gira no sentido anti-horário com velocidade angular constante ω, determine a posição do ponto P no primeiro quadrante para a qual o crescimento de y é o mais rápido.

11. A hipociclóide de três cúspides, com $a = 3b$, chama-se *deltóide*. Esboce essa curva, determine suas equações paramétricas e seu comprimento total.

12. Determine equações paramétricas da epiciclóide gerada por um círculo de raio b, rolando sobre a circunferência de um círculo fixo de raio a. Utilize uma figura semelhante à Fig. 17.13, onde o círculo fixo tem seu centro na origem e o ponto P tem posição inicial $(a, 0)$.

13. Mostre que as equações do Problema 12 podem ser obtidas das equações (3) do texto, substituindo b por $-b$.

14. A epiciclóide de duas cúspides, com $a = 2b$, chama-se *nefróide* (significando "em forma de rins"). Esboce essa curva, determine suas equações paramétricas e calcule seu comprimento total.

17.3 ÁLGEBRA VETORIAL. VETORES UNITÁRIOS *i* E *j*

Uma grandeza física como massa, temperatura ou energia cinética é completamente determinada por um único número real que caracteriza sua extensão. São chamadas *grandezas escalares* ou simplesmente *escalares*. Há, entretanto, outras entidades chamadas *grandezas vetoriais* ou *vetores*, que precisam de dimensão, direção e sentido para serem caracterizadas. Como exemplos temos velocidade, força e deslocamento.

Exemplo 1 Consideremos resumidamente o caso da velocidade. Quando analisamos a situação em que um ponto move-se ao longo de uma reta, podemos especificar sua posição por meio de uma coordenada, que pode ser positiva ou negativa; a velocidade do ponto móvel é a derivada dessa coordenada em relação ao tempo, ou seja, é a taxa de variação da posição. O sentido é certamente importante em tais análises, mas nesse caso simples, unidimensional, todas as questões que envolvem sentido são fáceis de manipular, utilizando-se números positivos e negativos.

Entretanto, para caracterizar a velocidade de um ponto móvel ao longo de uma trajetória curva no plano, é essencial sabermos o valor absoluto da velocidade do ponto (a taxa em que ela percorre distância) e o sentido desse movimento. A combinação desses dois ingredientes é o *vetor velocidade* ou simplesmente a velocidade do ponto móvel. É natural representarmos essa grandeza (veja Fig. 17.20) por uma flecha ou segmento orientado **v** com origem no ponto cujo comprimento é o valor absoluto da velocidade em algum sistema de medidas e cujo sentido é o sentido de movimento

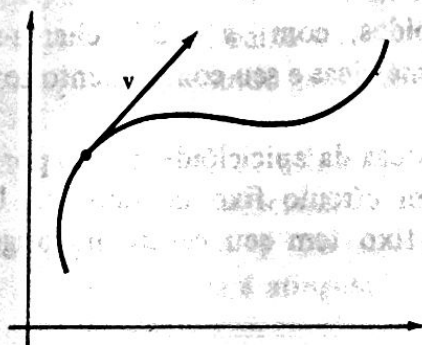



Figura 17.20

Exemplo 2 Uma força aplicada a um objeto é também uma grandeza vetorial, cuja dimensão é a intensidade da força e cujo sentido é o sentido em que a força atua. Por exemplo, a força gravitacional **F** exercida pela Terra sobre um satélite artificial (Fig. 17.21) é dirigida para o centro da Terra e sua grandeza é proporcional a $1/r^2$, onde r é a distância do satélite ao centro da Terra.

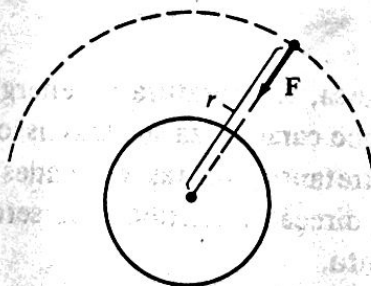



Figura 17.21

Do ponto de vista matemático, não dizemos simplesmente que um vetor é representado por um segmento de reta orientado; dizemos que um vetor é um segmento de reta orientado. Isto nos deixa livres para desenvolver a álgebra dos vetores independentemente de qualquer interpretação física particular.

Como já indicamos, os vetores são, com freqüência, denotados em negrito. No caso de trabalho manuscrito utilizam-se letras com uma flecha em cima. Assim, **v** e $\vec{v}$ denotam o mesmo vetor. Também, se um vetor se estende de um ponto P a um ponto Q, podemos colocar a ponta de flecha em Q e denotar o vetor por $\overrightarrow{PQ}$ (Fig. 17.22).

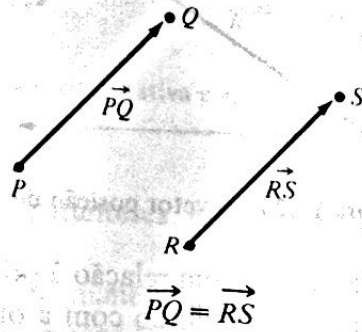



Figura 17.22

Chamamos então P de *ponto inicial* ou *origem* e Q de *ponto terminal* ou *extremidade* do vetor. O vetor $\overrightarrow{PQ}$ pode ser encarado como representando o deslocamento de um ponto ao longo do segmento de reta de P a Q, isto é, a trajetória percorrida por um ponto quando se move de P a Q. Tais vetores descrevem as posições relativas de pontos. O comprimento ou grandeza de um vetor $\overrightarrow{PQ}$ é denotado pelo símbolo $|\overrightarrow{PQ}|$; essa notação é utilizada porque o comprimento de um vetor é, de muitos modos, semelhante ao valor absoluto de um número real.

Dois vetores $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{RS}$ dizem-se *iguais* e escrevemos $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$ se eles têm o mesmo comprimento e direção (Fig. 17.22). Essa definição de igualdade permite-nos mover um vetor de uma posição a outra sem alterá-lo, contanto que seu comprimento e direção permaneçam inalterados. Assim, os vetores mostrados na Fig. 17.23 são todos iguais entre si; em outras palavras, eles são o mesmo vetor em posições diferentes.

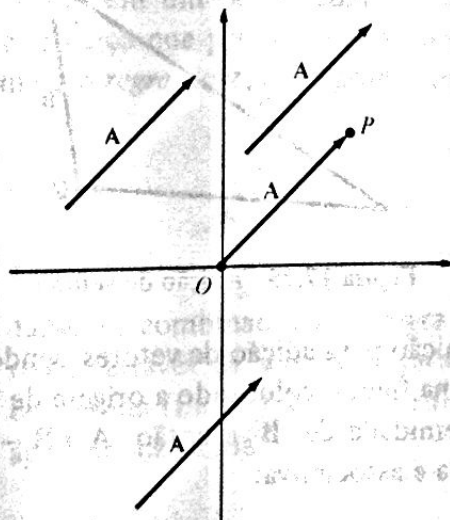



Figura 17.23 O mesmo vetor em posições diferentes.

vetor posição de um ponto P no plano coordenado é o vetor $\overrightarrow{OP}$, que vai da origem O ao ponto P (Fig. 17.24).

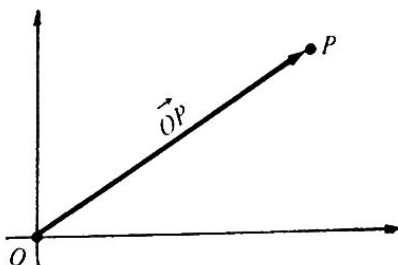



Figura 17.24 O vetor posição de P.

Tais vetores descrevem as posições de pontos com relação à origem. Como indicado na Fig. 17.23, qualquer vetor **A** pode ter sua origem coincidindo com a origem do sistema de coordenadas e desse modo tornar-se o vetor posição do ponto P que está em sua extremidade.

Abordaremos duas operações algébricas com vetores. A primeira operação é a de adição de dois vetores para se obter um outro vetor, e a segunda é a de multiplicação de um vetor por um número para se obter um outro vetor. Em qualquer discussão envolvendo vetores, é costume nos referirmos aos números como *escalares*, e essa segunda operação é usualmente chamada *multiplicação por escalar.*

Primeiro, a adição. Suponha que o vetor $\mathbf{A} = \overrightarrow{PQ}$ represente o deslocamento de um ponto ao longo do segmento de reta de P a Q. Como se mostra na Fig. 17.25, quando o deslocamento $A = \overrightarrow{PQ}$ é seguido do deslocamento $\mathbf{B} = \overrightarrow{QR}$ o resultado final é equivalente ao único deslocamento $\overrightarrow{PR}$. É portanto natural considerar $\overrightarrow{PR}$ como a soma de $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{QR}$ e escrever

$$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}.$$

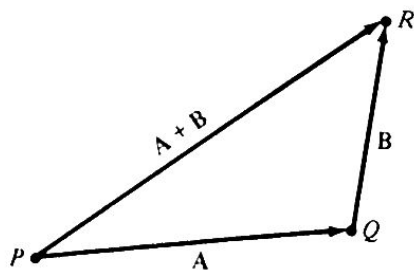



Figura 17.25 Adição de vetores.

Adotamos assim a seguinte definição para adição de vetores: sendo **A** e **B** dois vetores quaisquer, os adicionamos como mostrado na figura, colocando a origem de **B** na extremidade de **A**; o vetor que liga a origem de **A** à extremidade de **B** é então **A** + **B** – a *soma* de **A** e **B**. A Fig. 17.26 mostra que a adição é comutativa e associativa:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}.$$

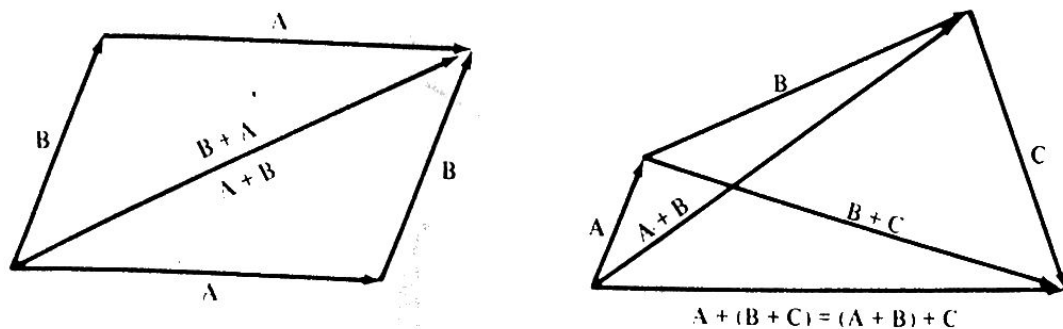



Figura 17.26 As leis comutativa e associativa da adição de vetores.

A lei associativa permite-nos omitir parênteses, escrevendo **A** + **B** + **C** no lugar de **A** + (**B** + **C**).

Essas idéias sugerem uma outra maneira equivalente de determinar a soma de dois vetores **A** e **B**: fazemos coincidirem suas origens (Fig. 17.27) e formamos o paralelogramo tendo **A** e **B** como lados adjacentes; **A** + **B** é o vetor que vai da origem comum ao vértice oposto.

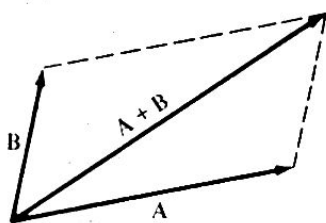



Figura 17.27

Isto mostra que nossa definição de adição é adequada para se trabalhar com forças em física; se **A** e **B** são duas forças agindo em um ponto comum, então sabe-se da experiência que **A** + **B** é a *força resultante*, isto é, a força que produz o mesmo efeito que as duas forças atuando em conjunto. Essa forma de soma é a *regra do paralelogramo* para a adição de forças e também para a adição de vetores.

Exemplo 3 As velocidades são também combinadas pela regra do paralelogramo. Por exemplo, um homem numa canoa deseja remar através de um rio para atingir o ponto da outra margem diretamente oposto a seu ponto de partida (Fig. 17.28). O rio flui a 3 km/h e ele pode remar a 6 km/h. Em que sentido deve ele apontar sua canoa?

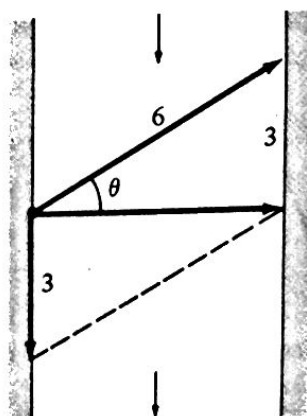



Figura 17.28

Solução Sua velocidade real é a soma vetorial da velocidade da água com sua velocidade relativa à água. Para que essa soma seja perpendicular à margem, ele deve apontar sua canoa, corrente acima, num ângulo θ tal que sen $\theta = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, logo $\theta = 30^\circ$.

Vejamos agora a multiplicação por escalar. Se somamos um vetor **A** a si mesmo, obtemos um vetor no mesmo sentido com o dobro de comprimento, e é natural a notação $\mathbf{A} + \mathbf{A} = 2\mathbf{A}$. Por uma extensão natural, se c é um número real qualquer, então $c\mathbf{A}$ é definido como o vetor que tem $|c|$ vezes o comprimento de **A** e o mesmo sentido de **A**, se c é positivo, e o sentido oposto, se c é negativo (Fig. 17.29).

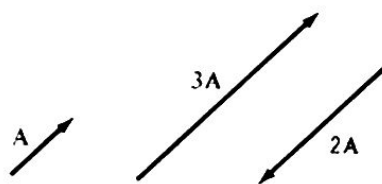



Figura 17.29 Multiplicação por escalar.

Um vetor de comprimento zero é denotado por **O** e chama-se *vetor nulo;* esse vetor não tem direção nem sentido. Evidentemente, $1 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}$ e $0 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{O}$. As propriedades

$$c(d\mathbf{A}) = (cd)\mathbf{A},$$

$$(c + d)\mathbf{A} = c\mathbf{A} + d\mathbf{A},$$

$$c(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = c\mathbf{A} + c\mathbf{B}$$

são válidas e fáceis de se deduzir, mas não iremos nos deter em sua discussão detalhada. Vale a pena notar, no entanto, que uma prova da última propriedade para o caso $c > 0$ está implícita na Fig. 17.30.

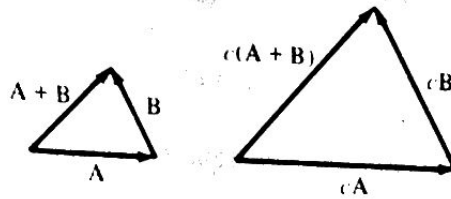



Figura 17.30

Concordamos também que o fator c pode ser escrito à esquerda ou à direita do vetor, $c\mathbf{A} = \mathbf{A}c$; entretanto não empregaremos essa possibilidade com muita freqüência (mas ocasionalmente é conveniente).

O vetor $(-1)\cdot\mathbf{B}$ escreve-se $-\mathbf{B}$, e é evidentemente um vetor igual em comprimento a $\mathbf{B}$ mas tendo o sentido oposto. Da mema forma que na Álgebra Elementar, $\mathbf{A} + (-\mathbf{B})$ escreve-se $\mathbf{A} - \mathbf{B}$. Há uma construção geométrica simples para $\mathbf{A} - \mathbf{B}$, resultando do fato de que $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ é o que deve ser somado a $\mathbf{B}$ para que se obtenha $\mathbf{A}$: quando $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ são colocados de modo a que suas origens coincidam, então $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ é o vetor que vai da extremidade de $\mathbf{B}$ à extremidade de $\mathbf{A}$ (Fig. 17.31).

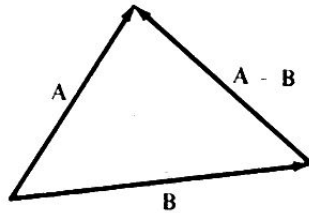



Figura 17.31 Subtração de vetores.

Como as leis que governam a adição de vetores e a multiplicação de vetor por escalar são idênticas às que conhecemos da Álgebra Elementar, temos fundamento em utilizar as regras familiares da Álgebra para resolver equações lineares envolvendo vetores. Os exemplos seguintes ilustram a eficiência desses procedimentos para se resolver certos tipos de problemas geométricos.

Exemplo 4 Na Fig. 17.32, a razão entre o segmento AP e o segmento AB é t, $0 < t < 1$. Expresse o vetor $\mathbf{R}$ em termos de $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ e t.

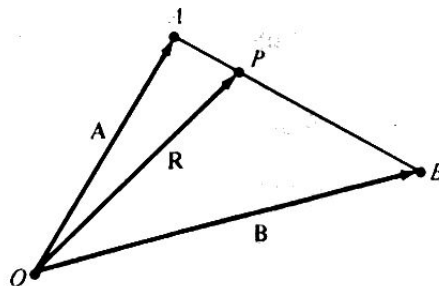



Figura 17.32

Solução O vetor $\overrightarrow{AB}$ é $B - A$ e o vator $\overrightarrow{AP}$ é $t(B - A)$. Como $\mathbf{R} = \mathbf{A} + \overrightarrow{AP}$, temos

$$\mathbf{R} = \mathbf{A} + t(\mathbf{B} - \mathbf{A}) = (1 - t)\mathbf{A} + t\mathbf{B}.$$

Em particular, se P é o ponto médio de AB, ou seja, no caso em que $t = 1/2$, então

$$\mathbf{R} = \tfrac{1}{2}\mathbf{A} + \tfrac{1}{2}\mathbf{B} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{B}).$$

Exemplo 5 Utilize métodos vetoriais para mostrar que as três medianas de qualquer triângulo se interceptam num ponto que está a dois terços do caminho que vai de cada vértice ao ponto médio do lado oposto*.

Solução Sejam A, B, C os vértices de um triângulo (Fig. 17.33) e sejam $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ os vetores que vão de um ponto exterior O a esses vértices.

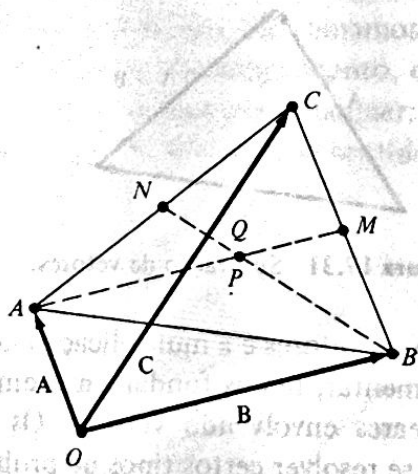



Figura 17.33

Se M é o ponto médio de BC, então $\overrightarrow{OM} = \dfrac{1}{2}(\mathbf{B} + \mathbf{C})$, $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - A = \dfrac{1}{2}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) - \mathbf{A}$.

Seja P o ponto que está a dois terços do caminho de A a M; então temos

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \mathbf{A} + \tfrac{2}{3}\overrightarrow{AM} = \mathbf{A} + \tfrac{2}{3}[\tfrac{1}{2}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) - \mathbf{A}] \\ &= \tfrac{1}{3}\mathbf{A} + \tfrac{1}{3}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \tfrac{1}{3}(\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}).\end{aligned} \quad (1)$$

* Lembre-se de que a *mediana* de um triângulo é um segmento que vai de um vértice ao ponto médio do lado oposto.

Analogamente, se N é o ponto médio de AC e Q está a dois terços do caminho de B a N, então vemos que

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ} &= \mathbf{B} + \tfrac{2}{3}\overrightarrow{BN} = \mathbf{B} + \tfrac{2}{3}(\overrightarrow{ON} - \mathbf{B}) \\ &= \mathbf{B} + \tfrac{2}{3}[\tfrac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{C}) - \mathbf{B}] = \tfrac{1}{3}(\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}).\end{aligned} \tag{2}$$

Comparando (1) e (2) concluiremos que os dois pontos P e Q coincidem. Da mesma maneira obtemos de novo um ponto no caso em que o percurso é dois terços do caminho de C ao ponto médio de AB. Isto completa a prova. Podemos também obter essa conclusão de forma mais elegante, observando que como a expressão (1) é simétrica nos três vetores **A**, **B**, **C**, evidentemente obtemos o mesmo ponto não importando de qual ponto médio comecemos.

Um vetor de comprimento 1 chama-se *vetor unitário*. É fácil ver que se dividimos qualquer vetor não-nulo **A** por seu próprio comprimento, obtemos um vetor unitário $\mathbf{A}/|\mathbf{A}|$ no mesmo sentido. Este fato simples é surpreendentemente útil.

Quando estamos trabalhando com vetores no plano de coordenadas, muitas vezes é conveniente utilizar os vetores unitários padrão **i** e **j** (Fig. 17.34); **i** aponta no sentido do semi-eixo positivo dos x e **j** aponta no sentido do semi-eixo positivo dos y.

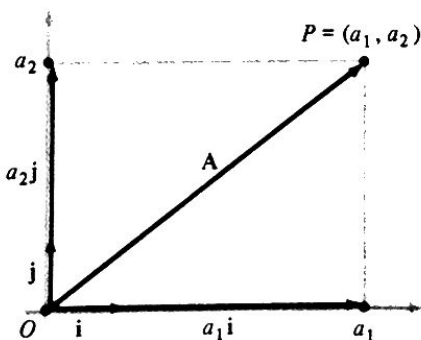



Figura 17.34

Vimos que qualquer vetor **A** do plano xy pode ter sua origem coincidindo com a origem do sistema, e dessa maneira será o vetor posição $\overrightarrow{OP}$ do ponto P que está na extremidade. Se P tem coordenadas a_1 e a_2, então os vetores $a_1\mathbf{i}$ $a_2\mathbf{j}$ vão da origem aos pontos a_1 e a_2 sobre os eixos; pela regra do paralelogramo temos

$$\mathbf{A} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}. \tag{3}$$

O número a_1 em (3) chama-se *componente x* ou *componente* **i** do vetor **A**, e a_2 chama-se *componente y* ou *componente* **j**. Essas componentes são escalares e devem ser distinguidas das componentes vetoriais $a_1\mathbf{i}$ e $a_2\mathbf{j}$. Pelo Teorema de Pitágoras, temos evidentemente

$$|A| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}.$$

A fórmula (3) revela que todo vetor do plano é uma combinação linear de **i** e **j**. O valor dessa fórmula baseia-se no fato de que tais combinações lineares podem ser manipuladas de acordo com as regras da álgebra ordinária. Assim, se

$$\mathbf{A} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{B} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j},$$

então

$$\begin{aligned} \mathbf{A} + \mathbf{B} &= (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}) + (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}) \\ &= (a_1 + b_1)\mathbf{i} + (a_2 + b_2)\mathbf{j}. \end{aligned}$$

Também

$$c\mathbf{A} = c(a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}) = (ca_1)\mathbf{i} + (ca_2)\mathbf{j}.$$

Exemplo 6 Se $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ e $\mathbf{B} = 2\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$, calcule $|\mathbf{A}|$ e exprima $3\mathbf{A} - 4\mathbf{B}$ em termos de **i** e **j**.

Solução Evidentemente,
$$|\mathbf{A}| = \sqrt{9 + 16} = 5$$

$$\begin{aligned} 3\mathbf{A} - 4\mathbf{B} &= 3(3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}) - 4(2\mathbf{i} - 5\mathbf{j}) \\ &= \mathbf{i} + 32\mathbf{j}. \end{aligned}$$

Problemas

1. Para cada um dos seguintes pares de vetores **A** e **B**, calcule $|\mathbf{A}|$, $3\mathbf{A} - 5\mathbf{B}$ e $6\mathbf{A} + \mathbf{B}$:
   (a) $\mathbf{A} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j}$, $\mathbf{B} = -2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$;
   (b) $\mathbf{A} = -7\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, $\mathbf{B} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$;
   (c) $\mathbf{A} = -6\mathbf{j}$, $\mathbf{B} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$;
   (d) $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$, $\mathbf{B} = 2\mathbf{i} - 8\mathbf{j}$.

2. Para cada um dos seguintes pares de pontos P e Q, determine o vetor $\overrightarrow{PQ}$ em termos de **i** e **j**:

   (a) $P = (-5, 0)$, $Q = (1, 3)$;
   (b) $P = (-1, -4)$, $Q = (-2, 3)$;
   (c) $P = (1, -5)$, $Q = (6, 4)$;
   (d) $P = (0, 2)$, $Q = (3, -5)$.

3. Quaisquer que sejam os três pontos P, Q, R, do plano, temos

$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RP} = \mathbf{0}.$$

Por quê? Verifique a igualdade para o caso particular em que $P = (2, -4)$, $Q = (-3, 5)$ e $R = (-4, 0)$, expressando cada vetor em termos de **i** e **j** e efetuando a adição.

4. Determine um vetor com o mesmo sentido que $6\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ e que tem

   (a) três vezes seu comprimento;
   (b) a metade de seu comprimento.

5. Para cada um dos seguintes vetores **A**, determine dois vetores unitários paralelos a **A** :

   (a) $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$; (b) $\mathbf{A} = -5\mathbf{i} + 12\mathbf{j}$;
   (c) $\mathbf{A} = 5\mathbf{i} - 7\mathbf{j}$; (d) $\mathbf{A} = 24\mathbf{i} - 7\mathbf{j}$.

6. Determine um vetor de comprimento 3 que tem

   (a) o mesmo sentido que $5\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$;
   (b) o sentido oposto de $4\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$.

7. Determine dois vetores de comprimento 26 e declividade 5/12.

8. Determine um vetor unitário que, tendo sua origem no ponto (4, 4) sobre $x^2 = 4y$, é normal à curva e aponta para o semi-eixo positivo dos y.

9. Se **A** é um vetor não-nulo, sabemos que $\mathbf{A}/|\mathbf{A}|$ é um vetor unitário com o mesmo sentido que **A**. Utilize esse fato para obter um vetor que divide ao meio o ângulo entre dois vetores não-nulos **A** e **B** cujas origens coincidem.

10. Três vetores são desenhados a partir dos vértices de um triângulo aos pontos médios dos lados opostos. Mostre que a soma desses vetores é zero.

11. Utilize métodos vetoriais para mostrar que as diagonais de um paralelogramo se cortam ao meio.

12. Utilize métodos vetoriais para mostrar que uma reta que passa por um vértice de um paralelogramo e pelo ponto médio de um lado não-adjacente trisseciona uma diagonal.

13. Resolva o problema da canoa do Exemplo 3, quando as velocidades da corrente e da canoa são 2 e $2\sqrt{2} \cong 2{,}8$ km/h, respectivamente.

14. Se a velocidade do vento é $\mathbf{v}_W$ e um avião voa com velocidade $\mathbf{v}_a$ com relação ao ar, então a velocidade do avião relativamente ao solo é

$$\mathbf{v}_g = \mathbf{v}_w + \mathbf{v}_a.$$

Os vetores $\mathbf{v}_a$ e $\mathbf{v}_g$ chamam-se *velocidade aparente* e *velocidade verdadeira*, respectivamente.

(a) Se o vento está soprando do nordeste a 60 km/h e o piloto deseja voar no sentido leste a 600 km/h, qual deve ser a velocidade aparente do avião?

(b) Repita a parte (a) para o caso em que o piloto deseja voar para sudeste a 600 km/h.

17.4 DERIVADAS DE FUNÇÕES VETORIAIS. VELOCIDADE E ACELERAÇÃO

Na Seção 17.3 entramos em contato com a álgebra dos vetores. No restante do capítulo estaremos interessados em problemas de movimento, e isto exige que trabalhemos com o cálculo de vetores. Quando vetores e cálculo interagem, o resultado é uma disciplina matemática de grande poder e eficiência para o estudo de problemas multidimensionais de geometria e física. Esse cálculo vetorial – usualmente chamado *análise vetorial* – é um dos tópicos importantes dos cursos avançados de Cálculo. Neste capítulo iremos apenas introduzir o assunto e discutir algumas das aplicações clássicas, culminando com um tratamento das Leis do Movimento Planetário, de Kepler, e a Lei de Gravitação Universal, de Newton.

Começamos salientando a ligação que há entre vetores e equações paramétricas de curvas abordadas nas duas primeiras seções deste capítulo.

Suponha que um ponto $P = (x, y)$ mova-se ao longo de uma curva do plano xy e suponha, além disso, que saibamos a sua posição em qualquer instante t (Fig. 17.35).

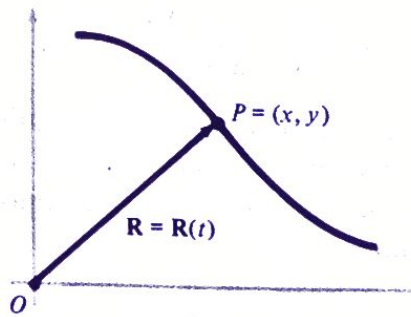



Figura 17.35

Isto significa que as coordenadas x e y são conhecidas como funções da variável escalar t, de modo que

$$x = x(t) \qquad \text{e} \qquad y = y(t).$$

Estas são equações paramétricas da trajetória em termos do parâmetro tempo t*.

Uma descrição mais concisa do movimento é obtida utilizando-se o vetor posição do ponto móvel,

$$\mathbf{R} = \overrightarrow{OP} = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}.$$

Podemos enfatizar que $\mathbf{R}$ é uma função vetorial de t escrevendo $\mathbf{R} = \mathbf{R}(t)$. Assim, o estudo de um par de equações paramétricas é equivalente ao estudo de uma única função vetorial e, como veremos, esta última é muitas vezes muito mais efetiva em revelar a essência do que está se passando.

Assim como no cálculo ordinário, $\mathbf{R}(t)$ diz-se *contínua* em $t = t_0$ se

$$\lim_{t \to t_0} \mathbf{R}(t) = \mathbf{R}(t_0). \tag{1}$$

o que significa que $|(\mathbf{R}(t) - \mathbf{R}(t_0)|$ pode ser tornada tão pequena quanto quisermos, tomando t suficientemente próximo de t_0. Segue-se facilmente de (1) que

$$\mathbf{R}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} \tag{2}$$

é contínua se e somente se $x(t)$ e $y(t)$ são ambas contínuas.

Definimos a derivada da função vetorial $\mathbf{R}(t)$ da maneira mais óbvia em termos de generalização. Quando t muda para $t + \Delta t$, a variação de $\mathbf{R}$ é $\Delta\mathbf{R} = \mathbf{R}(t + \Delta t) - \mathbf{R}(t)$, e a derivada de $\mathbf{R}(t)$ com relação a t é definida como o limite.

---

* Na Seção 17.1 escrevemos as equações paramétricas de uma curva como $x = f(t), y = g(t)$. Entretanto, é mais direto e conveniente utilizar para a função a mesma letra usada para a variável dependente, como fazemos aqui.

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{R}}{\Delta t}. \tag{3}$$

Isto é, dividimos o vetor $\Delta\mathbf{R}$ por Δt e depois calculamos o limite do novo vetor $\Delta\mathbf{R}/\Delta t$ quando $\Delta t \to 0$. Esse vetor se aproxima de um limite se e somente se sua extremidade tende a uma posição-limite, e isto acontece se e somente se cada uma de suas componentes tende a um limite. É claro que em termos de componentes temos

$$\frac{\Delta \mathbf{R}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{R}(t+\Delta t) - \mathbf{R}(t)}{\Delta t} = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}\,\mathbf{i} + \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t}\,\mathbf{j}.$$

Assim, se a definição (3) for aplicada a (2), veremos imediatamente que $\mathbf{R}(t)$ será diferenciável se e somente se $x(t)$ e $y(t)$ o forem e, nesse caso,

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{dx}{dt}\,\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\,\mathbf{j}. \tag{4}$$

Da mesma forma que fazíamos no cálculo ordinário, escrevemos com freqüência $\mathbf{R}'(t)$ para $d\mathbf{R}/dt$ e $\mathbf{R}''(t)$ para $d^2\,\mathbf{R}/dt^2$

Diversas regras familiares de diferenciação podem agora ser estendidas para funções vetoriais. Uma das mais importantes é a seguinte: se uma função vetorial é multiplicada por uma função escalar e se ambas são deriváveis, seu produto é derivável e obedece à regra

$$\frac{d}{dt}(u\mathbf{R}) = u\,\frac{d\mathbf{R}}{dt} + \mathbf{R}\,\frac{du}{dt}.$$

Essa relação pode ser provada da mesma maneira que a regra do produto para duas funções escalares. A regra da soma de duas funções vetoriais se mantém; a derivada de uma função vetorial constante é o vetor $\mathbf{0}$ e a regra da cadeia é válida.

É importante compreender o significado da derivada $d\mathbf{R}/dt$ globalmente como vetor e não meramente em termos de suas componentes como em (4). Para isso, acompanhamos o significado geométrico das várias etapas expressas na definição (3). Primeiro a variação Δt da variável independente t leva o vetor posição de $\mathbf{R}(t)$ para $\mathbf{R}(t+\Delta t)$ (Fig. 17.36).

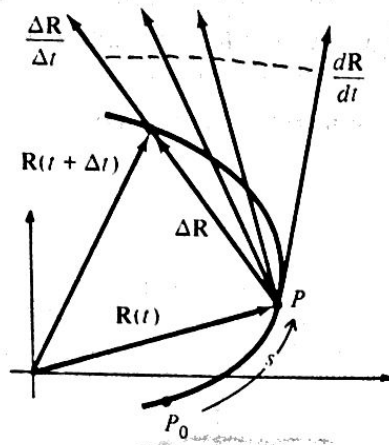



Figura 17.36

O vetor $\Delta\mathbf{R} = \mathbf{R}(t + \Delta t) - \mathbf{R}(t)$ está orientado ao longo da corda da extremidade de $\mathbf{R}(t)$ até a extremidade de $\mathbf{R}(t + \Delta t)$. Dividir $\Delta\mathbf{R}$ pelo escalar Δt altera seu comprimento e produz um outro vetor $\Delta\mathbf{R}/\Delta t$ paralelo a $\Delta\mathbf{R}$. Como a direção-limite da corda quando $\Delta t \to 0$ é a direção da tangente, a derivada $d\mathbf{R}/dt$ é tangente à trajetória na extremidade de $\mathbf{R}$. Como sabemos, todo vetor pode ser encarado como tendo sua origem na origem do sistema de coordenadas, mas na Fig. 17.36 colocamos a origem de $d\mathbf{R}/dt$ na extremidade de $\mathbf{R}$ objetivando uma visualização melhor do que está ocorrendo.

Para interpretar o comprimento do vetor $d\mathbf{R}/dt$, seja s o comprimento da curva desde um ponto fixo P_0, correspondente a $t = t_0$, até um ponto variável P correspondente a t, $t \geqslant t_0$. De (4), temos

$$\left|\frac{d\mathbf{R}}{dt}\right| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dt} = \frac{ds}{dt}. \tag{5}$$

Como t é o tempo na presente discussão, a derivada ds/dt é a taxa com que o ponto móvel P cobre a distância, ou seja, é a velocidade desse ponto.

Essas observações indicam que o vetor $d\mathbf{R}/dt$ tem como direção e comprimento a direção e o valor absoluto da velocidade de nosso ponto móvel. Exatamente como ocorria no caso do movimento unidimensional, definimos a velocidade v de um ponto móvel como a taxa de variação de sua posição.

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{R}}{dt}$$

com módulo ou valor absoluto

$$v = |\mathbf{v}| = \left|\frac{d\mathbf{R}}{dt}\right|.$$

Exemplo 1 Se $\mathbf{R} = (4 \cos 2t)\,\mathbf{i} + (3 \operatorname{sen} 2t)\,\mathbf{j}$, determine a trajetória do ponto móvel, a velocidade v e os pontos da trajetória em que a velocidade é máxima e mínima.

Solução A curva tem equações paramétricas $x = 4 \cos 2t$, $y = 3 \operatorname{sen} 2t$, logo a trajetória é a elipse (Fig. 17.37),

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

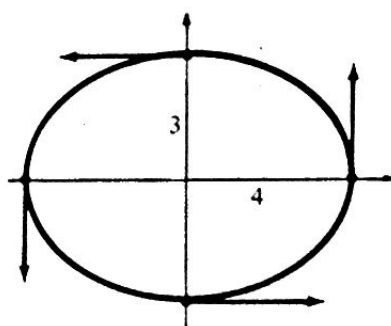



Figura 17.37

O ponto $P = (x, y)$ move-se nessa elipse, no sentido anti-horário indicado pelas flechas na figura. A velocidade é

$$\mathbf{v} = (-8 \operatorname{sen} 2t)\mathbf{i} + (6 \cos 2t)\mathbf{j}. \tag{6}$$

e seu módulo é

$$v = |\mathbf{v}| = (64 \operatorname{sen}^2 2t + 36 \cos^2 2t)^{1/2} = (28 \operatorname{sen}^2 2t + 36)^{1/2}.$$

É claro, por essa fórmula de v, que a velocidade mínima é 6, que ocorre quando $\operatorname{sen} 2t = 0$. Pela fórmula de $\mathbf{R}$, isto ocorre quando P está em uma das extremidades do eixo maior. A velocidade máxima é 8, que ocorre quando $\operatorname{sen} 2t = 1$, de modo que $\cos 2t = 0$, isto é, em uma das extremidades do eixo menor.

Assim como a velocidade v de nosso ponto móvel é a taxa de variação de sua posição, a aceleração $\mathbf{a}$ é a taxa de variação de sua velocidade

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2}.$$

Assim nossos conceitos vetoriais de velocidade e aceleração são generalizações diretas de versões mais limitadas desses conceitos analisados em nossos estudos anteriores do movimento unidimensional.

Sendo o ponto móvel P o lugar geométrico de um objeto físico móvel e podendo, portanto, ser encarado como uma partícula de massa m movendo-se sob a ação de uma força aplicada **F**, teremos, de acordo com a segunda lei do movimento de Newton, que

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}. \tag{7}$$

Essa forma vetorial da lei de Newton mostra que os vetores força e aceleração têm ambos o mesmo sentido. Como visualizamos a força **F** como sendo aplicada à partícula, isto é com origem em P, é costume colocar também a origem de **a** em P (Fig. 17.38).

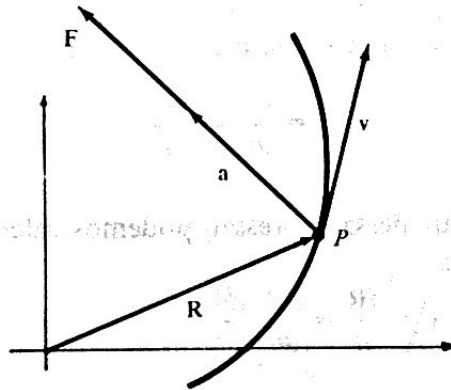



Figura 17.38 $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$

Ambas, **F** e **a**, apontam usualmente para o lado côncavo da curva, mas em casos excepcionais podem ser tangentes à curva.

Exemplo 1 (cont.) Para calcular a aceleração **a** do movimento dado por $\mathbf{R} = (4 \cos 2t)\mathbf{i} + (3 \operatorname{sen} 2t)\mathbf{j}$, temos apenas de derivar a velocidade (6) com relação a t,

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = (-16 \cos 2t)\mathbf{i} + (-12 \operatorname{sen} 2t)\mathbf{j}.$$

Como essa expressão pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= -4[(4 \cos 2t)\mathbf{i} + (3 \operatorname{sen} 2t)\mathbf{j}] \\ &= -4\mathbf{R}, \end{aligned}$$

o vetor aceleração está sempre dirigido para o centro da trajetória elíptica.

Uma situação simples mas importante é aquela em que a partícula percorre uma trajetória circular com velocidade constante.

Exemplo 2 *Movimento circular uniforme.* Uma partícula de massa m move-se no sentido anti-horário na circunferência $x^2 + y^2 = r^2$ com velocidade constante v. Calcule a aceleração da partícula e a força necessária para produzir esse movimento.

Solução Utilizando-se a notação da Fig. 17.39, a trajetória pode ser escrita como

$$\mathbf{R} = (r\cos\theta)\mathbf{i} + (r\,\text{sen}\,\theta)\mathbf{j}, \tag{8}$$

onde θ é o parâmetro.

Como $s = r\,\theta$, temos

$$v = \frac{ds}{dt} = r\frac{d\theta}{dt},$$

e, portanto, $d\theta/dt = v/r$. A partir dessa expressão podemos calcular a velocidade e a aceleração de (8), utilizando a regra da cadeia:

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{d\mathbf{R}}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt}\\ &= [(-r\,\text{sen}\,\theta)\mathbf{i} + (r\cos\theta)\mathbf{j}]\cdot\frac{v}{r}\\ &= v[(-\text{sen}\,\theta)\mathbf{i} + (\cos\theta)\mathbf{j}];\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\mathbf{v}}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt}\\ &= v[(-\cos\theta)\mathbf{i} + (-\text{sen}\theta)\mathbf{j}]\cdot\frac{v}{r}\\ &= -\frac{v^2}{r}[(\cos\theta)\mathbf{i} + (\text{sen}\theta)\mathbf{j}].\end{aligned}$$

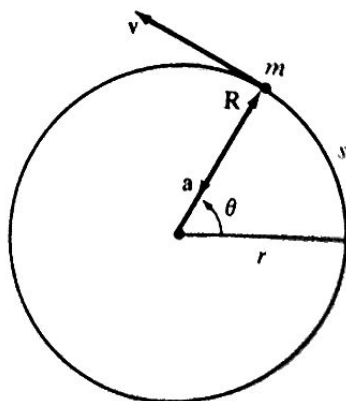



Figura 17.39

Multiplicando e dividindo por r, vê-se facilmente que $\mathbf{a} = -(v^2/r^2)\mathbf{R}$. Assim o vetor aceleração $\mathbf{a}$ aponta no sentido do centro da circunferência e tem módulo

$$|\mathbf{a}| = \frac{v^2}{r^2}|\mathbf{R}| = \frac{v^2}{r}.$$

De acordo com a Lei de Newton (7), a força $\mathbf{F}$ necessária para produzir esse movimento deve apontar para o centro da circunferência com intensidade constante mv^2/r. Tal força chama-se *força centrípeta.*

É óbvio, no entanto, que o tempo t é um parâmetro de importância fundamental no estudo do movimento de um ponto P ao longo de uma trajetória curva. Um outro parâmetro importante é o comprimento de arco s, medido a partir de um ponto fixo P_0 ao longo da curva até P (Fig. 17.40).

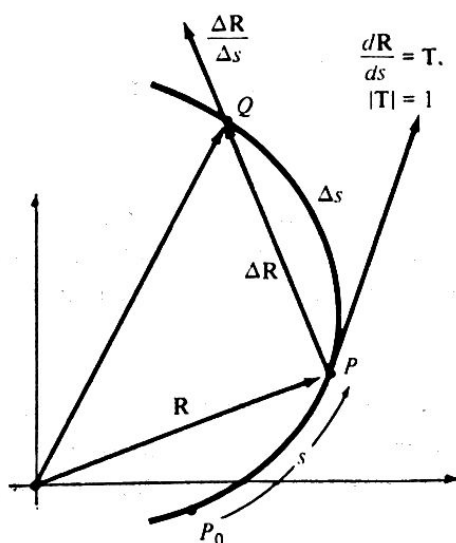



Figura 17.40

Consideramos agora $\mathbf{R}$ como função de s e examinamos o significado da derivada $d\mathbf{R}/ds$. Se P se move ao longo da curva até Q, quando s passa a $s + \Delta s$, então

$$\frac{\Delta \mathbf{R}}{\Delta s} = \frac{\overrightarrow{PQ}}{\Delta s}$$

é um vetor cujo sentido é o da corda de P a Q e cujo comprimento é

$$\frac{PQ}{\Delta s} = \frac{\text{corda}}{\text{arco}}.$$

Quando $\Delta s \to 0$, a direção da corda tende à direção da tangente e a razão entre a corda e o arco tende a 1. Portanto o vetor **T**, definido por

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{R}}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \mathbf{R}}{\Delta s},$$

é um vetor de comprimento unitário tangente à curva em P e apontando no sentido dos s crescentes. **T** chama-se *vetor tangente unitário.*

Para esclarecer nosso primeiro uso de **T**, recordamos que as fórmulas da velocidade **v** e da aceleração **a** em termos de suas componentes são

$$\mathbf{v} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{a} = \frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\mathbf{j}. \tag{9}$$

Essas fórmulas são convenientes para o cálculo, mas não contribuem muito para nossa compreensão intuitiva da natureza dos vetores **v** e **a**. Entretanto, a regra da cadeia nos permite escrever a velocidade **v** na forma

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{d\mathbf{R}}{ds}\frac{ds}{dt} = \mathbf{T}\frac{ds}{dt}. \tag{10}$$

No sentido de maior compreensão, essa fórmula é superior à primeira das fórmulas (9), pois em (10) a direção de **v** é dada por **T** e seu módulo é dado por ds/dt, e o significado de cada um é perceptível imediatamente. Nossa principal meta nas duas próximas seções é obter uma fórmula correspondente para a aceleração **a**.

Observação Na maior parte de nosso trabalho, restringimo-nos a curvas parametrizadas $\mathbf{R} = \mathbf{R}(t)$, que são *lisas,* no sentido de que a derivada $\mathbf{R}'(t)$ é contínua e não-nula em todos os pontos. Em princípio, a continuidade de $\mathbf{R}'(t)$ permite-nos calcular s como função de t a partir da fórmula (5)

$$s = \int_{t_0}^{t} |\mathbf{R}'(t)|\,dt = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt.$$

E como

$$\frac{ds}{dt} = |\mathbf{R}'(t)| > 0,$$

a função $s = s(t)$ é estritamente crescente e, portanto, tem uma inversa $t = t(s)$. Isto nos permite introduzir s como um parâmetro da curva,

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(t) = \mathbf{R}[t(s)].$$

Entretanto, em muitos casos é difícil ou impossível efetuar esses cálculos. A integral em s pode ser difícil de calcular; mesmo que $s = s(t)$ seja conhecido explicitamente, pode ser difícil determinar a função inversa, $t = t(s)$. Felizmente, essas dificuldades não são um obstáculo sério pois raras vezes há alguma necessidade real de termos **R** expresso explicitamente como função de s. O importante para compreender o movimento ao longo de curvas é a *idéia* de utilizar o comprimento de arco como parâmetro – como anteriormente – e não o procedimento real de fazer assim em problemas específicos.

Problemas

1. Dê uma descrição geométrica do lugar geométrico da extremidade de **R** se $\mathbf{R} = \mathbf{A} + t\mathbf{B}$ onde nem **A** nem **B** são nulos e **B** não é paralelo a **A**. Faça um esboço.

2. Qual o lugar geométrico da extremidade de **R** se $\mathbf{R} = at\mathbf{i} + b(1 - t)\mathbf{j}$, onde a e b são constantes não-nulas?

3. Mostre que o lugar geométrico da extremidade de $\mathbf{R} = t\mathbf{i} + (mt + b)\mathbf{j}$ é a reta $y = mx + b$.

4. Qual o lugar geométrico da extremidade de $\mathbf{R} = (t + 1)\,\mathbf{i} + (t^2 + 2t + 3)\mathbf{j}$?

Nos Problemas 5 a 9, **R** é a posição de um ponto móvel no instante t. Em cada caso, calcule a velocidade, a aceleração e o módulo da velocidade.

5. $\mathbf{R} = (t^2 + 1)\mathbf{i} + (t - 1)\mathbf{j}$.
6. $\mathbf{R} = t^2\mathbf{i} + t^3\mathbf{j}$.
7. $\mathbf{R} = t\mathbf{i} + (t^3 - 3t)\mathbf{j}$.
8. $\mathbf{R} = (\cos 2t)\mathbf{i} + (\operatorname{sen} t)\mathbf{j}$.
9. $\mathbf{R} = (\operatorname{tg}\ t)\mathbf{i} + (\sec t)\mathbf{j}$.

10. Sendo o vetor posição de uma partícula móvel $\mathbf{R} = (a \cos kt)\mathbf{i} + (b \operatorname{sen} kt)\mathbf{j}$, onde a, b, k são constantes positivas, então a partícula move-se na elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$. Mostre que $\mathbf{a} = -k^2\mathbf{R}$ e descreva a força **F** que produz tal movimento.

11. Considerando-se a aceleração de uma partícula móvel $\mathbf{a} = a\mathbf{j}$, onde a é uma constante, calcule **R** com duas integrações sucessivas com relação a t e mostre que a trajetória é uma parábola, uma reta ou um único ponto.

12. Supondo-se que uma partícula móvel não sofra a influência de nenhuma força, de modo que $\mathbf{a} = 0$, mostre que a partícula move-se com módulo de velocidade constante ao longo de uma reta. Esta é a primeira lei do movimento de Newton.

17.5 CURVATURA E VETOR NORMAL UNITÁRIO

Na Seção 17.4 expressamos a velocidade **v** de nosso ponto móvel P em termos do vetor tangente unitário **T** (Fig. 17.41), onde **T** foi obtido como derivada do vetor posição **R** com relação ao comprimento de arco s,

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{R}}{ds}.$$

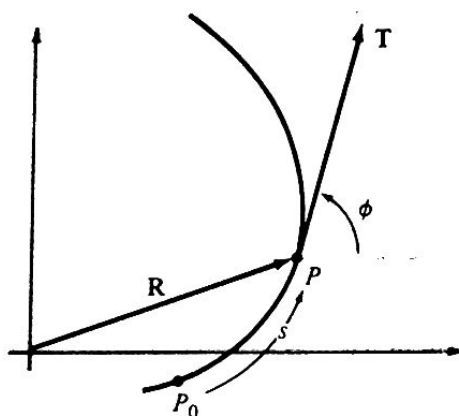



Figura 17.41

Como primeiro passo para obtermos a fórmula geral da aceleração deduzida na Seção 17.6, devemos analisar agora a derivada de **T** em relação a s, e isto requer que examinemos o conceito puramente geométrico de "curvatura" de uma curva.

Consultando nossa intuição sobre a noção de curvatura, a maioria de nós concordará que uma reta não se curva de nenhum modo; isto é, tem curvatura nula. Além disso, uma circunferência tem a mesma curvatura em todos os pontos, e uma circunferência pequena tem curvatura maior do que uma circunferência maior (Fig. 17.42).

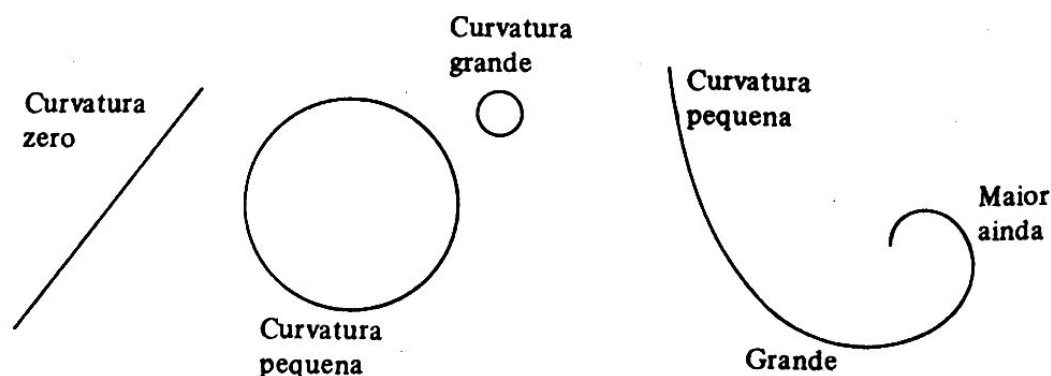



Figura 17.42 O significado da curvatura.

No caso de uma curva não-uniforme como a da direita, a curvatura deve ser menor onde a curva é relativamente reta e maior onde a curva se dobra mais acentuadamente.

Essas opiniões são baseadas na idéia de que a curvatura num ponto deve medir o quão rapidamente a direção de uma curva se altera naquele ponto com relação à distância ao longo da curva. Como a direção (e sentido) é especificada pelo ângulo ϕ da reta tangente relativamente ao eixo x (Fig. 17.41), consideramos esse ângulo como função do comprimento de arco s e definimos a curvatura k como a razão de variação de ϕ com relação a s,

$$k = \frac{d\phi}{ds}. \tag{1}$$

A curvatura pode ser positiva ou negativa e pode ser nula em certos casos. Como $k > 0$ significa que ϕ é crescente quando s cresce, é claro que isto significa que a curva vira para a esquerda da tangente quando nos movemos ao longo da curva no sentido positivo. Analogamente, $k < 0$ significa que a curva vira para a direita da tangente.

É óbvio, pela definição (1), que a curvatura de uma reta é nula, pois ϕ não varia quando nos movemos ao longo da reta. No caso de uma circunferência de raio a (Fig. 17.43), temos

$$\phi = \theta + \frac{\pi}{2},$$

e utilizando o fato de que $\theta = s/a$, vemos facilmente que a curvatura é

$$k = \frac{d\phi}{ds} = \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{a}. \tag{2}$$

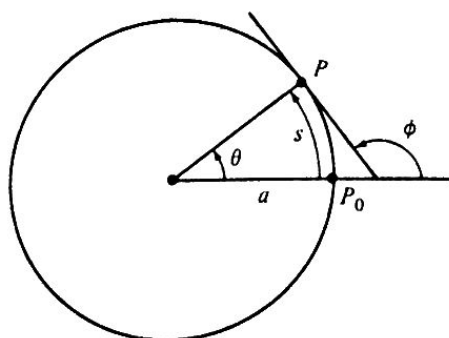



Figura 17.43

Como a curvatura de uma circunferência é evidentemente constante, podemos obter também o resultado (2) observando que uma revolução completa implica uma variação na direção de 2π radianos sobre uma curva de comprimento $2\pi a$, logo

$$k = \frac{d\phi}{ds} = \frac{2\pi}{2\pi a} = \frac{1}{a}.$$

Notamos de passagem que a fórmula (2) mostra que circunferências menores têm curvaturas maiores (Fig. 17.42).

Fora esses casos muito simples, o cálculo real da curvatura é efetuado por várias fórmulas bem complicadas, dependendo de como a curva é definida.

A situação mais simples é a em que a curva é o gráfico de uma função $y = f(x)$. Como $\operatorname{tg} \phi = dy/dx$, temos

$$\phi = \operatorname{arc\,tg}^{-1} \frac{dy}{dx} \qquad \text{e} \qquad d\phi = \frac{d^2y/dx^2}{1 + (dy/dx)^2}\, dx.$$

Além disso, a partir da expressão $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ para o diferencial do comprimento do arco, obtemos

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{1/2} dx. \tag{3}$$

Dividindo-se $d\theta$ por ds, vemos que, nesse caso, a curvatura é dada pela fórmula

$$k = \frac{d\phi}{ds} = \frac{d^2y/dx^2}{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}}. \tag{4}$$

Na Seção 4.2 utilizamos o sinal da segunda derivada d^2y/dx^2 para descobrir em que direção a curva se dobra: côncava para cima ou côncava para baixo. A fórmula (4) nos dá essa informação e muito mais – ela nos revela precisamente o quanto a linha se curva.

Exemplo 1 Mostre que a curvatura da parábola $y = x^2$ é maior no vértice.

Solução Estamos suficientemente familiarizados com a forma geral das parábolas (Fig. 17.44) para aceitar essa afirmação sem dificuldades, pois a curva se achata visivelmente quando $|x| \to \infty$.

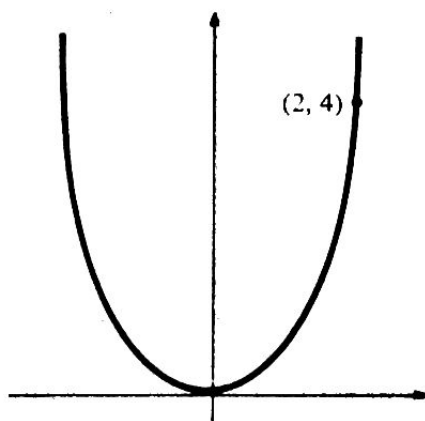



Figura 17.44

Entretanto, a fim de verificarmos a afirmação por meio dos instrumentos do cálculo, utilizamos o fato de que $dy/dx = 2x$ e $d^2y/dx^2 = 2$, para escrever

$$k = \frac{d^2y/dx^2}{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}} = \frac{2}{(1 + 4x^2)^{3/2}}.$$

É claro que k tem seu valor máximo quando $x = 0$, que é a abscissa do vértice, e também que $k \to 0$ quando $|x| \to \infty$. Para ilustrar quão rapidamente a curva se achata quando nos afastamos do vértice, observamos que no ponto (2, 4) – bastante próximo do vértice – temos

$$k = \frac{2}{(1 + 16)^{3/2}} < \frac{2}{16^{3/2}} = \frac{1}{32}.$$

Assim, nesse ponto a parábola é mais achatada que numa circunferência de raio 32, o que é bastante surpreendente.

Se uma curva for definida por equações paramétricas $x = x(t)$ e $y = y(t)$, sua curvatura será calculada por uma fórmula um pouco diferente. Dessa vez começamos com

$$\phi = \text{arc tg}^{-1} \frac{dy/dt}{dx/dt} \tag{5}$$

e

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt = \left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right]^{1/2} dt. \tag{6}$$

Os cálculos que levam à fórmula da curvatura são um pouco mais complicados por causa do quociente em (5). O resultado final é

$$k = \frac{d\phi}{ds} = \frac{(dx/dt)(d^2y/dt^2) - (dy/dt)(d^2x/dt^2)}{[(dx/dt)^2 + (dy/dt)^2]^{3/2}} = \frac{x'y'' - y'x''}{[(x')^2 + (y')^2]^{3/2}}. \tag{7}$$

Os estudantes observarão que (7) tem (4) como caso particular, quando uma curva $y = f(x)$ é encarada como uma curva paramétrica $x = x$, $y = f(x)$ com x substituindo t no papel de parâmetro.

Devemos chamar a atenção para uma pequena dificuldade com os sinais. Escolhendo a raiz quadrada positiva em ambas expressões, (3) e (6), estamos pressupondo que o sentido de crescimento do comprimento de arco s é o mesmo que o sentido em que o parâmetro cresce. Se não for esse o caso, ao aplicarmos (4) ou (7) a um problema específico, será necessário mudar o sinal para obtermos a curvatura real.

Exemplo 2 Móstre que uma circunferência de raio a tem curvatura $1/a$ utilizando as equações paramétricas $x = a\cos\theta$, $y = a \operatorname{sen}\theta$.

Solução Aplicamos a fórmula (7) com a convenção de que "linhas" denotam derivadas com relação a θ. Primeiro, calculemos

$$x' = -a \operatorname{sen}\theta, \qquad y' = a\cos\theta,$$
$$x'' = -a\cos\theta, \qquad y'' = -a\operatorname{sen}\theta.$$

A aplicação da fórmula (7) nos dá

$$k = \frac{a^2\operatorname{sen}^2\theta + a^2\cos^2\theta}{(a^2\operatorname{sen}^2\theta + a^2\cos^2\theta)^{3/2}} = \frac{1}{a},$$

como era esperado.

Agora que compreendemos o conceito de curvatura, estamos prontos para tratar rapidamente do principal problema desta seção, que é o de analisar a derivada do vetor tangente unitário **T** com relação a s.

Começamos observando que em termos do ângulo de inclinação ϕ (Fig. 17.45), temos

$$\mathbf{T} = \mathbf{i}\cos\phi + \mathbf{j}\operatorname{sen}\phi,$$

logo

$$\frac{d\mathbf{T}}{d\phi} = -\mathbf{i}\operatorname{sen}\phi + \mathbf{j}\cos\phi. \tag{8}$$

A derivada (8) é evidentemente um vetor unitário, pois seu comprimento é

$$\left|\frac{d\mathbf{T}}{d\phi}\right| = \sqrt{\operatorname{sen}^2\phi + \cos^2\phi} = 1.$$

Além disso, é perpendicular a **T**, pois sua declividade é

$$\frac{\cos\phi}{-\operatorname{sen}\phi} = -\frac{1}{\operatorname{tg}\phi},$$

que é o inverso, com sinal trocado, da declividade de **T**. De fato, a derivada (8) é o *vetor normal unitário*, **N**, mostrado na figura:

$$\frac{d\mathbf{T}}{d\phi} = \mathbf{N} \tag{9}$$

onde **N** é o vetor obtido girando-se **T** de um ângulo de $\pi/2$ no sentido anti-horário.

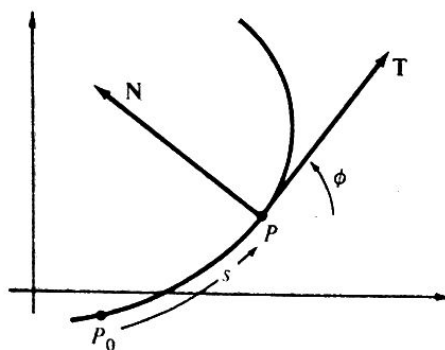



Figura 17.45

Essa última observação é estabelecida comparando-se (8) com

$$\mathbf{N} = \mathbf{i}\cos\left(\phi + \frac{\pi}{2}\right) + \mathbf{j}\,\mathrm{sen}\left(\phi + \frac{\pi}{2}\right) = -\mathbf{i}\,\mathrm{sen}\,\phi + \mathbf{j}\cos\phi.$$

Aplicando a regra da cadeia e fazendo uso de (1) e (9), obtemos facilmente o principal resultado desta seção,

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{d\mathbf{T}}{d\phi}\frac{d\phi}{ds} = \mathbf{N}k.$$

Deve estar clara nesta altura a razão pela qual foi necessário abordar curvatura ao analisar o significado de $d\mathbf{T}/ds$. Como **T** tem comprimento constante, somente sua direção varia quando s varia, e isto é o que nos conduz à curvatura. Salientamos também que, independente de k ser positivo ou negativo, $\mathbf{N}k$ aponta sempre para o lado côncavo da curva.

Observação Seja P um ponto da curva em que a curvatura k não é zero. Desenhe a normal à curva nesse ponto no sentido de seu lado côncavo (Fig. 17.46).

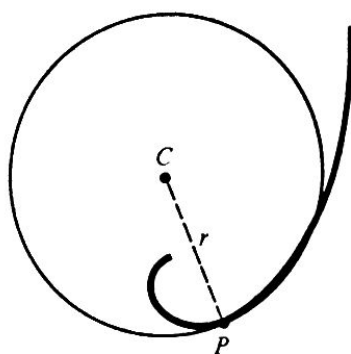



Figura 17.46 O círculo de curvatura.

Todo círculo por P cujo centro está nessa normal será tangente à curva em P. Dentre esses círculos, aquele cuja curvatura é igual a $|k|$ chama-se *círculo de curvatura*. Além disso, o centro C desse círculo chama-se *centro de curvatura* e seu raio, r, *raio de curvatura*. Sabemos por (2) que, no caso de um círculo, o raio é o inverso da curvatura, logo o raio de curvatura de uma curva num ponto é dado pela fórmula

$$r = \frac{1}{|k|} = \frac{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}}{|d^2y/dx^2|},$$

se a curva for o gráfico de uma função $y = f(x)$. Uma fórmula análoga vale para uma curva paramétrica. Quando P se move ao longo da curva dada, o lugar geométrico dos correspondentes centros de curvatura C chama-se *evoluta* da curva dada. No Apêndice A.13 discutiremos algumas aplicações notáveis da Teoria das evolutas de ciclóides.

Problemas

1. Determine a curvatura da curva dada como função de x ou t:

   (a) $y = \sqrt{x}$;
   (b) $y = \ln \sec x$;
   (c) $y = x + \dfrac{1}{x}$;
   (d) $x = e^t \operatorname{sen} t$, $y = e^t \cos t$;
   (e) $x = t^2$, $y = \ln t$.

2. Determine o raio de curvatura da curva dada no ponto dado:

(a) $x = t^2, y = t^3$ em $t = 2$;
(b) $x = e^t, y = e^{-t}$ em $t = 0$;
(c) $y = \frac{1}{x}$ em $(1, 1)$;
(d) $x = \tan t, y = \cot t$ em $t = \pi/4$.

3. Em cada caso, calcule o maior valor (se existir) da curvatura:

(a) $y = \text{sen}\, x$; (b) $y = \frac{1}{3}x^3$;
(c) $y = \ln x$.

4. Dê os detalhes do estabelecimento da fórmula paramétrica da curvatura (7).

5. Determine a curvatura da circunferência $x^2 + y^2 = a^2$ aplicando a fórmula (4) separadamente a $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ e $y = -\sqrt{a^2 - x^2}$. Que dificuldade aparece e como podemos contorná-la?

6. Para a curva $y = e^x$, determine o raio de curvatura e a equação do círculo de curvatura no ponto (0, 1). Esboce a curva e esse círculo. Use a equação do círculo para calcular os valores de dy/dx e d^2y/dx^2 no ponto (0, 1) e verifique que essas derivadas têm os mesmos valores que as correspondentes derivadas de $y = e^x$.

7. Em que ponto da curva $y = e^x$ o raio de curvatura é mínimo? Qual o raio mínimo?

8. Sabemos que se $y = f(x)$ for uma reta, então $k = 0$. Mostre que reciprocamente, se $k = 0$, então $y = f(x)$ é uma reta.

9. Determine o valor máximo do raio de curvatura da parte do primeiro quadrante da hipociclóide de quatro cúspides $x = a \cos^3\theta$, $y = a \,\text{sen}^3\theta$. Onde o raio de curvatura tem seu valor máximo?

10. Pelo Problema 15 da Seção 17.1, as equações

$$x = \cos\theta + \theta\,\text{sen}\,\theta,$$
$$y = \text{sen}\,\theta - \theta\cos\theta$$

representam a involuta de uma circunferência de raio 1. Determine a curvatura em qualquer ponto.

11. Determine o raio de curvatura da ciclóide.

$$x = a(\theta - \text{sen}\,\theta),$$
$$y = a(1 - \cos\theta)$$

em um ponto qualquer.

12. (a) Esboce a elipse $x = a\cos\theta$, $y = b\,\text{sen}\,\theta$, onde $0 < b < a$ e determine sua curvatura k num ponto arbitrário.

(b) Sem calcular o valor de $dk/d\theta$, use a fórmula de (a) para mostrar que k tem seus valores máximos nas extremidades do eixo maior e seus valores mínimos nas extremidades do eixo menor. Mostre que esses valores são a/b^2 e b/a^2, respectivamente. Observe que se $b = a$, então temos uma circunferência e ambas as fórmulas dão $k = 1/a$ como era de se esperar*.

13. Seja a um número positivo e considere a curva $y = x^a$ para $x > 0$. Mostre que a curvatura tende a um limite finito quando $x \to 0$ se $a \leqslant \frac{1}{2}$ ou $a = 1$ ou $a \geqslant 2$, e somente nesses casos.

17.6 COMPONENTES TANGENCIAL E NORMAL DA ACELERAÇÃO

Considere uma partícula móvel cuja posição no instante t seja dada pelas equações paramétricas $x = x(t)$ e $y = y(t)$. O vetor posição dessa partícula é $\mathbf{R} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$, e sua velocidade e aceleração são

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j}, \qquad \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\mathbf{j}. \tag{1}$$

* Para curvas em geral, um ponto em que a curvatura tem um valor máximo ou mínimo chama-se vértice. Pelo Problema 12, uma elipse tem quatro vértices. Uma elipse é um caso especial de *oval*, que é uma curva convexa fechada cujas equações paramétricas $x = x(t)$, $y = y(t)$ têm derivadas segundas contínuas. O famoso *Teorema dos Quatro Vértices*, da Geometria Diferencial, afirma que toda oval tem pelo menos quatro vértices.

Infelizmente, as componentes **i** e **j** desses vetores não têm significados físicos, pois dependem do sistema de coordenadas e a escolha do sistema de coordenadas é arbitrária; ela não é determinada pela natureza intrínseca do movimento. Entretanto, vimos na Seção 17.4 que a velocidade pode também ser escrita

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{d\mathbf{R}}{ds}\frac{ds}{dt}$$

ou

$$\mathbf{v} = \mathbf{T}\frac{ds}{dt}, \tag{2}$$

onde **T** é o vetor tangente unitário (Fig. 17.47).

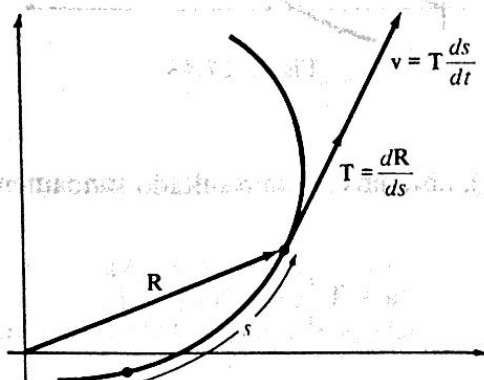



Figura 17.47

Essa expressão da velocidade *tem* significado físico, porque **T** dá a direção do movimento e *ds/dt* dá sua dimensão, a velocidade.

Para obtermos uma expressão análoga para a aceleração, derivamos (2) com relação a t,

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{T}\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{ds}{dt}\frac{d\mathbf{T}}{dt}. \tag{3}$$

Da Seção 17.5, sabemos que

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt} = \frac{d\mathbf{T}}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{d\mathbf{T}}{d\phi}\frac{d\phi}{ds}\frac{ds}{dt} = \mathbf{N}k\frac{ds}{dt}, \tag{4}$$

onde k é a curvatura e **N** é o vetor normal unitário (Fig. 17.48).

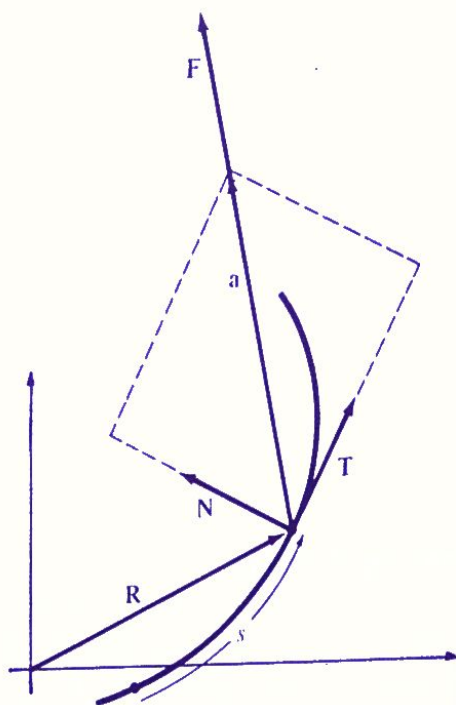



Figura 17.48

Quando (4) é substituída em (3), obtemos nosso resultado fundamental,

$$\mathbf{a} = \mathbf{T}\frac{d^2s}{dt^2} + \mathbf{N}k\left(\frac{ds}{dt}\right)^2. \tag{5}$$

Esta é uma equação importante da Mecânica. Os vetores **T** e **N** são utilizados como vetores unitários de referência, tais como **i** e **j**. Eles nos permitem decompor a aceleração em duas componentes "naturais", na direção do movimento e na direção normal a esta. Essas componentes esclarecem a realidade muito mais do que as componentes arbitrárias dadas pela segunda das equações (1). A *componente tangencial* d^2s/dt^2 é simplesmente a derivada da velocidade $v = ds/dt$ da partícula ao longo de sua trajetória. A *componente normal* $k(ds/dt)^2 = kv^2$ tem o valor

$$|k|v^2 = \frac{v^2}{r}, \tag{6}$$

onde r é o raio de curvatura. É claro, a partir de (5), que quando $k \neq 0$ e a partícula está realmente se movendo, a aceleração é sempre orientada para dentro da concavidade da curva.

Naturalmente, a grande importância da aceleração está no fato de que, quando uma partícula de massa m está sob a ação de uma força **F**, move-se de acordo com a segunda lei de movimento de Newton, $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. Os vetores **F** e **a** têm, portanto, o mesmo sentido, como se mostra na figura, e isto corresponde a nossa compreensão intuitiva de que quando uma força muda a direção de uma partícula móvel, ela o faz alterando a direção da partícula, retirando-a da direção da tangente em direção à concavidade da trajetória.

Como a curvatura k é dada inclusive quando a curva é dada em forma paramétrica, as componentes tangencial e normal da aceleração podem ser calculadas a partir de (5). Entretanto, é mais eficiente, quase sempre, usar o seguinte procedimento: o vetor aceleração é o mesmo independentemente de ser expresso em termos de componentes **i** e **j** ou componentes tangencial e normal, logo

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} = a_t\mathbf{T} + a_n\mathbf{N},$$

onde os **a** têm os significados óbvios. Assim,

$$|\mathbf{a}|^2 = a_x^2 + a_y^2 = a_t^2 + a_n^2,$$

logo

$$a_n = \sqrt{|\mathbf{a}|^2 - a_t^2} \qquad (7)$$

onde

$$a_t = d^2s/dt^2.$$

Exemplo 1 Uma partícula se move ao longo da curva cujas equações paramétricas são

$$x = \cos t + t \operatorname{sen} t, \qquad y = \operatorname{sen} t - t \cos t;$$

determine as componentes tangencial e normal da aceleração.

Solução O vetor posição é

$$\mathbf{R} = (\cos t + t \operatorname{sen} t)\mathbf{i} + (\operatorname{sen} t - t \cos t)\mathbf{j},$$

logo

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \frac{d\mathbf{R}}{dt}\\ &= (-\operatorname{sen} t + t\cos t + \operatorname{sen} t)\mathbf{i} + (\cos t + t \operatorname{sen} t - \cos t)\mathbf{j}\\ &= (t\cos t)\mathbf{i} + (t \operatorname{sen} t)\mathbf{j}\end{aligned}$$

e

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = (-t \operatorname{sen} t + \cos t)\mathbf{i} + (t\cos t + \operatorname{sen} t)\mathbf{j}.$$

A velocidade $v = ds/dt$ é dada por

$$\frac{ds}{dt} = |\mathbf{v}| = \sqrt{(t \cos t)^2 + (t \operatorname{sen} t)^2} = t,$$

logo a componente tangencial da aceleração é

$$a_t = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{d}{dt} t = 1.$$

A componente normal da aceleração pode ser calculada diretamente, determinando k e utilizando $a_n = k(ds/dt)^2$. No entanto, é mais fácil aplicar (7), que dá

$$\begin{aligned} a_n &= \sqrt{|\mathbf{a}|^2 - a_t^2} \\ &= \sqrt{(-t \operatorname{sen} t + \cos t)^2 + (t \cos t + \operatorname{sen} t)^2 - 1} = t. \end{aligned}$$

Exemplo 2 Quando uma partícula de massa m se move numa trajetória circular de raio r com velocidade constante $v = ds/dt$, então d^2s/dt^2 é zero. Pelas equações (5) e (6), a aceleração é orientada para o centro do círculo e tem módulo v^2/r. Além disso, a força centrípeta agindo sobre a partícula tem módulo

$$F_1 = \frac{mv^2}{r}. \tag{8}$$

Assim, para um automóvel fazer uma curva a 60 km/h, é necessária a aplicação de uma força normal, entre os pneus e a estrada, quatro vezes superior à força necessária para fazer a mesma curva e "manter o carro estável" a 30 km/h. A força exigida será dobrada se o raio de curvatura for reduzido à metade. Estes são os resultados sobre o movimento circular uniforme que obtivemos no Exemplo 2 da Seção 17.4.

Suponhamos agora que nossa partícula seja um satélite artificial em órbita circular ao redor da Terra (Fig. 17.49).

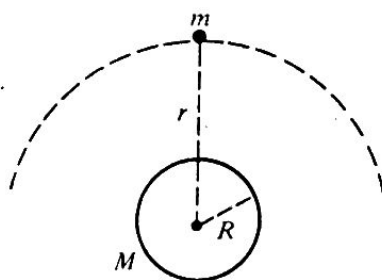



Figura 17.49

Designando-se por M a massa da Terra, a Lei de Gravitação de Newton afirma que a força de atração que a Terra exerce sobre o satélite tem módulo

$$F_2 = G\frac{Mm}{r^2}, \tag{9}$$

onde r é a distância do satélite ao centro da Terra e G é uma constante de proporcionalidade chamada constante de gravitação. Sabemos que o peso do satélite é a força que a gravidade exerce sobre ele na superfície da Terra e que, portanto, tem módulo mg. Assim, sendo R o raio da Terra, $F_2 = mg$ quando $r = R$; logo, de (9) teremos

$$mg = G\frac{Mm}{R^2} \quad \text{ou} \quad GM = gR^2.$$

Assim, podemos escrever (9) na forma mais conveniente:

$$F_2 = \frac{gR^2m}{r^2}. \tag{10}$$

Para um satélite numa órbita circular estável, a força centrípeta é precisamente igual à força gravitacional, logo $F_1 = F_2$ e

$$v^2 = \frac{gR^2}{r}. \tag{11}$$

Essa fórmula dá a velocidade com a qual um satélite deve se mover para se manter em órbita circular a uma distância r especificada do centro da Terra.

Façamos agora duas observações sobre a fórmula (11). Primeiro, se nosso satélite está numa órbita circular a uma altitude relativamente baixa em relação à superfície da Terra, $r \cong R$ e $v \cong \sqrt{gR}$. Essa velocidade orbital é aproximadamente 8 km/s, que deve ser comparada com a velocidade de escape de $\sqrt{2gR}$, ou 11,3 km/s, que calculamos no Exemplo 3 da Seção 5.5.

Segundo, consideramos um satélite de comunicações colocado numa órbita circular ao redor da Terra com um período de revolução de $T = 24$ horas. Tal órbita é chamada de *órbita sincrônica;* o movimento do satélite é simultâneo ao movimento de giro da Terra, daí a impressão de ele estar pendurado, sem movimento, no céu. Chamando-se de r o raio dessa órbita, a velocidade orbital é $v = 2\pi r/T$, e, substituindo-se em (11), vemos que

$$r^3 = \frac{gR^2T^2}{4\pi^2}.$$

Com aproximações convenientes dos valores $g = 9{,}8$ m/s², $R = 6.400$ km e $T = 24$ horas, encontramos facilmente que r é aproximadamente 41.800 km, que significa que o satélite deve estar cerca de 35.400 km acima da superfície da Terra. Tais satélites foram inicialmente concebidos em 1945 pelo famoso escritor de ficção científica Arthur C. Clarke e são de uso muito amplo em transmissões internacionais de televisão.

Naturalmente, as idéias descritas nesse exemplo supõem uma trajetória circular, o que é aproximadamente verdade para alguns satélites. Daremos um tratamento detalhado de órbitas elípticas na Seção 17.7.

Problemas

1. No Exemplo 1, determina a_n de outra maneira, calculando primeiro k e depois usando $a_n = k\,(ds/dt)^2$.

Nos Problemas 2 a 7, determine os vetores velocidade e aceleração e daí o valor absoluto da velocidade e as componentes tangencial e normal da aceleração.

2. $\mathbf{R} = (2t - 5)\mathbf{i} + (t^2 + 3)\mathbf{j}$.
3. $\mathbf{R} = a \cos \omega t\, \mathbf{i} + a \operatorname{sen} \omega t\, \mathbf{j}$, onde a e w são constantes positivas.
4. $\mathbf{R} = \cos t^2\, \mathbf{i} + \operatorname{sen} t^2\, \mathbf{j}$.
5. $\mathbf{R} = e^t \cos t\, \mathbf{i} + e^t \operatorname{sen} t\, \mathbf{j}$.
6. $\mathbf{R} = t \cos t\, \mathbf{i} + t \operatorname{sen} t\, \mathbf{j}$.
7. $\mathbf{R} = 2 \ln (t^2 + 1)\mathbf{i} + (2t - 4 \text{ arc tg}^{-1}\, t)\mathbf{j}$.

Nos Problemas 8 e 9, determine a componente normal da aceleração para os valores dados de t.

8. $\mathbf{R} = a \cos t\, \mathbf{i} + b \operatorname{sen} t\, \mathbf{j}$; $t = 0, \pi/2$.
9. $\mathbf{R} = t\, \mathbf{i} + \operatorname{sen} t\, \mathbf{j}$; $t = 0, \pi/2$.

10. Deduza a partir das equações (5) que

    (a) a trajetória de uma partícula móvel será uma reta se a componente normal da aceleração for nula;

    (b) se a velocidade de uma partícula móvel for constante, então a força será sempre na direção da normal;

    (c) se a força que age sobre uma partícula móvel tem sempre a direção da normal, a velocidade é constante.

11. Uma estrada tem a configuração da parábola $120y = x^2$. Um caminhão está carregado de tal modo que irá tombar se a componente normal de sua aceleração exceder 30. Que valores da velocidade garantirão uma passagem sem desastre pelo vértice da parábola?

12. Uma partícula se move numa trajetória cuja curvatura k nunca é zero. Como deve ser ajustada a velocidade se a componente normal da aceleração deve ter módulo constante?

17.7 (OPCIONAL) LEIS DE KEPLER E LEI DA GRAVITAÇÃO DE NEWTON

Como sabemos, Isaac Newton concebeu as idéias básicas do cálculo nos anos 1665 e 1666 (com idade de 22, 23 anos) com o propósito de obter ferramentas capazes de ajudá-lo a compreender o movimento dos planetas, tendo como pano de fundo as estrelas fixas. A fim de apreciar o que havia sido estabelecido para que ele chegasse a essa realização, recordaremos brevemente os principais estágios do desenvolvimento do pensamento astronômico até seu tempo.

Os gregos antigos construíram um elaborado modelo matemático para os complicados movimentos do Sol, Lua e planetas observados da Terra. Era utilizada uma combinação de movimentos simples para descrever o movimento de cada corpo ao redor da Terra. Era muito natural para eles – como o é para todo mundo – adotar o ponto de vista geocêntrico, qual seja, o de que a Terra está fixa no centro do universo e tudo o mais se move ao seu redor. Além disso, eles estavam fortemente influenciados pela crença pitagórica semimística de que nada além do movimento com velocidade constante num círculo perfeito é digno de um corpo celeste.

Nesse modelo grego, cada planeta P se move uniformemente num pequeno círculo (chamado *epiciclo*) com centro C; ao mesmo tempo C move-se uniformemente num círculo maior centrado na Terra, E (Fig. 17.50).

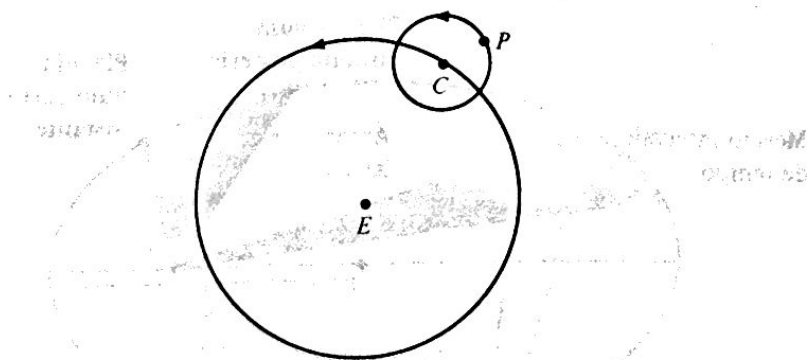



Figura 17.50 Um epiciclo

O raio de cada círculo e as velocidades angulares de P e C nos círculos de centros C e E são escolhidos de maneira a que correspondam ao máximo possível do movimento observado do planeta. Essa teoria de epiciclos recebeu sua forma definitiva no imponente tratado *Almagesto*, de Ptolomeu, no século II d.C. A própria teoria se chama *sistema ptolomaico*.

O grande passo seguinte foi dado pelo astrônomo polonês Copérnico. Pouco antes de sua morte, em 1543, quando estava presumivelmente além do alcance de uma igreja furiosa, ele finalmente permitiu a publicação de seu livro herético *Sobre a revolução das esferas celestes*. Esse trabalho substituiu o ponto de vista ptolomaico colocando o Sol, em vez da Terra no centro de cada círculo primário. Apesar disso, o *sistema heliocêntrico* teve importância muito mais cultural que científica. Ele ampliou a consciência de muitos europeus esclarecidos, dando-lhes melhor compreensão de seu lugar na ordem das coisas; mas ele manteve o confuso instrumental ptolomaico dos círculos com centros movendo-se em outros círculos.

Foi Johannes Kepler (1571-1630) quem finalmerte acabou com a confusão dos círculos. Kepler era assistente do rico astrônomo dinamarquês Tycho Brahe e quando este morreu, em 1601, Kepler herdou a grande massa de dados brutos sobre as posições dos planetas em vários intervalos de tempo, que eles tinham observado. Kepler trabalhou incessantemente sobre esse material por 20 anos, e finalmente conseguiu com brilho ímpar destilar deles suas três leis, de simplicidade maravilhosa, do movimento planetário. Essas leis constituem o clímax de milhares de anos de astronomia puramente observativa:

1. A órbita de cada planeta é uma elipse, sendo que o Sol está num dos focos.

2. O segmento de reta que une um planeta ao Sol varre áreas iguais em tempos iguais (Fig. 17.51).

3. O *quadrado* do período de revolução de um planeta é proporcional ao *cubo* do semi-eixo maior da órbita elíptica do planeta. Isto é, se T é o tempo que um planeta gasta para completar uma revolução ao redor do Sol e a é o semi-eixo maior mostrado na figura, a razão T^2/a^3 é a mesma para todos os planetas do sistema solar.

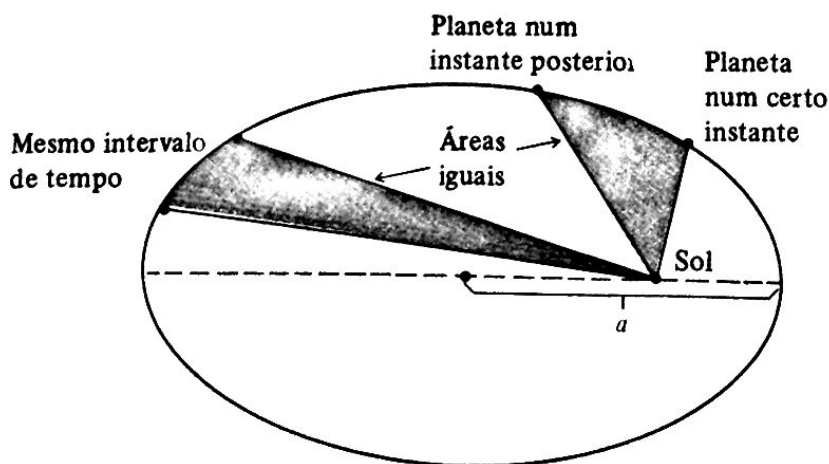



Figura 17.51 A segunda lei de Kepler.

Do ponto de vista de Kepler, estas eram afirmações empíricas que ajustavam os dados; ele não tinha idéia se eram verdadeiras ou se poderiam estar relacionadas entre si. Em poucas palavras, não havia teoria para fornecer um contexto em que essas leis pudessem ser compreendidas.

Newton criou tal teoria. Na década de 1660, descobriu como deduzir, por raciocínios matemáticos, a Lei do Inverso do Quadrado das Distâncias, a partir das leis de Kepler, e também como deduzir as leis de Kepler a partir da "lei do inverso do quadrado das distâncias". Recordamos que a *Lei do Inverso do Quadrado das Distâncias de Newton,* ou *Lei da Gravitação Universal,* afirma que duas partículas materiais quaisquer no universo atraem-se com uma força na direção da reta que as une e de módulo

$$G\frac{Mm}{r^2}, \tag{1}$$

onde M e m são as massas das partículas, r é a distância entre elas e G é uma constante da natureza denominada constante gravitacional. Tendo essa lei simples, límpida e clara como princípio unificador de seu pensamento, Newton publicou sua teoria da gravitação em 1687 em seu *Principia Mathematica.* Nesse livro – talvez o mais grandioso de todos os tratados científicos – seu êxito em usar métodos matemáticos para explicar os mais diversos fenômenos naturais foi tão profundo e abrangente que ele criou em essência as ciências Física e Astronomia onde antes só havia um punhado de observações desconexas e inferências simples. Essas realizações marcam o início da idade moderna da ciência e da tecnologia tendo alterado radicalmente a direção da História.

Deduziremos agora as Leis de Kepler do movimento planetário a partir da Lei da Gravitação de Newton; para esse fim discutimos o movimento realizado por uma pequena partícula de massa m (um planeta) que sofre a atração de uma partícula grande fixa de massa M (o Sol).

Para problemas envolvendo uma partícula móvel em que a força que age sobre ela está sempre na direção da reta que liga a partícula a um ponto fixo, é geralmente mais simples decompor a velocidade, aceleração e força em componentes ao longo dessa reta e perpendicular a ela. Colocamos portanto a partícula fixa M na origem de um sistema de coordenadas polares (Fig. 17.52):

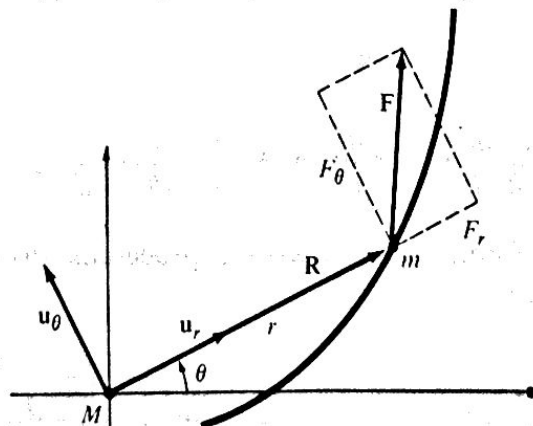



Figura 17.52

e expressamos o vetor posição da partícula móvel m na forma

$$\mathbf{R} = r\,\mathbf{u}_r. \tag{2}$$

onde $\mathbf{u}_r$ é o vetor unitário na direção de $\mathbf{R}$. É claro que

$$\mathbf{u}_r = \mathbf{i}\cos\theta + \mathbf{j}\,\mathrm{sen}\,\theta. \tag{3}$$

e também que o correspondente vetor unitário $\mathbf{u}_\theta$, perpendicular a $\mathbf{U}_r$ no sentido dos θ crescentes, é dado por

$$\mathbf{u}_\theta = -\mathbf{i}\,\mathrm{sen}\,\theta + \mathbf{j}\cos\theta. \tag{4}$$

É fácil ver, derivando por coordenadas, que

$$\frac{d\mathbf{u}_r}{d\theta} = \mathbf{u}_\theta \qquad \text{e} \qquad \frac{d\mathbf{u}_\theta}{d\theta} = -\mathbf{u}_r. \tag{5}$$

Assim, derivar $\mathbf{u}_r$ e $\mathbf{u}_\theta$ com relação a θ tem o efeito de girar esses vetores de 90° no sentido anti-horário. Precisaremos das derivadas de $\mathbf{u}_r$ e de $\mathbf{u}_\theta$ com relação ao tempo t. Por meio da regra da cadeia obtemos imediatamente as fórmulas

$$\frac{d\mathbf{u}_r}{dt} = \frac{d\mathbf{u}_r}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \mathbf{u}_\theta\frac{d\theta}{dt} \qquad \text{e} \qquad \frac{d\mathbf{u}_\theta}{dt} = \frac{d\mathbf{u}_\theta}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = -\mathbf{u}_r\frac{d\theta}{dt}, \tag{6}$$

que são essenciais para calcular os vetores velocidade e aceleração $\mathbf{v}$ e $\mathbf{a}$.

Cálculo direto a partir de (2) nos dá agora

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{R}}{dt} = r\frac{d\mathbf{u}_r}{dt} + \mathbf{u}_r\frac{dr}{dt} = r\frac{d\theta}{dt}\mathbf{u}_\theta + \frac{dr}{dt}\mathbf{u}_r \tag{7}$$

e

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\mathbf{u}_\theta + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\mathbf{u}_\theta + r\frac{d\theta}{dt}\frac{d\mathbf{u}_\theta}{dt} + \frac{d^2r}{dt^2}\mathbf{u}_r + \frac{dr}{dt}\frac{d\mathbf{u}_r}{dt};$$

levando em consideração as fórmulas (6) e usando procedimento de reagrupamento, a última equação pode ser escrita na forma

$$\mathbf{a} = \left(r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\right)\mathbf{u}_\theta + \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\mathbf{u}_r. \tag{8}$$

Se a força **F** que age sobre m é decomposta nas direções a que aludimos no princípio

$$\mathbf{F} = F_\theta \mathbf{u}_\theta + F_r \mathbf{u}_r, \tag{9}$$

e de (8) e (9) e da Segunda Lei de Movimento de Newton $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, temos

$$m\left(r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\right) = F_\theta \quad \text{e} \quad m\left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right] = F_r. \tag{10}$$

Essas equações diferenciais governam o movimento da partícula m e são chamadas *equações de movimento;* elas são válidas independentemente da natureza da força **F**. Nossa próxima tarefa é extrair as conclusões desejadas dessas equações, fazendo hipóteses adequadas sobre a direção e o módulo de **F**.

Forças Centrais e a Segunda Lei de Kepler

F é uma *força central* se ela não tiver componentes perpendiculares a **R**, isto é, se $F_\theta = 0$. Nesse caso, a primeira das equações (10) se torna

$$r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} = 0.$$

Multiplicando por r, obtemos

$$r^2\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2r\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} = 0$$

ou

$$\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right) = 0,$$

logo

$$r^2\frac{d\theta}{dt} = h \tag{11}$$

onde h é alguma constante. Admitimos que h seja uma constante positiva ou, equivalentemente, que $d\theta/dt$ seja um valor positivo, o que, evidentemente, significa que m se move ao redor da origem em sentido anti-horário.

Se $A = A(t)$ é a área varrida por **R** a partir de alguma posição de referência, de modo que $dA = 1/2\, r^2 d\theta$, então (11) implica que

$$dA = \frac{1}{2}\left(r^2 \frac{d\theta}{dt}\right) dt = \tfrac{1}{2}h\, dt.$$

Integrando essa equação de t_1 a t_2, temos

$$A(t_2) - A(t_1) = \tfrac{1}{2}h(t_2 - t_1). \tag{12}$$

Esta é a Segunda Lei de Kepler: o segmento de reta que une o Sol a um planeta varre áreas iguais em intervalos de tempo iguais.

Forças Gravitacionais Centrais e a Primeira Lei de Kepler

Agora nos especializaremos mais ainda e admitiremos que **F** seja uma força central de atração cujo módulo é dado pela Lei do Inverso do Quadrado das Distâncias (1), de modo que

$$F_r = -G\frac{Mm}{r^2}. \tag{13}$$

Escrevendo (13) em forma ligeiramente mais simples

$$F_r = -\frac{km}{r^2}$$

onde $k = GM$, a segunda das equações (10) se torna

$$\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = -\frac{k}{r^2}. \tag{14}$$

O próximo passo nessa linha de raciocínio é difícil de ser motivado, pois envolve considerável engenhosidade técnica, mas tentaremos. Nosso propósito é o de utilizar a equação diferencial (14) para obter a equação da órbita em forma polar $r = f(\theta)$; logo devemos eliminar t de (14) e considerar θ como variável dependente. Também queremos que r seja a variável dependente mas se (11) é utilizada para colocar (14) na forma

$$\frac{d^2r}{dt^2} - \frac{h^2}{r^3} = -\frac{k}{r^2}, \tag{15}$$

a presença de potências de $1/r$ sugere que deve ser conveniente introduzir uma nova variável dependente $z = 1/r$.

Para atingir essas diversas metas, devemos primeiro expressar d^2r/dt^2 em termos de $d^2z/d\theta^2$, calculando

$$\frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{1}{z^2}\frac{dz}{dt} = -\frac{1}{z^2}\frac{dz}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}$$

$$= -\frac{1}{z^2}\frac{dz}{d\theta}\frac{h}{r^2} = -h\frac{dz}{d\theta}$$

e

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -h\frac{d}{dt}\left(\frac{dz}{d\theta}\right) = -h\frac{d}{d\theta}\left(\frac{dz}{d\theta}\right)\frac{d\theta}{dt}$$

$$= -h\frac{d^2z}{d\theta^2}\frac{h}{r^2} = -h^2z^2\frac{d^2z}{d\theta^2}.$$

Introduzindo essa última expressão em (15) e substituindo r por $1/z$, obteremos

$$-h^2z^2\frac{d^2z}{d\theta^2} - h^2z^3 = -kz^2$$

ou

$$\frac{d^2z}{d\theta^2} + z = \frac{k}{h^2}.$$

Para resolver essa equação, observamos que, exceto pelo termo constante à direita, ela é a equação diferencial do movimento harmônico simples abordada na Seção 9.6. Para eliminar o termo constante, fazemos

$$w = z - \frac{k}{h^2},$$

de modo que $d^2w/d\theta^2 = d^2z/d\theta^2$ e (16) fica sendo

$$\frac{d^2w}{d\theta^2} + w = 0.$$

Como sabemos, a solução geral dessa equação familiar é

$$w = A \operatorname{sen}\theta + B\cos\theta,$$

logo

$$z = A \operatorname{sen}\theta + B\cos\theta + \frac{k}{h^2}.$$

Por simplicidade, deslocaremos agora a direção do eixo polar de tal modo que r seja mínimo (isto é, quando m está mais próximo da origem) quando $\theta = 0$. Isto significa que z é máximo nessa direção, logo

$$\frac{dz}{d\theta} = 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{d^2z}{d\theta^2} < 0$$

quando $\theta = 0$. Calculando $dz/d\theta$ e $d^2z/d\theta^2$ a partir de (17), vemos facilmente que essas condições implicam que $A = 0$ e $B > 0$. Se agora substituímos z por $1/r$, então, de (17), obtemos

$$r = \frac{1}{k/h^2 + B\cos\theta} = \frac{h^2/k}{1 + (Bh^2/k)\cos\theta};$$

fazendo-se $e = Bh^2/k$, nossa equação da órbita se torna

$$r = \frac{h^2/k}{1 + e\cos\theta}, \tag{18}$$

onde e é uma constante positiva.

Recordamos (veja Seção 16.3) que (18) é a equação polar de uma seção cônica com foco na origem e diretriz vertical à direita; além disso, sabemos que essa seção cônica é uma elipse, uma parábola ou uma hipérbole conforme $e < 1$, $e = 1$ ou $e > 1$. Como os planetas permanecem no sistema solar e não se afastam indefinidamente do Sol, a elipse é a única possibilidade. Esta é a Primeira Lei de Kepler: a órbita de cada planeta é uma elipse tendo o Sol em um dos focos*.

Terceira Lei de Kepler

Iremos agora nos restringir ao caso em que m tem órbita elíptica (Fig. 17.53) cujas equações polares e retangulares são (18) e

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

* Na discussão da equação (17) ignoramos a possibilidade de r poder ter valor constante e portanto não ser mínimo em nenhuma direção, ou, equivalentemente, de z ter um valor constante e não ser máximo em nenhuma direção. Isto acontece quando ambos $A = 0$ e $B = 0$, de modo que $z = k/h^2$ e $r = h^2/k$. Nessas circunstâncias temos uma órbita circular com raio h^2/k, e isto pode ser incluído na equação (18), permitindo a possibilidade $e = 0$. Entretanto, vimos na Seção 17.6 que uma órbita circular de um dado raio implica a necessidade de certa velocidade orbital precisa, que é infinitamente improvável para um planeta real, podendo ser descartada como probabilidade real.

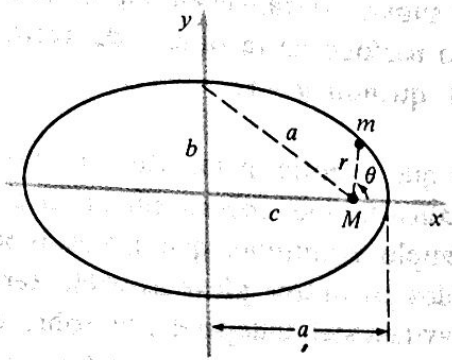



Figura 17.53

Sabemos que $e = c/a$ e $c^2 = a^2 - b^2$, logo $e^2 = (a^2 - b^2)/a^2$ e

$$b^2 = a^2(1 - e^2). \tag{19}$$

Em Astronomia, o semi-eixo maior a da órbita elíptica chama-se *distância média,* pois é a metade da soma dos valores máximo e mínimo de r. Estes são os valores de r correspondentes a $\theta = 0$ e $\theta = \pi$ em (18); logo, de (18) e (19), temos

$$a = \frac{1}{2}\left(\frac{h^2/k}{1+e} + \frac{h^2/k}{1-e}\right) = \frac{h^2}{k(1-e^2)} = \frac{h^2a^2}{kb^2},$$

que acarreta

$$b^2 = \frac{h^2a}{k}. \tag{20}$$

Sendo T o período de m (isto é, o tempo necessário para uma revolução completa em sua órbita), então, como a área da elipse é πab, segue-se, de (12), que $\pi ab = 1/2\, hT$; logo $T = 2\pi ab/h$. Utilizando (20), obtemos agora

$$T^2 = \frac{4\pi^2a^2b^2}{h^2} = \left(\frac{4\pi^2}{k}\right)a^3. \tag{21}$$

Como a constante $k = GM$ depende da massa central de atração M mas não de m, (21) vale para todos os planetas de nosso sistema solar e temos a Terceira Lei de Kepler: os quadrados dos períodos de revolução dos planetas são proporcionais aos cubos de suas distâncias médias.

Como explicamos na Seção 15.3, a unidade-padrão de distância para os astrônomos que trabalham com o sistema solar é a *unidade astronômica.* Esta é a distância média da Terra ao Sol, que é aproximadamente 150.000.000 km. A equação (21) toma a forma mais conveniente

$$T^2 = a^3 \tag{22}$$

quando o tempo é medido em anos e a distância em unidades astronômicas. A razão disto, é claro, é que 1 ano, por definição, é o período de revolução da Terra em sua órbita, de modo que com essas unidades de medida $T = 1$ quando $a = 1$.

Gostaríamos de salientar que a teoria matemática discutida nesta seção é apenas o começo do que Newton realizou e constituiu-se apenas numa primeira aproximação da história do movimento planetário. Por exemplo, admitimos que apenas o Sol e *um* planeta estavam presentes. Mas na realidade, é claro, todos os outros planetas estão também presentes, e cada um deles exerce sua própria atração gravitacional independente sobre o planeta em consideração. Essas influências adicionais introduzem o que se chama "perturbações" na órbita elíptica idealizada deduzida aqui, e o principal objetivo da mecânica celeste é levar em conta todas essas complexidades. Um dos grandes eventos da Astronomia no século XIX ocorreu exatamente a partir dessas considerações, ou seja, a descoberta do planeta Netuno por Adams e Leverrier, buscando explicar os desvios relativamente grandes de Urano de sua órbita kepleriana.

Admitimos também que o Sol e o planeta em consideração são partículas, isto é, pontos em que toda a massa está concentrada. Uma das realizações mais notáveis de Newton foi provar que o Sol e os planetas se comportam como partículas segundo a Lei de Atração do Inverso do Quadrado das Distâncias. Provaremos essa afirmação no Capítulo 20, quando estudarmos integrais triplas.

O enorme sucesso de Newton revitalizou e intensificou grandemente a crença grega, então quase esquecida, de que é possível compreender o universo de um modo racional. Essa nova confiança em seus próprios poderes intelectuais alterou, de modo permanente, a percepção que a humanidade tem de si própria, e, nos últimos 300 anos, todos os setores da vida humana têm sentido suas conseqüências.

Problemas

1. O próprio Newton não conhecia o valor da constante de gravitação G. Esta foi determinada por meio de uma experiência clássica, em 1789, pelo cientista inglês Henry Cavendish. Uma vez conhecido G, explique como a equação (21), escrita na forma

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM}\right) a^3,$$

pode ser usada para calcular a massa do Sol.

2. Qual o período de revolução T (em anos) de um planeta cuja distância média do Sol é
(a) o dobro da da Terra;
(b) três vezes a da Terra;
(c) 25 vezes a da Terra;

3. As primeiras duas leis de Kepler, na forma das equações (11) e (18), implicam que m seja atraída para a origem com uma força cujo módulo é inversamente proporcional ao quadrado de r. Esta foi a descoberta fundamental de Newton, pois fez com que propusesse sua lei de gravitação e investigasse suas conseqüências. Prove isto a partir da validade de (11) e (18) e da verificação das seguintes afirmações:

(a) $F_\theta = 0$;

(b) $\dfrac{dr}{dt} = \dfrac{ke}{h} \operatorname{sen} \theta$;

(c) $\dfrac{d^2r}{dt^2} = \dfrac{ke \cos \theta}{r^2}$;

(d) $F_r = -\dfrac{mk}{r^2} = -G\dfrac{Mm}{r^2}$.

4. Utilize a fórmula (17) para mostrar que a velocidade v de um planeta em qualquer ponto de sua órbita é dada por

$$v^2 = k\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right).$$

5. Suponha que a Terra estoure em fragmentos que voem à mesma velocidade em diferentes direções em suas próprias órbitas. Utilize a Terceira Lei de Kepler e o resultado do problema 4 para mostrar que todos os fragmentos que não caírem no Sol ou que não escaparem do sistema solar irão se reunir mais tarde num mesmo ponto.

Problemas Suplementares do Capítulo 17

Seção 17.1

1. Calcule a área do laço do *folium* de Descartes mostrado na Fig. 17.11. Sugestão: utilize a equação polar do *folium* e calcule a integral da área com o auxílio da substituição $u = tg\,\theta$.

2. Determine as equações paramétricas do laço direito da lemniscata $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$ utilizando o coeficiente angular da reta radial $t = y/x$ como parâmetro. Como podemos representar o laço esquerdo?

Seção 17.2

3. Considere a ciclóide discutida na Seção 17.2.

   (a) Determine o volume do sólido gerado ao girar a região sob um arco em torno do eixo x.

   (b) Calcule a área da superfície gerada ao girar um arco em torno do eixo x.

4. Seja a fixo e considere o hipociclóide de n cúspides, de modo que $a = nb$. Calcule o comprimento total L_n dessa curva e também o limite ao qual tende L_n quando $n \to \infty$.

5. Calcule o comprimento de um arco da epiciclóide gerada por um círculo de raio b rolando na parte externa de um círculo fixo de raio a*.

6. Seja a fixo e considere a epiciclóide de n cúspides, de modo que $a = nb$. Calcule o comprimento total L_n dessa curva e também o limite ao qual tende L_n quando $n \to \infty$.

7. Considere um pêndulo ideal constituído por uma partícula de massa m na extremidade de um fio sem peso de comprimento L (Fig. 17.54). Se ele é deslocado do equilíbrio de um ângulo α e solto, mostre que seu período de oscilação T pode ser expresso por

$$T = 4\sqrt{\frac{L}{g}} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}},$$

onde $k = \text{sen}\,(1/2)\,\alpha$ e $u = (1/k)\,\text{sen}\,(1/2)\theta$. Sugestão: $x = L\,\text{sen}\,\theta$ e $y = L\cos\theta$ e $(1/2)\,mv^2 = mg\,(L\cos\theta - L\cos\alpha)$. Essa integral chama-se *integral elíptica completa da primeira espécie* e não pode ser calculada por meio de funções elementares. Quando α é pequeno, de modo que k^2 é muito pequeno, temos a aproximação.

$$T \cong 4\sqrt{\frac{L}{g}}\ \text{arc sen}^{-1} u\Big]_0^1 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}},$$

como no Exemplo 3 na Seção 9.6.

* Newton descobriu esse comprimento e obteve o Teorema de Wren (Exemplo 2 da Seção 17.2) fazendo $a \to \infty$. Veja o Livro I dos *Principia*, Prop. 48 e Corolário 2 de Prop. 52. É interessante estabelecer uma ponte entre a linguagem usada por Newton e nossa linguagem moderna.

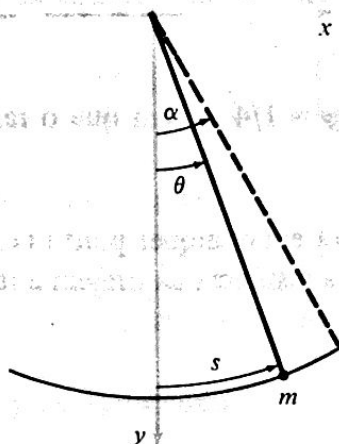



Figura 17.54 Pêndulo ideal.

8. Considere um arame entortado na forma de uma ciclóide com equações paramétricas $x = a(\theta - \text{sen } \theta)$ e $y = a(1 - \cos \theta)$ e inverta-a como na Fig. 17.15. Se uma conta é solta sobre o arame e desliza sem atrito por influência apenas da gravidade, mostre que sua velocidade v satisfaz a equação

$$4av^2 = g(s_0{}^2 - s^2),$$

onde s_0 e s são, respectivamente, os comprimentos de arco a partir do ponto mais baixo à posição inicial da conta e a sua posição em qualquer instante posterior. Por derivação, obtenha a equação

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{g}{4a}s = 0,$$

que mostra que a conta realiza um movimento harmônico simples. Utilize as idéias da Seção 9.6 (Volume I) para determinar s como função de t, determine o período do movimento e observe que se estabelece de outra maneira a propriedade tautócrona da ciclóide, provada na Seção 17.2.

Seção 17.3

9. Mostre, por métodos vetoriais, que o segmento de reta que une os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e tem a metade de seu comprimento.

10. Generalize o Problema 9 utilizando métodos vetoriais para mostrar que o segmento de reta que une os pontos médios dos lados não-paralelos de um trapézio é paralelo aos lados paralelos e tem como comprimento a metade da soma de seus comprimentos.

Seção 17.5

11. Localize os pontos da curva $y = 1/4\ x^4$ em que o raio de curvatura é mínimo. Qual o raio de curvatura mínimo?

12. Mostre que o raio de curvatura em qualquer ponto (x, y) da hipociclóide de quatro cúspides $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ é três vezes a distância da origem à reta tangente à curva em (x, y).

Seção 17.7

13. O valor que Cavendish obteve para G é $6{,}7 \times 10^{-8}\ \mathrm{cm}^3 \cdot \mathrm{g}^{-1} \cdot s^{-2}$, onde a massa é medida em gramas, a distância em centímetros e o tempo em segundos. No Exemplo 2 da Seção 17.6 utilizamos o fato de que $GM_e = gR^2$, onde M_e é a massa da Terra. Calcule M_e (aproximadamente) em gramas, utilizando os valores $g = 980\ \mathrm{cm/s^2}$ e $R = 6{,}37 \times 10^8$ cm.

14. Com a notação da Seção 17.7, a Lei do Inverso do Quadrado das Distâncias pode ser representada como

$$\mathbf{F} = -\frac{km}{r^2}\mathbf{u}_r$$

onde $k = GM$. Como $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$, temos

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{k}{r^2}\mathbf{u}_r.$$

Verifique os seguintes passos para obter uma outra dedução da Primeira Lei de Kepler a partir da Lei do Inverso do Quadrado das Distâncias:

(a) Use (6) e (11) para escrever

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{k}{r^2}\left(-\frac{1}{d\theta/dt}\frac{d\mathbf{u}_\theta}{dt}\right) = \frac{k}{h}\frac{d\mathbf{u}_\theta}{dt}.$$

(b) Integre a equação em (a) para obter

$$\mathbf{v} = \frac{k}{h}\mathbf{u}_\theta + \left(v_0 - \frac{k}{h}\right)\mathbf{j},$$

admitindo as condições iniciais da seguinte forma (Fig. 17.55): em $t = 0$, m tem sua melhor aproximação da origem e atravessa o eixo polar no ponto $\mathbf{R} = r_0\mathbf{i}$ com velocidade $\mathbf{v} = v_0\mathbf{j}$.

(c) Iguale as componentes $\mathbf{u}_0$ da equação em (b) para obter

$$r\frac{d\theta}{dt}=\frac{k}{h}+\left(v_0-\frac{k}{h}\right)\cos\theta,$$

e use (11) para escrever esta sob a forma

$$\frac{h}{r}=\frac{k}{h}+\left(v_0-\frac{k}{h}\right)\cos\theta.$$

(d) Resolva a equação em (c) para r, obtendo

$$r=\frac{h^2/k}{1+(v_0h/k-1)\cos\theta}.$$

(e) Use (7) e (11) para mostrar que $h=r_0v_0$ e escreva a equação em (d) na forma

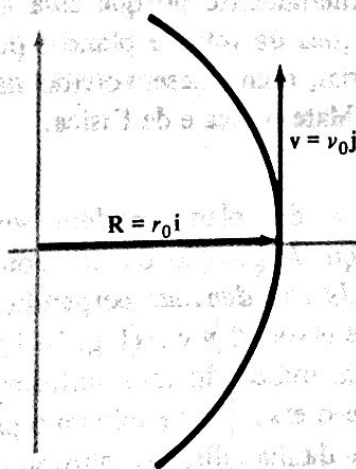
$$r=\frac{(r_0v_0)^2/k}{1+(r_0v_0^2/k-1)\cos\theta}=\frac{(r_0v_0)^2/k}{1+e\cos\theta},$$

onde $e=r_0v_0^2/k-1$.

(f) Observe que a equação em (e) representa
Uma circunferência, se $r_0v_0^2=GM$;
uma elipse, se $GM<r_0v_0^2<2GM$;
uma parábola, se $r_0v_0^2=2GM$;
uma hipérbole, se $r_0v_0^2>2GM$.

Figura 17.55

CAPÍTULO

18

VETORES NO ESPAÇO TRIDIMENSIONAL. SUPERFÍCIES

18.1 COORDENADAS E VETORES NO ESPAÇO TRIDIMENSIONAL

Nos dezessete capítulos anteriores, abordamos muitos dos aspectos do cálculo de funções de uma *única* variável. A geometria dessas funções é bidimensional, pois o gráfico de uma função de uma única variável é uma curva do plano. A maior parte do restante deste livro trata do cálculo de funções de *várias* (duas ou mais) variáveis independentes. A geometria das funções de duas variáveis é tridimensional, pois, em geral, o gráfico de tal função é uma superfície no espaço.

Neste capítulo, abordamos a geometria analítica do espaço tridimensional. Nosso tratamento enfatizará a álgebra vetorial: primeiramente porque essa abordagem propicia uma compreensão mais direta e intuitiva das equações de retas e planos; posteriormente porque os conceitos de produto interno e produto vetorial, como desenvolvido nas duas próximas seções, são indispensáveis em muitas outras partes da Matemática e da Física.

As coordenadas cartesianas do plano podem ser generalizadas de forma natural a coordenadas cartesianas do espaço. A posição de um ponto do espaço é descrita dando-se sua localização relativa a três *eixos de coordenadas* perpendiculares entre si, que se interceptam na *origem O.* Desenhamos sempre os eixos x, y e z (Fig. 18.1) com unidades de comprimentos iguais em todos os três eixos e com setas indicando seus sentidos positivos. Cada par de eixos determina um *plano coordenado:* o eixo x e o eixo y determinam o plano xy etc. A configuração dos eixos nessa figura chama-se *positiva* (ou da mão direita), pois, se o polegar da mão direita aponta no sentido positivo do semi-eixo dos z _, então um giro dos dedos dá o sentido positivo de rotação no plano xy, do semi-eixo positivo dos x para o semi-eixo positivo dos y.

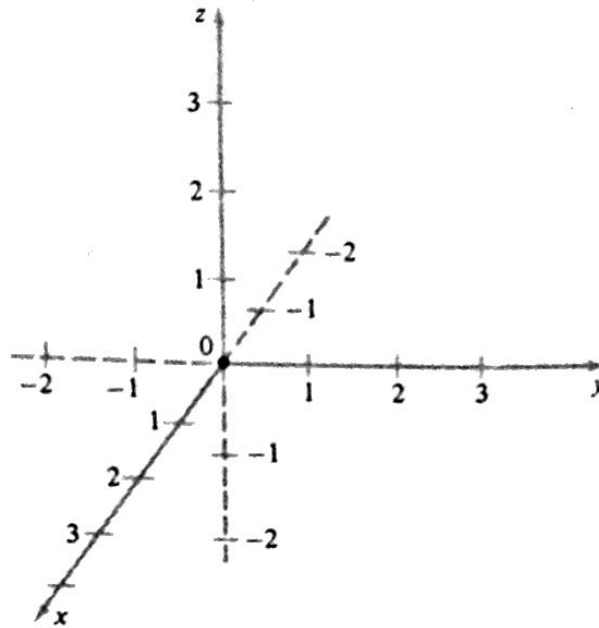



Figura 18.1 Eixos coordenados.

Como muitas pessoas têm dificuldade para visualizar figuras no espaço a partir de desenhos planos, salientamos que a Fig. 18.1 pode ser encarada como parte de uma sala retangular desenhada em perspectiva, com a origem O no canto mais à esquerda do piso. O plano xy é o piso e tem a aparência habitual do plano xy se o olharmos de um ponto sobre o semi-eixo positivo dos z; o plano yz é a parede posterior da sala, no plano do papel, e o plano xz é a parede esquerda da sala.

Dizemos que um ponto P do espaço (veja a Fig. 18.2) tem *coordenadas retangulares* (ou *cartesianas*) x, y, z se

x é sua distância orientada do plano yz;
y é sua distância orientada do plano xz;
z é sua distância orientada do plano xy.

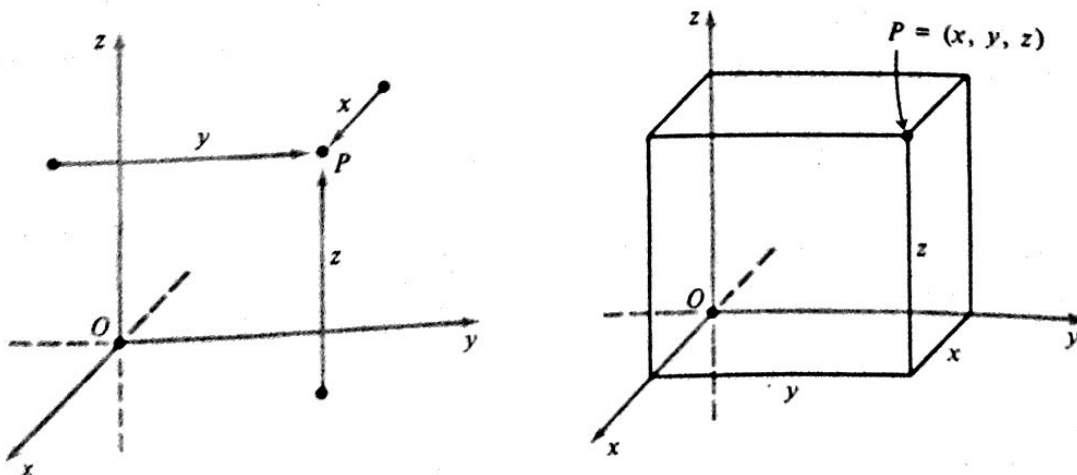



Figura 18.2 Localizando um ponto por suas coordenadas cartesianas.

Da mesma forma que usávamos na Geometria Analítica Plana, escrevemos $P = (x, y, z)$ e identificamos o ponto P com o terno ordenado de suas coordenadas. À direita da figura tentamos reforçar a imagem de três dimensões, completando a caixa que tem O e P como vértices opostos*.

Os três planos coordenados dividem todo o espaço em oito regiões chamadas *octantes*. A região ressaltada na Fig. 18.2, onde x, y e z são números positivos, chama-se *primeiro octante*. (Ninguém deve se preocupar em numerar os outros sete octantes.)

Mesmo antes de nos aprofundarmos num estudo geral das equações de retas e planos que faremos na Seção 18.4, podemos notar alguns fatos óbvios. O plano xy é o conjunto de todos os pontos $(x, y, 0)$; consiste exatamente naqueles pontos do espaço que têm a coordenada z igual a 0, logo sua equação é

$$z = 0.$$

Analogamente, a equação do plano yz é $x = 0$ e a equação do plano xz é $y = 0$.

O eixo z é o conjunto de todos os pontos $(0, 0, z)$. Portanto é representado pelo par de equações

$$x = 0, \qquad y = 0. \tag{1}$$

Estas são as equações dos planos yz e xz, respectivamente; logo, as equações (1), juntas, caracterizam o eixo z como a interseção desses dois planos coordenados. Analogamente, as equações do eixo x são $y = 0, z = 0$, e as equações do eixo y são $x = 0, z = 0$.

Não há nada de especial com o número 0 nessas observações. Por exemplo, a equação do plano horizontal que está 5 unidades acima do plano xy é $z = 5$, e as equações da reta vertical que passa pelo ponto $(1, 2, 0)$ do plano xy são $x = 1$, $y = 2$. Veja a Fig. 18.3.

Quase todas as idéias relativas a vetores apresentadas na Seção 17.3 são válidas no espaço tridimensional e não requerem maior discussão. Essa observação se aplica ao conceito de vetor, à definição de igualdade de vetores e às definições de adição e multiplicação por escalar. Em todo esse material não há nenhuma necessidade de se supor que os vetores estejam num plano.

---

* O termo técnico para o objeto mostrado à direita é "paralelepípedo retangular". Preferimos a palavra "caixa", por ser mais simples.

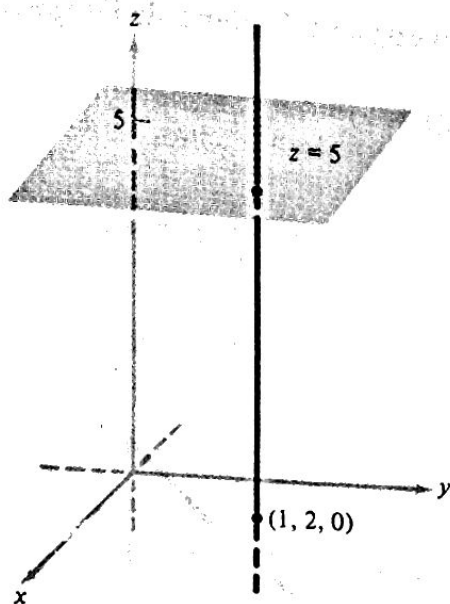



Figura 18.3 Plano horizontal.

A única diferença real é que o vetor do espaço tem três componentes em vez de duas. Ao realizarmos cálculos com vetores do plano utilizamos os vetores unitários **i** e **j** nos sentidos positivos dos eixos x e y. A fim de efetuarmos cálculos com vetores do espaço tridimensional, introduzimos um terceiro vetor unitário **k** no sentido positivo do eixo z (Fig. 18.4).

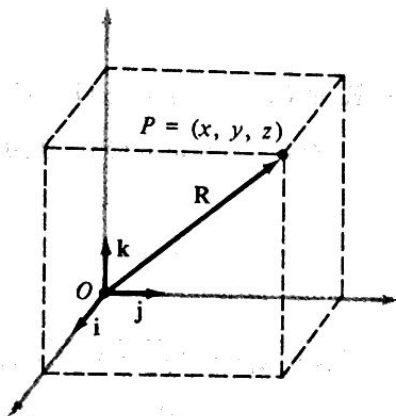



Figura 18.4 O vetor posição de P.

Se $P = (x, y, z)$ é um ponto qualquer do espaço, o vetor posição $R = \overrightarrow{OP}$ pode ser escrito na forma

$$\mathbf{R} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k},$$

e os números x, y e z chamam-se respectivamente, *componentes* **i**, **j** e **k**.

O *comprimento* (ou *módulo*) do vetor **R** é dado pela fórmula

$$|\mathbf{R}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \tag{2}$$

Podemos prová-la por uma aplicação dupla do Teorema de Pitágoras (Fig. 18.5):

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{R}|^2 = OP^2 &= OB^2 + BP^2 \\
&= OA^2 + AB^2 + BP^2 \\
&= x^2 + y^2 + z^2.
\end{aligned}
$$

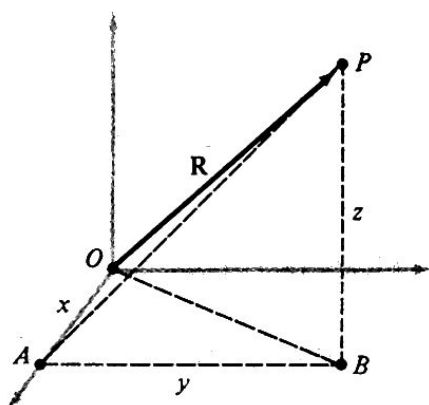



Figura 18.5

Se $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ são dois pontos quaisquer do espaço (Fig. 18.6), a distância entre eles é o comprimento do vetor $\overrightarrow{P_1P_2}$ de P_1 a P_2. Como

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{P_1P_2} = \mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1 &= (x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}) - (x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}) \\
&= (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k},
\end{aligned}
$$

podemos aplicar (2) para obter

$$|\overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

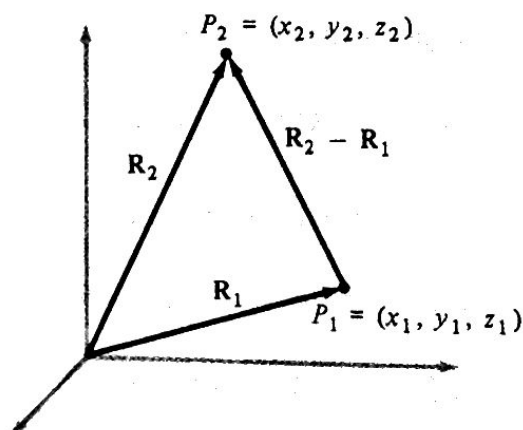



Figura 18.6

Esta é a importante *fórmula da distância*, que tem muitas aplicações.

Uma vez que uma esfera é o conjunto de todos os pontos P que estão a uma dada distância r de um dado ponto fixo P_0 (Fig. 18.7), podemos escrever a equação da esfera na forma

$$|\overrightarrow{P_0P}| = r. \tag{4}$$

Se $P = (x, y, z)$ e $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, usando (3) escrevemos (4) na forma equivalente

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2. \tag{5}$$

Esta é a equação-padrão da esfera com centro $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e raio r.

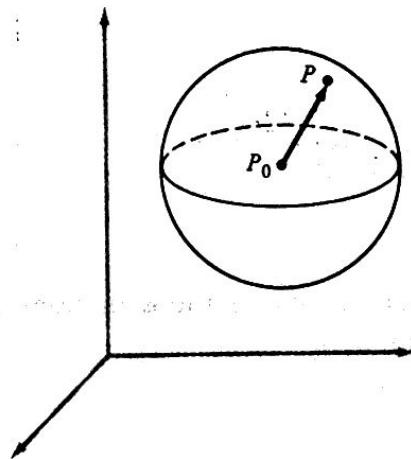



Figura 18.7 Esfera.

Exemplo Completando os quadrados na equação

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y - 6z + 8 = 0, \tag{6}$$

ela fica

$$(x + 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 3)^2 = 6.$$

Comparando essa última com (5), vemos imediatamente que (6) é a equação de uma esfera com centro $(-2, 1, 3)$ e raio $\sqrt{6}$.

Problemas

1. Esboce a caixa com os vértices $(1, -1, 0)$, $(1, 4, 0)$, $(-2, 4, 0)$, $(-2, -1, 0)$, $(1, -1, 5)$, $(1, 4, 5)$, $(-2, 4, 5)$, $(-2, -1, 5)$. Dê as equações das faces e das arestas da caixa que passam pelo vértice $(1, 4, 5)$.

2. Esboce a caixa limitada pelos planos $x = 1$, $x = 3$, $y = 0$, $y = 4$, $z = 1$, $z = 5$. Dê os vértices.

3. Esboce o tetraedro cujos vértices da base são $(3, 4, 0)$, $(3, -4, 0)$ e $(-5, 4, 0)$ e cujo quarto vértice é $(0, 0, 6)$. Use o fato de que o volume de um tetraedro é um terço da área da base vezes a altura para calcular o volume desse tetraedro.

4. Esboce as retas cujas equações são dadas:
   (a) $x = 2$, $z = 3$; (b) $y = 1$, $z = 4$;
   (c) $x = -3$, $y = 1$.

5. Descreva o gráfico da equação
   (a) $xy = 0$; (b) $xyz = 0$.

6. Descreva e esboce o lugar geométrico de todos os pontos $P(x, y, z)$ que satisfazem os seguintes pares de equações simultâneas:
   (a) $x^2 + y^2 = 4$, $z = 3$;
   (b) $x = 4$, $z = 4y^2$;
   (c) $y = x$, $x = 5$;
   (d) $z = -x^2$, $y = 0$.

7. Determine o ponto do eixo y que é eqüidistante de $(2, 5, -3)$ e $(-3, 6, 1)$.

8. Determine e simplifique a equação do lugar geométrico de todos os pontos eqüidistantes de $(7, 0, -4)$ e $(-3, 2, 2)$. Descreva esse lugar geométrico em linguagem geométrica.

9. Escreva a equação da esfera com raio 7, centro sobre o semi-eixo positivo dos z, tangente ao plano $z = 0$.

10. Determine a equação da esfera com centro $(3, -2, 5)$, que é
    (a) tangente ao plano xy;
    (b) tangente ao plano yz;
    (c) tangente ao plano xz.

11. Identifique o gráfico de cada uma das seguintes equações e, nos casos em que se tratar de esfera, dê seu centro e raio:

    (a) $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y - 10z + 26 = 0$;
    (b) $x^2 + y^2 + z^2 - 10x + 2y - 6z + 35 = 0$;
    (c) $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 16x + 8y + 4z + 49 = 0$;
    (d) $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 14y - 6z + 59 = 0$;
    (e) $4x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 16x + 24y + 52 = 0$.

12. Um ponto P move-se mantendo sempre distância de (3, 2, 0) como metade da de (3, 2, 6). Mostre que o lugar geométrico de P é uma esfera e determine seu centro e raio.

13. Sendo dados $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e P2 $= (x_2, y_2, z_2)$, use vetores para mostrar que as coordenadas do ponto médio do segmento P_1P_2 são

$$x = \tfrac{1}{2}(x_1 + x_2), \qquad y = \tfrac{1}{2}(y_1 + y_2), \qquad \text{e} \qquad z = \tfrac{1}{2}(z_1 + z_2).$$

14. Determine a equação da esfera que tem os dois pontos dados como extremidades de um diâmetro:

    (a) (6, 2, −1), (−2, 4, 3); (b) (0, 1, −7), (−6, 7, 3).

15. Mostre que o triângulo com vértices (4, 3, 6), (− 2, 0, 8) e (1, 5, 0) é um triângulo retângulo. Determine sua área.

16. Para cada um dos seguintes pares de pontos, determine o vetor do primeiro ponto ao segundo e também a distância entre os pontos:

    (a) (2, 0, −3), (5, 1, 2); (b) (−2, 1, 7), (1, −4, 2);
    (c) (8, 3, 6), (2, −2, 0); (d) (1, 5, −3), (9, 7, 1).

17. Determine o vetor da origem O à interseção das medianas do triângulo cujos vértices são $A = (3, 2, 2)$, $B = (-1, 0, 4)$ e $C = (5, 3, -2)$.

18. Se **A**, **B**, **C** são três vetores distintos, suas extremidades formam um triângulo. Determine o vetor posição da interseção das medianas desse triângulo.

19. Se **A**, **B**, **C**, **D** são quatro vetores distintos quaisquer, suas extremidades formam um tetraedro. Mostre que as quatro retas que unem cada vértice à interseção das medianas da face oposta são concorrentes e determine o vetor posição de seu ponto comum.

18.2 PRODUTO ESCALAR DE DOIS VETORES

Até esse ponto de nosso trabalho, não definimos o produto de dois vetores **A** e **B**. Há dois modos diferentes de se fazer isto e ambos têm importantes aplicações na Geometria e na Física. Como não há razão para escolher qualquer uma dessas definições, preferentemente em relação à outra, mantemos as duas, utilizando um ponto para uma definição e uma cruz para a outra. O *produto escalar* de **A** e **B** é denotado por **A** · **B** e é um número. O *produto vetorial* é denotado por **A X B** e é um vetor. Esses dois tipos de multiplicação são totalmente diferentes. Abordaremos o primeiro nesta seção e o segundo na Seção 18.3.

O *produto escalar* **A** · **B** de dois vetores **A** e **B** é definido como sendo o produto de seus módulos pelo co-seno do ângulo entre eles.

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\cos\theta, \tag{1}$$

onde θ ($0 \leqslant \theta \leqslant \pi$) é o ângulo entre **A** e **B** quando são colocados de modo a que suas origens coincidam (Fig. 18.8). É claro, a partir da definição, que **A** · **B** é um *escalar* (ou número) e não um vetor.

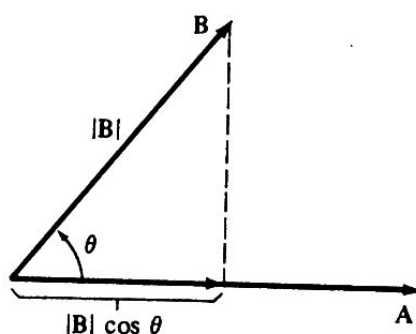



Figura 18.8 Projeção escalar.

Como se pode ver na Fig. 18.8, o número **B** cos θ é a *projeção escalar* de **B** sobre **A**, denotada por $\text{proj}_{\mathbf{A}}\mathbf{B}$. Podemos portanto interpretar a definição (1) geometricamente como se segue:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = |\mathbf{A}|(|\mathbf{B}|\cos\theta) = |\mathbf{A}|\,\text{proj}_{\mathbf{A}}\,\mathbf{B}$$

$$= (\text{comprimento de } \mathbf{A}) \times (\text{projeção escalar de } \mathbf{B} \text{ sobre } \mathbf{A}).$$

Trocando os papéis de **A** e **B**, temos também

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = |\mathbf{B}|(|\mathbf{A}|\cos\theta) = |\mathbf{B}|\,\text{proj}_{\mathbf{B}}\,\mathbf{A}$$

$$= (\text{comprimento de } \mathbf{B}) \times (\text{projeção escalar de } \mathbf{A} \text{ sobre } \mathbf{B}).$$

A *projeção vetorial* de **B** sobre **A** também está indicada na figura. Ambos os tipos de projeção são úteis nas aplicações.

É fácil ver pela definição (1) que o produto escalar tem as propriedades

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{A}, \text{ comutativa} \tag{2}$$

e

$$(c\mathbf{A})\cdot\mathbf{B} = c(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \mathbf{A}\cdot(c\mathbf{B}). \tag{3}$$

Tem também a propriedade

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} + \mathbf{A}\cdot\mathbf{C}, \text{ distributiva do produto escalar em relação à soma} \tag{4}$$

mas isto não tão evidente quanto (2) e (3). Para deduzir (4), observamos (Fig. 18.9) que

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}+\mathbf{C}) &= |\mathbf{A}|[\text{proj}_{\mathbf{A}}(\mathbf{B}+\mathbf{C})] \\ &= |\mathbf{A}|(\text{proj}_{\mathbf{A}}\,\mathbf{B} + \text{proj}_{\mathbf{A}}\,\mathbf{C}) \\ &= |\mathbf{A}|\text{proj}_{\mathbf{A}}\,\mathbf{B} + |\mathbf{A}|\text{proj}_{\mathbf{A}}\,\mathbf{C} \\ &= \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} + \mathbf{A}\cdot\mathbf{C}. \end{aligned}$$

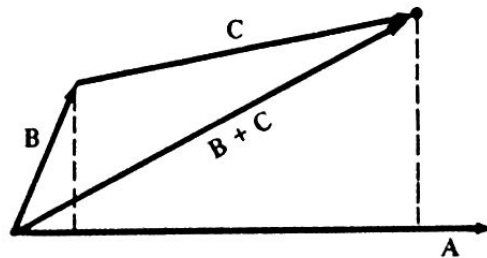



Figura 18.9

Combinando (4) com a propriedade comutativa (2), teremos também

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\cdot\mathbf{C} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{C} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{C}. \tag{5}$$

As propriedades (4) e (5) permitem-nos multiplicar somas de vetores pelos procedimentos ordinários da Álgebra Elementar, como em

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\cdot(\mathbf{C}+\mathbf{D}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{C} + \mathbf{A}\cdot\mathbf{D} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{C} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{D}.$$

Uma outra conseqüência simples da definição (1) é

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{A} = |\mathbf{A}|^2 \tag{6}$$

para todo vetor **A**.

Exemplo 1 Com a notação da Fig. 18.10, a Lei dos Co-Senos da Trigonometria se traduz em

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta.$$

Podemos provar isso muito facilmente aplicando a propriedade (6) e escrevendo

$$\begin{aligned} c^2 = |\mathbf{C}|^2 = |\mathbf{A} - \mathbf{B}|^2 &= (\mathbf{A} - \mathbf{B})\cdot(\mathbf{A} - \mathbf{B}) \\ &= \mathbf{A}\cdot\mathbf{A} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{B} - 2\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} \\ &= |\mathbf{A}|^2 + |\mathbf{B}|^2 - 2\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} \\ &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta. \end{aligned}$$

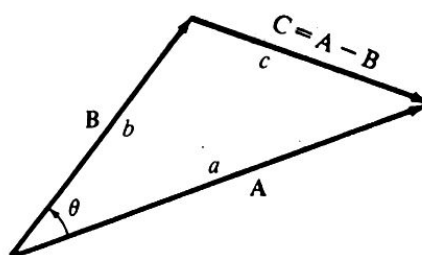



Figura 18.10

Se aplicarmos a definição (1) aos vetores unitários mutuamente perpendiculares **i**, **j** e **k**, introduzidos na Seção 18.1, obteremos

$$\begin{aligned} \mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = 1, \\ \mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{i}\cdot\mathbf{k} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{k} = 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Esses fatos nos permitem determinar uma fórmula para calcular o produto escalar de dois vetores quaisquer dados como comprovação de **i**, **j**, **k**:

$$\mathbf{A} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{B} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}.$$

Se expandirmos **A** · **B** utilizando (7) e as propriedades gerais já discutidas, obteremos

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3, \tag{8}$$

pois seis dos nove termos da expansão se anulam. Assim, para calcular **A** · **B**, simplesmente multiplicamos suas respectivas componentes **i**, **j**, **k** e depois somamos.

Se **A** e **B** são vetores não-nulos, podemos escrever a definição (1) na forma

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{|\mathbf{A}||\mathbf{B}|}. \tag{9}$$

Essa fórmula mostra a principal importância do produto escalar para a Geometria: ele permite um modo simples de determinar o ângulo entre dois vetores e, em particular, um modo de estabelecer se dois vetores são ou não perpendiculares. De fato, se concordamos que o vetor nulo seja perpendicular a todo vetor, então, por (9), vemos imediatamente que

$$\mathbf{A} \perp \mathbf{B} \quad \text{se e somente se} \quad \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = 0.$$

A fórmula (8) torna possível aplicar o produto escalar como um instrumento computacional conveniente.

Exemplo 2 Determine o co-seno do ângulo θ entre os vetores $\mathbf{A} = \mathbf{1} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ e $\mathbf{B} = -3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$.

Solução É claro que

$$|\mathbf{A}| = \sqrt{1+4+4} = 3, \qquad |\mathbf{B}| = \sqrt{9+16} = 5, \qquad \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = -3 + 8 + 0 = 5.$$

Portanto, por (9), temos

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{|\mathbf{A}||\mathbf{B}|} = \frac{5}{3\cdot 5} = \frac{1}{3}.$$

Se o que nos interessa é o ângulo θ, podemos usar tábuas trigonométricas (ou uma calculadora) para determinar $\theta \cong 70{,}5^{\circ}$.

Exemplo 3 Calcule o co-seno do ângulo θ entre **A** e **B** sendo $\mathbf{A} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ e $\mathbf{B} = -\mathbf{i} + c\mathbf{k}$; determine o valor de c tal que

Solução Temos

$$|\mathbf{A}| = \sqrt{1+4+4} = 3, \qquad |\mathbf{B}| = \sqrt{1+c^2}, \qquad \text{e} \qquad \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = -1 + 2c,$$

logo

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{|\mathbf{A}||\mathbf{B}|} = \frac{2c-1}{3\sqrt{1+c^2}}.$$

Para $c = \frac{1}{2}$, $\cos\theta$ tem o valor 0 e portanto os vetores são perpendiculares.

A ilustração física mais simples do uso do produto escalar é fornecida pelo conceito de trabalho. Lembramos que o trabalho W realizado por uma força constante F exercida ao longo da trajetória de uma partícula móvel numa distância d é dado por $W = Fd$. Mas o que acontece no caso de a força ser um vetor constante F apontando em alguma direção (e sentido) diferente da linha de movimento de P a Q? (Fig. 18.11).

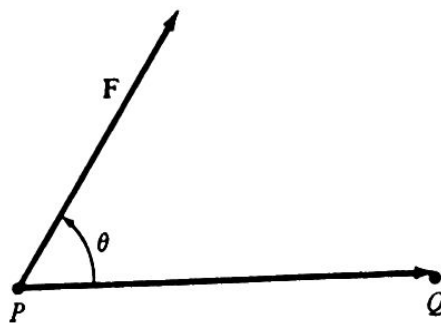



Figura 18.11

Só a componente vetorial de **F** na direção e sentido da linha de movimento tem atuação; logo, nesse caso, temos

$$W = (|\mathbf{F}| \cos \theta)|\overrightarrow{PQ}|$$
$$= |\mathbf{F}|\,|\overrightarrow{PQ}| \cos \theta = \mathbf{F} \cdot \overrightarrow{PQ},$$

isto é

$$W = \mathbf{F} \cdot \overrightarrow{PQ}.$$

Em tratamentos mais avançados das aplicações físicas dos vetores, é muitas vezes necessário calcular o trabalho realizado por forças variáveis cujos pontos de aplicação movem-se ao longo de trajetórias curvas, e a fórmula (10) é o ponto de partida para todas as aplicações desse tipo.

Problemas

1. Mostre que

$$\mathbf{A} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k},$$
$$\mathbf{B} = 4\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 4\mathbf{k},$$

são perpendiculares.

2. Mostre que

$$\mathbf{A} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k},$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{i} - \mathbf{k},$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

são mutuamente perpendiculares.

3. Calcule o ângulo entre cada um dos pares de vetores dados:

(a) $\mathbf{A} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{B} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$;
(b) $\mathbf{A} = \mathbf{i}$, $\mathbf{B} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$;
(c) $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$, $\mathbf{B} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$.

4. Use produtos escalares para mostrar que os três pontos dados são os vértices de um triângulo retângulo. Qual o vértice do ângulo reto?

(a) $P = (1, 7, 3)$, $Q = (0, 7, -1)$, $R = (-1, 6, 2)$.
(b) $P = (2, -5, -2)$, $Q = (-1, -2, 2)$, $R = (4, 1, -5)$.
(c) $P = (2, 7, -2)$, $Q = (0, 4, -1)$, $R = (1, 4, 1)$.

5. Mostre que os vetores,

$$\mathbf{A} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 5\mathbf{k},$$

$$\mathbf{B} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k},$$

$$\mathbf{C} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 4\mathbf{k},$$

caso colocados nas posições apropriadas, formam os lados de um triângulo retângulo.

6. Calcule o ângulo θ entre uma diagonal de um cubo e
(a) uma aresta adjacente;
(b) uma diagonal adjacente de uma face.

7. Seja **A** um vetor não-nulo e sejam **B** e **C** dois vetores tais que $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$. É legítimo cancelar **A** de ambos os membros dessa equação e concluir que $\mathbf{B} = \mathbf{C}$? Explique.

8. Calcule um valor de c para o qual os vetores dados sejam perpendiculares:

(a) $3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$, $2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + c\mathbf{k}$;
(b) $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{i} + \mathbf{j} + c\mathbf{k}$.

9. Se $a = |\mathbf{A}|$ e $b = |\mathbf{B}|$, mostre que o vetor $b\mathbf{A} + a\mathbf{B}$ bisseciona o ângulo entre **A** e **B**.

10. Com a notação do Problema 9, mostre que $b\mathbf{A} + a\mathbf{B}$ e $b\mathbf{A} - a\mathbf{B}$ são perpendiculares.

11. Use o produto escalar para provar que um ângulo inscrito num semicírculo é reto. Sugestão: com a notação da Fig. 18.12, calcule $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} - \mathbf{B})$.

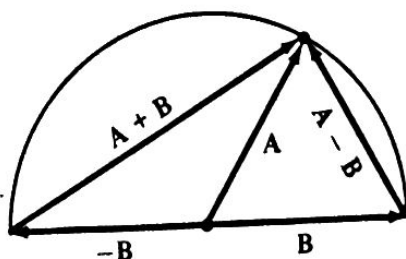



Figura 18.12

12. Se $Q = (1, -1, 7)$, calcule os pontos $P = (0, c, c)$ sobre a reta $z = y$ no plano yz tal que o vetor $\overrightarrow{OP}$ seja perpendicular ao vetor $\overrightarrow{PQ}$.

13. Se $\mathbf{A} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ e $\mathbf{B} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{k}$, calcule o componente vetorial de **A** ao longo de **B**. Resolva este problema determinando uma fórmula geral para a componente vetorial de **A** ao longo de **B** considerando **A** e **B** dois vetores quaisquer.

14. Use métodos vetoriais para mostrar que a distância de um ponto (x_0, y_0) a uma reta $ax + by + c = 0$ (ambos no plano xy) é

$$\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

15. Use a propriedade (6) para provar a *propriedade dos paralelogramos* da Geometria Elementar: a soma dos quadrados das diagonais de um paralelogramo é igual à soma dos quadrados dos quatro lados. Sugestão: com a notação da Fig. 18.13, use (6) para expandir $|\mathbf{A} + \mathbf{B}|^2 + |\mathbf{A} - \mathbf{B}|^2$.

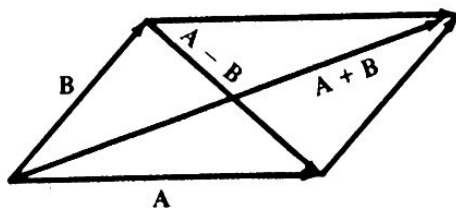



Figura 18.13 A propriedade dos paralelogramos.

16. Para o triângulo OAB (Fig. 18.14), a Lei dos Co-Senos se traduz em

$$|\mathbf{A} - \mathbf{B}|^2 = |\mathbf{A}|^2 + |\mathbf{B}|^2 - 2|\mathbf{A}||\mathbf{B}| \cos \theta.$$

Dê uma outra demonstração da fórmula (8) resolvendo essa equação para $|\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}| \cos \theta$ e simplificando o resultado.

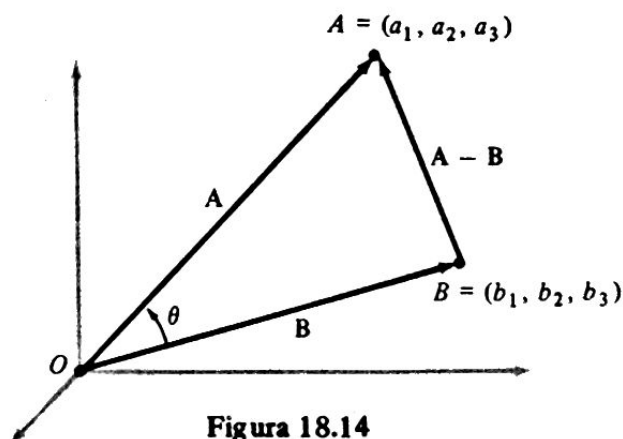



Figura 18.14

17. Se um vetor $\mathbf{V} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ faz ângulos α, β e γ com os semi-eixos positivos dos x, y e z (Fig. 18.15), então esses ângulos chamam-se *ângulos diretores* e $\cos \alpha$; $\cos \beta$ e $\cos \gamma$ chamam-se *co-senos diretores* de $\mathbf{V}$. Mostre que

(a) $(a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k})/\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ é um vetor unitário com a mesma direção e sentido de $\mathbf{V}$:

(b) $\cos \alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$,

$\cos \beta = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$,

$\cos \gamma = \dfrac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$;

(c) $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$.

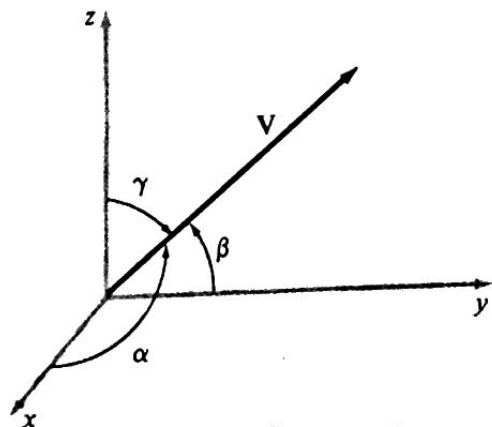



Figura 18.15 Ângulos diretores.

18. Quantas retas pela origem fazem ângulos de 45º com ambos os semi-eixos positivos dos x e y?

19. Quantas retas pela origem fazem ângulos de 60º com ambos os semi-eixos positivos dos x e dos y? Que ângulos elas formam com o semi-eixo positivo dos z?

20. Calcule o trabalho realizado pela força **F** quando seu ponto de aplicação move-se de P a Q:

    (a) $\mathbf{F} = 2\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $P = (1, 2, -2)$, $Q = (3, -1, 1)$;
    (b) $\mathbf{F} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, $P = (-1, 2, 3)$, $Q = (1, 2, -1)$.

21. Calcule o trabalho realizado por uma força $\mathbf{F} = -c\mathbf{k}$ quando seu ponto de aplicação move-se de $P = (x_1, y_1, k_1)$ a $Q = (x_2, y_2, z_2)$.

22. Calcule o trabalho realizado por uma força constante **F** sabendo-se que seu ponto de aplicação se move em trajetória poligonal fechada.

18.3 PRODUTO VETORIAL DE DOIS VETORES

Muitos problemas de Geometria recaem na determinação de um vetor perpendicular simultaneamente a dois vetores dados **A** e **B**. Uma das formas usuais para tal determinação é o *produto vetorial* de **A** e **B**, denotado por **A** x **B**. O produto vetorial **A** x **B** é muito diferente do produto escalar **A** · **B**. Basta uma distinção: **A** x **B** é um vetor, enquanto **A** · **B** é um número. Primeiro, definiremos o novo produto, depois descreveremos suas propriedades algébricas a fim de podermos computá-lo com razoável facilidade e finalmente ilustraremos algumas de suas aplicações.

Considere dois vetores não-nulos **A** e **B**. Suponha que um desses vetores seja transladado, se necessário, de modo a suas origens coincidirem e seja θ o ângulo de **A** a **B** (não de **B** a **A**) com $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$. Se **A** e **B** não forem paralelos, isto é, $0 < \theta < \pi$, então esses dois vetores determinam um plano (Fig. 18.16).

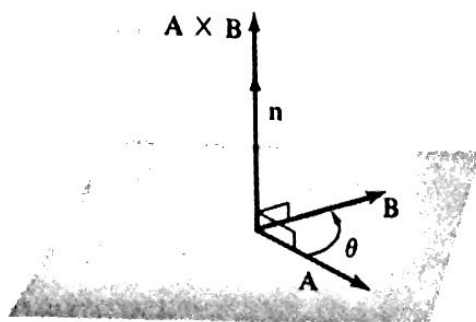



Figura 18.16

Agora escolhemos o vetor unitário **n** normal (perpendicular) a esse plano e cujo sentido é determinado pela *regra da mão direita.* Essa regra consiste no seguinte: colocando-se a mão direita de modo que o polegar seja perpendicular ao plano de **A** e **B** e os dedos rodem de **A** para **B** em sentido que coincide com o do ângulo θ, então **n** aponta no mesmo sentido do polegar. Este é o sentido do vetor **A** x **B** que estamos definindo. Os vetores **A** e **B** determinam não só o plano em consideração mas também um paralelogramo nesse plano cuja área é $|\mathbf{A}| : |\mathbf{B}| \operatorname{sen} \theta$ (Fig. 18.17).

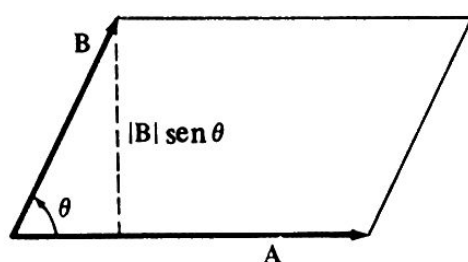



Figura 18.17

Tomamos a área desse paralelogramo como o módulo do vetor **A X B**. Com essas preliminares podemos enunciar agora a definição do produto vetorial de **A** e **B**, nessa ordem:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}| \operatorname{sen} \theta \, \mathbf{n}. \tag{1}$$

Observe que, se **A** ou **B** for **O** ou se **A** e **B** forem paralelos, eles não determinam um plano e, portanto, o vetor unitário normal **n** não está definido. Mas nesses casos $|\mathbf{A}| = 0$ ou $|\mathbf{B}| = 0$ ou $\operatorname{sen} \theta = 0$, então teremos por (1) $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = 0$, e a determinação de **n** não é necessária. Se concordarmos em que o vetor nulo seja considerado paralelo a qualquer vetor, fica fácil ver que

A é paralelo a **B** se e somente se $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$.

Em particular, temos

$$\mathbf{A} \times \mathbf{A} = \mathbf{0}$$

para todo **A**. Se em vez de **A** x **B** consideramos **B** x **A**, o sentido do ângulo θ é invertido e devemos girar a mão direita de modo que o polegar aponte no sentido oposto. Isto significa que **n** é substituído por − **n**. Portanto

$$\mathbf{B} \times \mathbf{A} = -\mathbf{A} \times \mathbf{B}. \tag{2}$$

De (2) concluímos que o produto vetorial não é comutativo, ou seja, a ordem dos fatores é importante.

Tendo (2) em mente e aplicando a definição (1) aos vetores unitários **i**, **j** e **k** (Fig. 18.18), concluímos que

$$\begin{aligned} \mathbf{i} \times \mathbf{j} &= -\mathbf{j} \times \mathbf{i} = \mathbf{k}, \\ \mathbf{j} \times \mathbf{k} &= -\mathbf{k} \times \mathbf{j} = \mathbf{i}, \\ \mathbf{k} \times \mathbf{i} &= -\mathbf{i} \times \mathbf{k} = \mathbf{j}, \end{aligned} \tag{3}$$

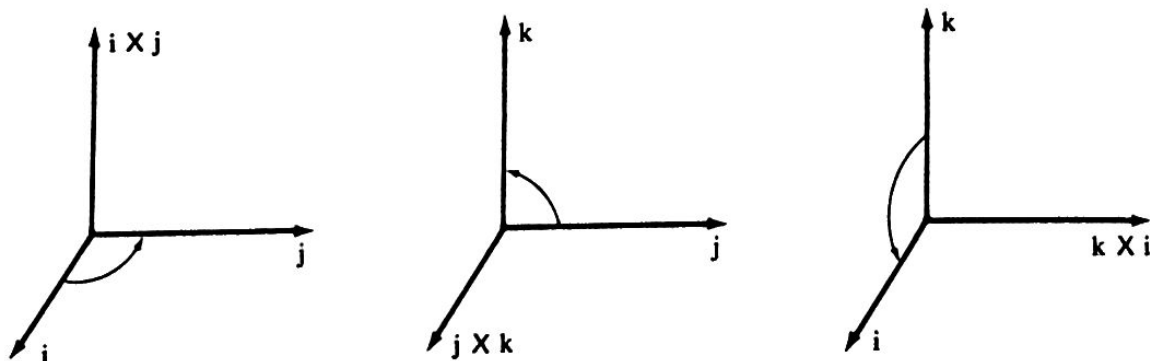



Figura 18.18

e também que

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}.$$

Por exemplo, a regra da mão direita revela que o sentido de **i** X **j** é o mesmo de **k**. Mas a área do paralelogramo determinado por **i** e **j** é 1, e como o próprio **k** tem comprimento 1, temos

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}.$$

Os produtos (3) são fáceis de ser memorizados visualizando-se a figura. Um outro modo de lembrar-se é dispor **i**, **j**, **k** em ordem cíclica,

$$\mathbf{i} \rightarrow \mathbf{j} \rightarrow \mathbf{k}$$

e observar que

(cada vetor unitário) x (o próximo) = (o terceiro).

Nosso próximo objetivo é desenvolver uma fórmula conveniente para calcular **A X B** em termos das componentes de **A** e **B**,

$$\mathbf{A} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{B} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}. \tag{4}$$

A fim de efetuar o produto

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) \times (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) = ?,$$

necessitamos que o produto vetorial possua as seguintes propriedades:

$$(c\mathbf{A}) \times \mathbf{B} = c(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times (c\mathbf{B}), \tag{5}$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C}, \tag{6}$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{C} + \mathbf{B} \times \mathbf{C}. \tag{7}$$

A propriedade (5) é fácil de ser estabelecida diretamente a partir da definição (1). A propriedade (7) segue-se de (6) aplicando-se (2),

$$\begin{aligned}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \times \mathbf{C} &= -[\mathbf{C} \times (\mathbf{A} + \mathbf{B})] \\ &= -(\mathbf{C} \times \mathbf{A} + \mathbf{C} \times \mathbf{B}) \\ &= -\mathbf{C} \times \mathbf{A} - \mathbf{C} \times \mathbf{B} \\ &= \mathbf{A} \times \mathbf{C} + \mathbf{B} \times \mathbf{C}.\end{aligned}$$

A dificuldade real ocorre com a Lei Distributiva (6). Não há prova simples. Mas melhor que deter nosso progresso parando para inserir uma prova complicada aqui, vamos simplesmente considerar (6) como válida e prosseguir em direção a nosso objetivo imediato. Uma prova de (6) é dada na Observação 2 e se destina a qualquer estudante que possa desejar examiná-la.

Continuamos com nossa tarefa de realizar o produto vetorial dos vetores (4). Não nos esquecendo da ordem dos fatores, temos

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \times \mathbf{B} &= (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) \times (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) \\ &= a_1\mathbf{i} \times (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) + a_2\mathbf{j} \times (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) \\ &\qquad + a_3\mathbf{k} \times (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k})\end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \times \mathbf{B} = a_1b_1\mathbf{i} \times \mathbf{i} + a_1b_2\mathbf{i} \times \mathbf{j} + a_1b_3\mathbf{i} \times \mathbf{k} \\ + a_2b_1\mathbf{j} \times \mathbf{i} + a_2b_2\mathbf{j} \times \mathbf{j} + a_2b_3\mathbf{j} \times \mathbf{k} \\ + a_3b_1\mathbf{k} \times \mathbf{i} + a_3b_2\mathbf{k} \times \mathbf{j} + a_3b_3\mathbf{k} \times \mathbf{k}.\end{aligned}$$

Aplicando (3) obtemos agora a fórmula um tanto quanto desajeitada

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{i}(a_2b_3 - a_3b_2) - \mathbf{j}(a_1b_3 - a_3b_1) + \mathbf{k}(a_1b_2 - a_2b_1). \tag{8}$$

(O estranho modo de escrever os sinais aqui tem um propósito que se tornará claro mais adiante.)

Não é necessário memorizar a fórmula (8), pois existe uma versão equivalente, envolvendo determinantes, que é fácil de ser lembrada. Recordamos que um determinante de ordem 2 é definido por

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1.$$

Por exemplo

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 - (-2) \cdot 4 = 23.$$

Um determinante de ordem 3 pode ser definido em termos de determinantes de ordem 2:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}. \tag{9}$$

Aqui vemos que cada número da primeira linha à esquerda é multiplicado pelo determinante de ordem 2 que se obtém quando a linha e a coluna daquele número são eliminadas. Observamos, em particular, o sinal negativo do termo médio à direita da fórmula (9).

Embora o determinante de ordem 3 possa ser expandido em termos de qualquer linha ou coluna, utilizaremos apenas expansões usando a primeira linha, como em (9). Por exemplo,

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 3 \\ -2 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= 3(3 \cdot 1 - 3 \cdot 7) - 2[4 \cdot 1 - 3 \cdot (-2)] + (-1)[4 \cdot 7 - 3 \cdot (-2)]$$

$$= -54 - 20 - 34 = -108.$$

A fórmula (8) para o produto vetorial de $\mathbf{A} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ e $\mathbf{B} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$ é evidentemente equivalente a

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{i} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}. \tag{10}$$

Motivado por (9), escrevemos agora (10) na forma

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}. \tag{11}$$

Esta é a fórmula concisa e fácil de ser lembrada para **A X B** que estávamos procurando. O "determinante simbólico" deve ser calculado expandindo-se pela primeira linha exatamente como na equação (9). Enfatizamos que as componentes do primeiro vetor **A** em **A X B** forma a *segunda* linha do determinante em (11) e que as componentes do *segundo* vetor **B** formam a *terceira* linha do determinante*.

Exemplo 1 Calcule o produto vetorial de $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ e $\mathbf{B} = \mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$.

Solução Pela fórmula (11), temos

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 5 & -3 \end{vmatrix} = \mathbf{i}\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -17\mathbf{i} + 10\mathbf{j} + 11\mathbf{k}.$$

Como verificação de rotina para nos protegermos de erros computacionais, observamos que nossa resposta, **A x B**, é perpendicular a **A**, pois $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{A} = -34 - 10 + 44 = 0$ e é perpendicular a **B**, pois $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{B} = -17 + 50 - 33 = 0$.

Exemplo 2 Determine todos os vetores unitários perpendiculares a ambos os vetores $\mathbf{A} \times 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ e $\mathbf{B} = -4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$.

Solução Como **A x B** é automaticamente perpendicular a ambos **A** e **B**, computamos

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ -4 & 3 & -5 \end{vmatrix} = \mathbf{i}\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -5 \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}.$$

* Alguns autores definem **A x B** pela fórmula (11). Essa abordagem tem várias desvantagens. Uma delas é que é necessário um considerável esforço antes de que se compreenda a natureza geométrica de **A x B** (isto é, seu comprimento e direção). Preferimos definir **A x B** diretamente em termos de seu comprimento e direção e considerar a fórmula (11) simplesmente como uma ferramenta conveniente para realizar cálculos. As definições das operações vetoriais que não dependem das representações explícitas dos vetores em qualquer sistema particular de coordenadas chamam-se *invariantes* ou *independentes de coordenadas*.

A seguir convertemos esse vetor num vetor unitário de mesmo sentido, dividindo-o por seu próprio módulo, que é $\sqrt{16+4+4} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$:

$$\frac{-4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}}{2\sqrt{6}} = \frac{-2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{6}}.$$

E finalmente introduzimos um sinal positivo ou negativo,

$$\pm\frac{-2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{6}},$$

pois há dois possíveis sentidos.

Exemplo 3 Calcule a área do triângulo cujos vértices são $P = (2, -1, 3)$, $Q = (1, 2, 4)$ e $R = (3, 1, 1)$.

Solução Dois lados do triângulo são representados pelos vetores

$$\mathbf{A} = \overrightarrow{PQ} = (1-2)\mathbf{i} + (2+1)\mathbf{j} + (4-3)\mathbf{k} = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k},$$

$$\mathbf{B} = \overrightarrow{PR} = (3-2)\mathbf{i} + (1+1)\mathbf{j} + (1-3)\mathbf{k} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}.$$

O vetor

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -8\mathbf{i} - \mathbf{j} - 5\mathbf{k}$$

tem módulo $\sqrt{64+1+25} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$ e este é igual à área do paralelogramo que tem $A = \overrightarrow{PQ}$ e $B = \overrightarrow{PR}$ como lados adjacentes. A área do triângulo dado é evidentemente a metade da área desse paralelogramo e é, portanto, $\frac{3}{2}\sqrt{10}$.

Observação 1 O produto vetorial aparece naturalmente em muitas situações na Física. Por exemplo, se uma força **F** é aplicada num ponto P de um corpo (Fig. 18.19) e se **R** é o vetor que une um ponto fixo O a P, então essa força tende a girar o corpo em torno de um eixo que passa por O e é perpendicular ao plano de **R** e **F**.

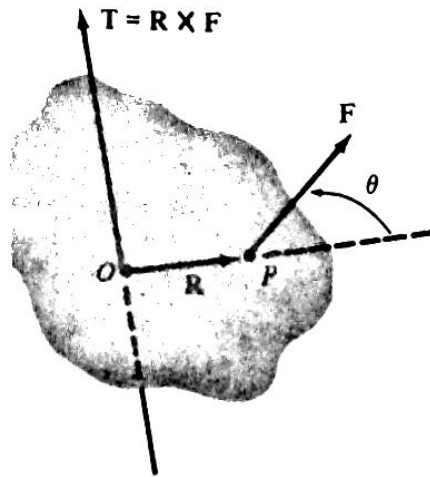



Figura 18.19 Vetor torque

O *vetor torque* **T** definido por

$$\mathbf{T} = \mathbf{R} \times \mathbf{F}$$

especifica a direção e o módulo desse efeito rotacional, pois $|\mathbf{R}|\ |\mathbf{F}|$ sen θ é o momento da força com relação ao eixo, ou seja, o produto do comprimento do braço da alavanca pela componente escalar de **F** perpendicular a R.

Como outro exemplo, mencionamos a força **F** exercida sobre uma partícula móvel carregada por um campo magnético **B**. Verifica-se que

$$\mathbf{F} = q\mathbf{V} \times \mathbf{B},$$

onde **V** é a velocidade da partícula carregada e q é o valor de sua carga. Este é o fato primário que provoca a aurora boreal, produzida por rajadas de partículas elétricas carregadas, a partir do Sol, através do campo magnético da Terra. Esse princípio básico do eletromagnetismo é também base do projeto e da operação de ciclotrons e receptores de televisão.

Observação 2 Vejamos agora a dedução da Lei Distributiva do produto vetorial (6). Provaremos (6) apenas para vetores unitários **A**, pois, uma vez feito isso, uma aplicação de (5) leva imediatamente à obtenção de (6) para vetores **A** de módulo arbitrário.

Com um vetor unitário **A** e um vetor arbitrário **V**, **A** x **V** pode ser construído, realizando as duas operações seguintes (Fig. 18.20, à esquerda):

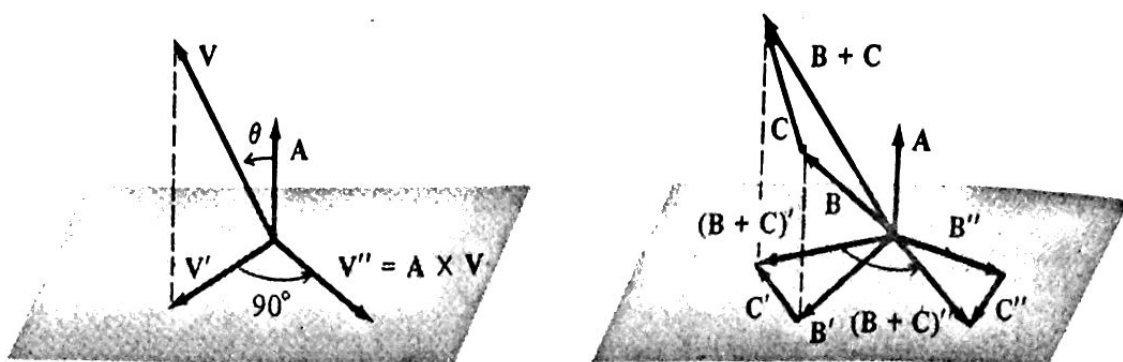



Figura 18.20 A Lei Distributiva.

Primeiro, projetamos **V** sobre o plano perpendicular a **A** para obter um vetor **V'** de módulo $|\mathbf{V}|$ sen θ; depois giramos **V'** nesse plano de um ângulo de 90º no sentido positivo, para obter **V''**, que é **A** x **V**, pois **A** é um vetor unitário. Cada uma dessas operações transforma triângulo em triângulo; logo, se começarmos com os três vetores **B**, **C** e **B + C** (Fig. 18.20, à direita) os três vetores finais **B''**, **C''** e (**B + C**)'' continuarão formando um triângulo e, portanto, (**B + C**)'' = **B''** + **C''**. Mas isto significa que

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C},$$

e a demonstração se completa.

Problemas

1. Calcule **A X B** e confira o resultado mostrando que ele é perpendicular simultaneamente a **A** e a **B**:

   (a) $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$;
   (b) $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{B} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$;
   (c) $\mathbf{A} = 5\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = -3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$;
   (d) $\mathbf{A} = \mathbf{i}$, $\mathbf{B} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$.

2. Calcule um vetor **N** perpendicular ao plano determinado pelos três pontos P x $(1, -1, 4)$, $Q = (2, 0, 1)$, $R = (0, 2, 3)$.

3. Calcule a área do triângulo do Problema 2.

4. Calcule a distância da origem ao plano do Problema 2 determinando a projeção escalar de $\overrightarrow{OP}$ sobre o vetor **N**.

5. Se $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = 0$, o que se pode concluir acerca da configuração de **A**, **B** e **C**?

6. Mostre que $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|^2 = |\mathbf{A}|^2 \, |\mathbf{B}|^2 - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^2$.

7. Indique que o produto vetorial não é associativo mostrando que

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \neq (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C}$$

para os três vetores $\mathbf{A} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{B} = \mathbf{j}$, $\mathbf{C} = \mathbf{k}$.

8. Mostre que o produto vetorial de cada par dos seguintes vetores é paralelo ao terceiro: $\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{i} - \mathbf{k}$. O que se pode dizer sobre a configuração dos 3 vetores?

9. Mostre que, se **A** é um vetor não-nulo e $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{A} \times \mathbf{C}$, não é necessariamente verdade que $\mathbf{B} = \mathbf{C}$.

10. Se **A**, **B** e **C** são mutuamente perpendiculares, mostre que $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{0}$.

11. Sejam P_1 e Q_1 dois pontos de uma reta L_1 e sejam P_2 e Q_2 dois pontos de uma reta L_2. Se L_1 e L_2 não são paralelas, então a distância d entre elas é o valor absoluto da projeção escalar de $\overrightarrow{P_1P_2}$ sobre um vetor unitário perpendicular a ambas as retas. Por quê?
   (a) Mostre que

$$d = \left| \overrightarrow{P_1P_2} \cdot \frac{\overrightarrow{P_1Q_1} \times \overrightarrow{P_2Q_2}}{|\overrightarrow{P_1Q_1} \times \overrightarrow{P_2Q_2}|} \right|.$$

   (b) Calcule d sendo L_1 a reta determinada por $P_1 = (-1, 1, 1)$ e $Q_1 = (1, 0, 0)$ e L_2 a reta determinada por $P_2 = (3, 1, 0)$ e $Q_2 = (4, 5, -1)$.

12. Sendo $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ normal a um plano e $\mathbf{B} = -\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ normal a um outro plano, é verdade que os planos necessariamente se interceptam? Justifique sua resposta. Se eles se interceptam, determine um vetor paralelo à reta de interseção.

18.4 RETAS E PLANOS

Como já temos todo o instrumental de Álgebra Vetorial à disposição, seria previsível que, a seguir, voltássemos ao *cálculo* de funções vetoriais no espaço tridimensional. Esse cálculo lida com funções de uma ou mais variáveis escalares cujos valores são vetores e com limites, derivadas, velocidade, aceleração, curvatura, exatamente como no Capítulo 17. Esses conceitos são essenciais para o trabalho com movimentos espaciais, campos vetoriais e geometria diferencial de curvas e superfícies no espaço. Entretanto, um estudo cuidadoso desses tópicos pertence a um curso posterior de cálculo avançado ou de análise vetorial e não faz parte de nosso propósito neste livro.

Apesar disso, em algumas ocasiões necessitaremos considerar o vetor posição $\mathbf{R}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ de um ponto P que se move ao longo de uma curva espacial (Fig. 18.21).

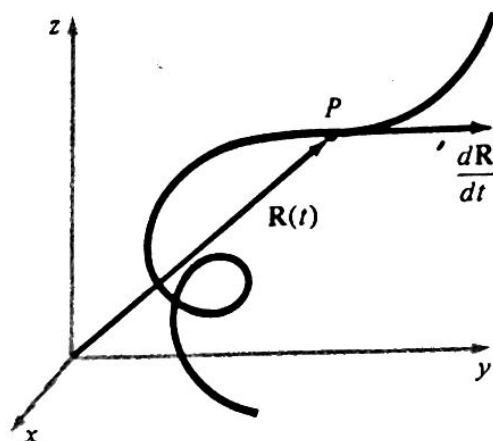



Figura 18.21 Uma curva do espaço.

A derivada dessa função é definida de maneira óbvia por

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{R}(t + \Delta t) - \mathbf{R}(t)}{\Delta t},$$

e tem todas as propriedades que esperamos baseados em nossa experiência do Capítulo 17. Em particular, $d\mathbf{R}/dt$ é tangente à trajetória no ponto P; é a velocidade de P se o parâmetro t for o tempo; é o vetor tangente unitário se t for o comprimento de arco.

Com essas breves observações pomos de lado o cálculo de funções vetoriais e voltamos ao principal assunto deste capítulo, ou seja, a geometria analítica de retas, planos e superfícies no espaço tridimensional. Veremos que a álgebra vetorial que vimos nas seções precedentes é um instrumento muito valioso para esse trabalho.

Como sabemos, da Geometria Analítica Plana, uma equação de primeiro grau

$$ax + by + c = 0$$

é a equação de uma reta (supondo que a e b não sejam ambos nulos). Entretanto, veremos que em espaço de três dimensões tal equação representa um plano e que não é possível representar uma reta no espaço por uma única equação do primeiro grau.

Começamos com o estudo de retas. Uma reta do espaço pode ser dada geometricamente de três maneiras: como o suporte do segmento que une dois pontos; como a interseção de dois planos ou como a reta que passa por um ponto e tem uma direção especificada. A terceira maneira é a mais importante para nós.

Suponha que L seja a reta no espaço que passa por um dado ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e é paralela a um dado vetor não-nulo

$$\mathbf{V} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$$

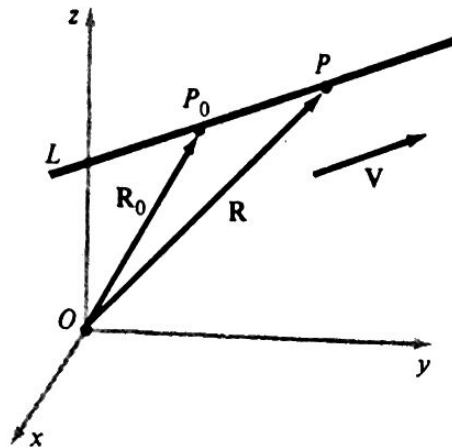



Figura 18.22 Uma reta no espaço.

Um outro ponto $P = (x, y, z)$ pertence à reta L se e somente se o vetor $\overrightarrow{P_0P}$ é paralelo ao vetor $\mathbf{V}$. Isto é, P pertence a L se e somente se $\overrightarrow{P_0P}$ é um múltiplo escalar de $\mathbf{V}$, ou seja

$$\overrightarrow{P_0P} = t\mathbf{V} \tag{1}$$

para algum número real t. Se $R_0 = \overrightarrow{OP_0}$ e $\mathbf{R} = \overrightarrow{OP}$ são os vetores posição de P_0 e de P, então $\overrightarrow{P_0P} = \mathbf{R} - \mathbf{R}_0$ e de (1) teremos

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + t\mathbf{V}, \tag{2}$$

que é a *equação vetorial* de L. Quando t varia de $-\infty$ a ∞ o ponto P percorre toda a reta L, movendo-se na direção de $\mathbf{V}$.

Escrevendo (2) sob a forma

$$x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} + z_0\mathbf{k} + t(a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k})$$

e igualando os coeficientes de **i**, **j** e **k**, obtemos as três equações escalares

$$\begin{aligned} x &= x_0 + at, \\ y &= y_0 + bt, \\ z &= z_0 + ct. \end{aligned} \tag{3}$$

Estas são as *equações paramétricas* da reta L que passa pelo ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e que é paralela ao vetor $\mathbf{V} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$. Observe que as equações paramétricas de uma reta não são únicas. Os números x_0, y_0, z_0 podem ser substituídos pelas coordenadas de qualquer outro ponto de L, e a, b e c podem ser substituídos pelas componentes de qualquer outro vetor não-nulo paralelo a L. As equações paramétricas resultantes serão completamente equivalentes às equações (3) no sentido de que elas descrevem a mesma reta.

Com o fim de obtermos as equações cartesianas da reta, eliminamos o parâmetro t das equações (3) igualando as três expressões obtidas pelo isolamento de t. Assim,

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}. \tag{4}$$

que são as *equações simétricas* da reta L. Se qualquer das constantes a, b, c que está em denominador for zero, o correspondente numerador também deve ser zero. Isto é fácil de se ver a partir da forma paramétrica (3), que revela, por exemplo, que se tivermos $a = 0$ em

$$x = x_0 + at$$

obteremos $x = x_0$. Assim, quando um dos denominadores em (4) se anula, admitimos que em tal caso o correspondente numerador também deverá ser zero. Com essa interpretação, as equações (4) podem ser usadas sempre, mesmo sabendo que a divisão por zero é normalmente proibida.

Exemplo 1 Uma reta L passa pelos pontos $P_0 = (3, -2, 1)$ e $P_1 = (5, 1, 0)$. Determine as equações paramétricas e as equações simétricas de L. Determine também os pontos em que essa reta intercepta os planos coordenados.

Solução A reta L é paralela ao vetor $\overrightarrow{P_0P_1} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$; logo, considerando P_0 o ponto conhecido da reta, as equações (3) dão as equações paramétricas

$$x = 3 + 2t,$$
$$y = -2 + 3t,$$
$$z = 1 - t.$$

Eliminando t, obtemos as equações simétricas

$$\frac{x - 3}{2} = \frac{y + 2}{3} = \frac{z - 1}{-1}.$$

Para determinar o ponto em que L fura o plano xy, pomos $z = 0$ na terceira equação paramétrica e vemos que $t = 1$. Com esse valor de t; $x = 5$ e $y = 1$; logo, o ponto é $(5, 1, 0)$. Analogamente, $x = 0$ implica $t = -\frac{3}{2}$, logo, a interseção da reta com o plano yz é $(0, -\frac{13}{2}, \frac{5}{2})$; e $y = 0$ implica $t = \frac{2}{3}$, logo, o ponto em que a reta intercepta o plano xz é $(\frac{13}{3}, 0, \frac{1}{3})$.

Retornamos agora ao estudo de planos. Um plano pode ser determinado de várias maneiras: por três pontos não-colineares, por uma reta e um ponto que não pertence a essa reta ou por um ponto e uma direção perpendicular a uma direção especificada. Novamente, a terceira abordagem é a mais conveniente para nós.

Consideramos o plano que passa por um dado ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e é perpendicular a um dado vetor não-nulo

$$\mathbf{N} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k} \tag{5}$$

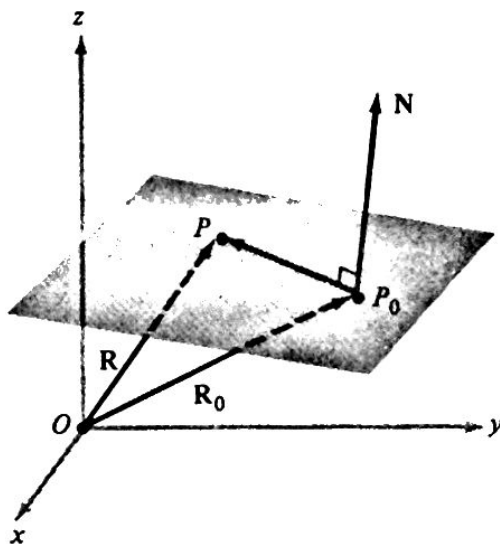



Figura 18.23 Um plano no espaço.

Um ponto $P = (x, y, z)$ pertence a esse plano se e somente se o vetor $\overrightarrow{P_0P}$ for perpendicular ao vetor $\mathbf{N}$, o que significa

$$\mathbf{N} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0. \tag{6}$$

Se $\mathbf{R}_0 = \overrightarrow{OP_0}$ e $\mathbf{R} = \overrightarrow{OP}$ forem os vetores posição de P_0 e de P, de modo que $\overrightarrow{P_0P} = \mathbf{R} - \mathbf{R}_0$, então (6) torna-se

$$\mathbf{N} \cdot (\mathbf{R} - \mathbf{R}_0) = 0. \tag{7}$$

Esta é a *equação vetorial* do plano em discussão.

Como $\mathbf{R} - \mathbf{R}_0 = (x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k}$ podemos escrever (7) na forma escalar

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0. \tag{8}$$

Esta é a *equação cartesiana* do plano que passa pelo ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e que possui vetor normal $\mathbf{N} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$. Por exemplo, a equação do plano por $P_0 = (5, -3, 1)$ com vetor normal $\mathbf{N} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ é

$$4(x - 5) + 3(y + 3) - 2(z - 1) = 0$$

ou

$$4x + 3y - 2z = 9.$$

Observe que os coeficientes de x, y e z da última equação são as componentes do vetor normal. Este é sempre o caso, pois a equação (8) pode ser escrita na forma

$$ax + by + cz = d, \tag{9}$$

onde $d = ax_0 + by_0 + cz_0$, e os coeficientes de x, y e z dessa equação são evidentemente as componentes do vetor normal (5). Reciprocamente, toda equação linear em x, y e z da forma (9) representa um plano com vetor normal $\mathbf{N} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ se os coeficientes a, b e c não forem todos nulos. Para verificar tal afirmação observamos que, se por exemplo $a \neq 0$, poderemos escolher y_0 e z_0 arbitrariamente e resolver a equação $ax_0 + by_0 + cz_0 = d$ para x_0. Com esses valores podemos escrever (9) como

$$ax + by + cz = ax_0 + by_0 + cz_0$$

ou

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0,$$

e esta é imediatamente reconhecida como a equação do plano por (x_0, y_0, z_0) com vetor normal $\mathbf{N} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$.

Exemplo 2 Determine a equação do plano que passa pelos três pontos $P_0 = (3, 2, -1)$, $P_1 = (1, -1, 3)$ e $P_2 = (3, -2, 4)$.

Solução Para usar a equação (8), devemos determinar um vetor $\mathbf{N}$ que seja normal ao plano. Isto é fácil de se fazer utilizando o produto vetorial. Computamos

$$\mathbf{N} = \overrightarrow{P_0P_1} \times \overrightarrow{P_0P_2} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -2 & -3 & 4 \\ 0 & -4 & 5 \end{vmatrix} = \mathbf{i} + 10\mathbf{j} + 8\mathbf{k}.$$

Como $\overrightarrow{P_0P_1}$ e $\overrightarrow{P_0P_2}$ estão no plano, seu produto vetorial **N** é normal ao plano. Usando a equação (8) com P_0 como ponto dado, nosso plano tem a equação

$$(x-3) + 10(y-2) + 8(z+1) = 0$$

ou

$$x + 10y + 8z = 15,$$

após simplificação.

Exemplo 3 Determine o ponto em que a reta

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-4}{2}$$

fura o plano $x + 2y + 2z = 22$.

Solução Para determinar as equações paramétricas da reta, introduzimos t como a razão comum nas equações simétricas dadas,

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-4}{2} = t,$$

o que dá

$$x = 2 + t, \qquad y = -3 + 2t, \qquad z = 4 + 2t.$$

Queremos o valor de t para o qual o ponto (x, y, z) da reta pertence ao plano dado. Substituindo essas equações na equação do plano, obtemos

$$(2+t) + 2(-3+2t) + 2(4+2t) = 22,$$

logo $t = 2$ no ponto em que a reta fura o plano. Substituindo $t = 2$ nas equações paramétricas da reta, encontramos que o ponto desejado é $(4, 1, 8)$.

Exemplo 4 Determine o co-seno do ângulo formado pelos planos $x + 4y - 4z = 9$ e $x + 2y + 2z = -3$. Determine também equações paramétricas da interseção desses planos.

Solução Evidentemente, o ângulo θ entre os dois planos é o ângulo entre suas normais (Fig. 18.24).

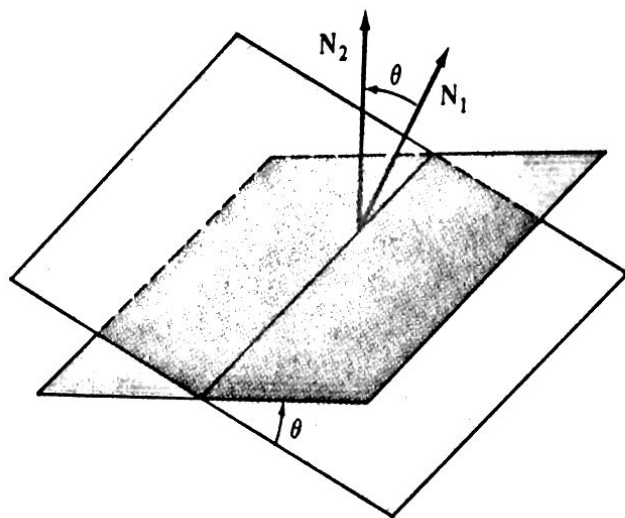



Figura 18.24

Observando as equações dos planos dados, vemos imediatamente que suas normais são

$$\mathbf{N}_1 = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 4\mathbf{k}, \qquad \mathbf{N}_2 = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}.$$

Utilizamos portanto o produto escalar para obter

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{N}_1 \cdot \mathbf{N}_2}{|\mathbf{N}_1||\mathbf{N}_2|} = \frac{1}{3\sqrt{33}}.$$

Daí podemos encontrar o ângulo θ por meio de tabelas ou de algum outro modo.

Para determinar as equações paramétricas da interseção, precisamos de um vetor **V** paralelo a essa reta e um ponto da reta. Encontramos **V** calculando o produto vetorial de $\mathbf{N}_1$ e $\mathbf{N}_2$,

$$\mathbf{V} = \mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 4 & -4 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 16\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - 2\mathbf{k}.$$

Como qualquer vetor paralelo à reta é solução, dividimos o obtido por 2 e utilizamos o vetor um pouco mais simples $8\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$. Para determinar um ponto da reta (interseção), podemos fazer $z = 0$ e resolver o sistema resultante nas incógnitas x e y,

$$x + 4y = 9,$$
$$x + 2y = -3.$$

Teremos $x = -15$, $y = 6$. O ponto desejado é portanto $(-15, 6, 0)$, e as equações paramétricas da reta são

$$x = -15 + 8t,$$
$$y = 6 - 3t,$$
$$z = -t.$$

Repetimos que não existe nada que indique que essas equações sejam únicas, pois poderíamos encontrar um ponto da reta de vários outros modos e existem muitos vetores diferentes paralelos à reta.

Como observamos no início desta seção, dois planos secantes quaisquer determinam uma reta no espaço. As equações dos dois planos são satisfeitas simultaneamente apenas pelos pontos da interseção. Desse ponto de vista, um par de equações lineares considerado como um sistema simultâneo pode ser interpretado como representando uma reta, ou seja, a interseção dos dois planos representados pelas equações sindividualmente. (Naturalmente, os planos devem se interceptar na realidade e não serem paralelos ou idênticos.) Assim, no Exemplo 4, o par de equações simultâneas

$$x + 4y - 4z = 9,$$
$$x + 2y + 2z = -3$$

representa a reta analisada nesse exemplo. Salientamos também que as equações simétricas (4) são equivalentes às três equações simultâneas

$$b(x - x_0) - a(y - y_0) = 0,$$
$$c(x - x_0) - a(z - z_0) = 0,$$
$$c(y - y_0) - b(z - z_0) = 0.$$

Estas são as equações de três planos que se interceptam na reta L, representada por (4). O primeiro tem vetor normal $b\mathbf{i} - a\mathbf{j}$, que é paralelo ao plano xy; logo, o primeiro plano é perpendicular ao plano xy. Analogamente, o segundo plano é perpendicular ao plano xz e o terceiro é perpendicular ao plano yz. Qualquer par dessas equações representa a reta L, que é a interseção do correspondente par de planos.

Problemas

1. Classifique cada uma das seguintes afirmações como verdadeira ou falsa:

   (a) Dois planos perpendiculares a uma reta são paralelos.
   (b) Duas retas perpendiculares a uma terceira reta são paralelas.
   (c) Dois planos paralelos a um terceiro plano são paralelos.
   (d) Duas retas perpendiculares a um plano são paralelas.
   (e) Dois planos paralelos a uma reta são paralelos.
   (f) Duas retas paralelas a uma terceira reta são paralelas.
   (g) Dois planos perpendiculares a um terceiro plano são paralelos.
   (h) Duas retas paralelas a um plano são paralelas.

2. Que conclusão pode ser tirada sobre as retas,

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}, \quad \frac{x-x_0}{A}=\frac{y-y_0}{B}=\frac{z-z_0}{C}$$

se $aA + bB + cC = 0$?

3. Que conclusão podemos tirar sobre as retas

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}, \quad \frac{x-x_1}{A}=\frac{y-y_1}{B}=\frac{z-z_1}{C}$$

se $a/A = b/B = c/C$?

4. Escreva as equações simétricas para a reta que passa pelo ponto $(3, 0, -2)$ e é paralela a:
   (a) o vetor $4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$;
   (b) a reta $(x+1)/7 = (y-2)/2 = z/(-3)$;
   (c) o eixo x.

5. Escreva as equações paramétricas da reta que passa pelo ponto $(2, -1, -3)$ e é paralela a:
   (a) o vetor $\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$;
   (b) a reta $x/3 = (y+7)/(-1) = (z-3)/6$;
   (c) a reta $x = 2t - 3$, $y = 3 - 2t$, $z = 5t - 4$.

6. Escreva as equações simétricas da reta que passa pelos pontos
   (a) $(2, -1, 3)$ e $(5, 2, -2)$;
   (b) $(7, 3, -1)$ e $(3, -1, 3)$.

7. Escreva as equações paramétricas da reta que passa pelos pontos
   (a) $(2, 0, 3)$ e $(-1, 3, 5)$;
   (b) $(4, 2, -1)$ e $(0, 2, -1)$.

8. Se L é a reta que passa pelos pontos $(-6, 6, -4)$ e $(12, -6, 2)$, determine os pontos onde L fura os planos coordenados.

9. Mostre que as retas

$$x = 1 + t, \qquad y = 2t, \qquad z = 1 + 3t$$

e

$$x = 3s, \qquad y = 2s, \qquad z = 2 + s$$

se interceptam e descubra seu ponto de interseção.

10. Calcule a distância entre as retas

(a) $\dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y-3}{4} = \dfrac{z}{2}$

e

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z+1}{2};$$

(b) $x = 2t - 4, \qquad y = 4 - t, \qquad z = -2t - 1$
e $x = 4t - 5, \quad y = -3t + 5, \quad z = -5t + 5.$

11. Calcule a distância da origem à reta

$$\frac{x-4}{3} = \frac{y-2}{4} = \frac{4-z}{5}.$$

12. (a) Calcule em função de t a distância D do ponto $P_0 = (1, 2, 3)$ a um ponto qualquer da reta;

$$x = 3 + t, \qquad y = 2 + t, \qquad z = 1 + t.$$

(b) Derivando, calcule o valor de t que minimiza D; calcule a distância mínima real; e calcule o ponto correspondente P_1 sobre a reta.

(c) Verifique que o vetor $\overrightarrow{P_0P_1}$ é perpendicular à reta.

13. Determine a equação do plano que contém o ponto $(1, 3, 1)$ e a reta $x = t, y = t, z = t + 2$.

14. Determine equações simétricas da reta de interseção de cada um dos seguintes pares de planos:

(a) $2x + y + z = 0,\ 3x + 4y - z = 10$;
(b) $2x + 3y + 5z = 21,\ 3x - 2y + z = 12$.

15. Use métodos vetoriais para mostrar que a distância D do ponto (x_0, y_0, z_0) ao plano $ax + by + cz + d = 0$ é dada pela fórmula

$$D = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

16. Mostre que os planos $ax + by + cz + d_1 = 0$ e $ax + by + cz + d_2 = 0$ são paralelos e que a distância entre eles é

$$\frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

17. Calcule a distância entre os planos $x - 2y + 4z = 1$ e $2x - 4y + 8z = -14$.

18. Determine uma equação do plano paralelo ao plano $2x - 5y + 3z = 7$ e que passa pelo ponto $(5, 2, 3)$.

19. Considere a esfera de raio 3 com o centro na origem. O plano tangente à esfera em $(1, 2, 2)$ intercepta o eixo x no ponto P. Determine as coordenadas de P.

20. Determine o valor do parâmetro t para o qual os planos

$$3x - 4y + 2z + 9 = 0,$$
$$3x + 4y - tz + 7 = 0,$$

são perpendiculares.

21. Verifique que os planos

$$2x + 3y + 4z - 1 = 0,$$
$$x - 2y + 3z - 4 = 0$$

se interceptam numa reta L. Determine as equações simétricas de L de duas maneiras:

(a) determinando dois pontos de L e prosseguindo daí;
(b) eliminando primeiro x das equações dadas e depois y, para determinar dois planos que passam por L que são perpendiculares ao plano yz e o plano xz, respectivamente, e depois resolvendo cada uma dessas equações para z e igualando todos os z.

22. Mostre que os dois conjuntos de equações

$$\frac{x-4}{3} = \frac{y-6}{4} = \frac{z+9}{-12} \qquad \text{e} \qquad \frac{x-1}{-6} = \frac{y-2}{-8} = \frac{z-3}{24}$$

representam a mesma reta.

23. Sejam p_1 e p_2 dois planos que se interceptam numa reta L e têm equações

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0,$$
$$a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0.$$

Se k for constante, mostre que

$$(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) + k(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0$$

é a equação de um plano que contém L. Variando os valores de k, essa equação representa todos os membros da família de planos que contém L, com uma exceção. Qual é essa exceção?

24. Determine a equação do plano que contém a interseção dos planos $2x + 3y - z = 1$ e $3x - y + 5z = 2$ e que passa pelo ponto $(1, 4, 1)$.

25. Determine a equação do plano que contém a interseção dos planos $x - 2y - 5z = 3$ e $5x + y - z = 1$ e que é paralelo a $4x + 3y + 4z + 7 = 0$.

26. Determine as coordenadas do ponto P em que a reta

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y+3}{4} = \frac{z-3}{2}$$

fura o plano $3x + 4y + 5z = 76$.

27. Mostre que a reta

$$\frac{x+8}{9}=\frac{y-10}{-4}=\frac{z-9}{-6}$$

está no plano $2x-3y+5z=-1$.

28. Mostre que a interseção dos planos

$$x+y-z=0 \qquad \text{e} \qquad x-y-5z+7=0$$

é paralela à reta

$$\frac{x+3}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-5}{1}.$$

29. Calcule o co-seno do ângulo entre os planos dados:

(a) $2x-y+2z=3,\ 3x+2y-6z=7$;
(b) $5x-3y+2z=3,\ x+3y+2z=-11$.

30. Mostre que a equação

$$(2x+y-z-3)^2+(x+2y-3z+5)^2=0$$

representa uma reta do espaço. (Note que essa equação é do segundo grau.)

18.5 CILINDROS E SUPERFÍCIES DE REVOLUÇÃO

Sabemos que o gráfico de uma equação $f(x, y)=0$ é usualmente uma curva do plano xy. Exatamente da mesma maneira, o gráfico de uma equação

$$F(x, y, z)=0 \tag{1}$$

é usualmente uma superfície do espaço xyz. As superfícies mais simples são os planos, e vimos na Seção 18.4 que a equação de um plano é uma equação linear da forma

$$ax+by+cz+d=0;$$

isto é, ela contém apenas termos de primeiro grau nas variáveis x, y e z. Nesta seção e na próxima examinaremos algumas outras superfícies simples que contêm termos de grau maior e que aparecem com freqüência no cálculo de muitas variáveis.

Os cilindros são as superfícies seguintes aos planos em ordem de complexidade. Para compreender o que são essas superfícies, consideremos uma curva plana C e uma reta L, não-paralela ao plano de C. Por *cilindro* entendemos a figura geométrica do espaço gerada (ou varrida) por uma reta que se move paralelamente a L com pontos em C (Fig. 18.25)*.

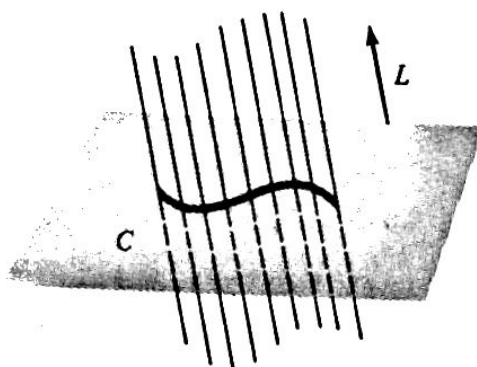



Figura 18.25 Um cilindro genérico.

A reta móvel se chama *geratriz* do cilindro. O cilindro pode ser encarado como se consistindo em infinitas retas paralelas, chamadas *geratrizes*, correspondentes às várias posições da geratriz, como sugerido pela figura.

Por exemplo, suponha que a curva dada C seja a curva

$$f(x, y) = 0 \tag{2}$$

do plano xy e seja a geratriz paralela ao eixo z (Fig. 18.26).

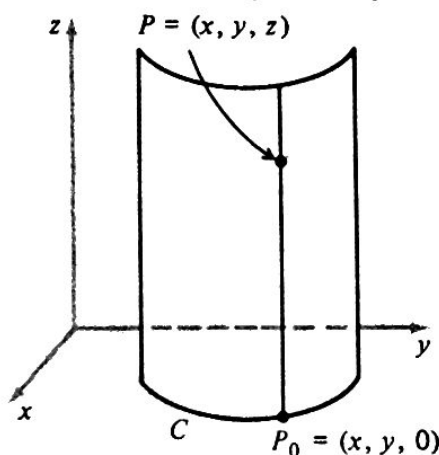



Figura 18.26

---

* Esse conceito inclui os familiares *cilindros circulares retos* da Geometria Elementar, para os quais a curva C é uma circunferência e a reta L é perpendicular ao plano da circunferência. Em Geometria, os adjetivos são muitas vezes omitidos, pois nenhuma outra espécie de cilindros é considerada. Entretanto, devemos notar que quando C é uma reta o cilindro é um plano; logo, os cilindros também incluem planos como casos particulares.

Então exatamente a própria equação (2) *é a equação do cilindro no espaço tridimensional.* A razão disto é que o ponto $P = (x, y, z)$ pertence ao cilindro se e somente se o ponto $P_0 = (x, y, 0)$ pertence à curva C, e isto acontece se e somente se $f(x, y) = 0$. O aspecto essencial de (2) como equação do cilindro é que ela é uma equação da forma (1) na qual não aparece a variável z. Dito de um outro modo: o fato de que estamos tratando de um cilindro cujas geratrizes são paralelas ao eixo z significa que para um ponto $P = (x, y, z)$ o valor de z não influi no fato de P estar ou não no cilindro; como apenas as variáveis x e y são relevantes para esse ponto, apenas as variáveis x e y podem estar presentes na equação do cilindro, isto é, z deve estar ausente dessa equação.

Exemplo 1 Esboce o cilindro

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

Solução Esta parece ser a equação de uma elipse do plano xy. Entretanto, o problema afirma tratar-se de um cilindro, e como a variável z está ausente da equação, as geratrizes desse cilindro são paralelas ao eixo z. Na Fig. 18.27 a elipse do plano xy é desenhada primeiro, depois duas geratrizes verticais, depois uma seção transversal elíptica horizontal acima do plano xy. Apesar das limitações de nossa figura (que esperamos sejam superadas pelos leitores por meio do uso ativo da imaginação), deve ser lembrado que todas as geratrizes sobre um cilindro se estendem ao infinito em ambos os sentidos. Essa superfície chama-se *cilindro elíptico.*

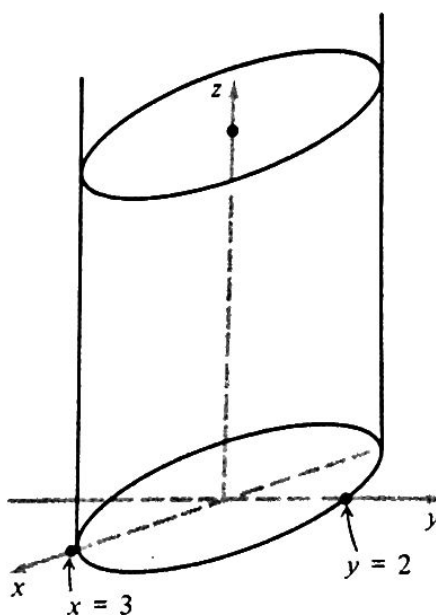



Figura 18.27 Cilindro elíptico.

É claro que essa discussão pode ser feita para um cilindro com geratrizes paralelas a qualquer eixo coordenado. Portanto concluímos que *toda equação em coordenadas cartesianas x, y, z com qualquer variável ausente representa um cilindro cujas geratrizes são paralelas ao eixo correspondente à variável ausente.*

Exemplo 2 Esboce o cilindro $z = x^2$.

Solução No plano xz esta é a equação de uma parábola com vértice na origem que se abre no sentido dos z positivos. Entretanto, sabemos que se trata de um cilindro, e como a variável y está ausente da equação, as geratrizes desse cilindro são paralelas ao eixo y. Na Fig. 18.28 a parábola do plano xz é desenhada primeiro, depois várias geratrizes e depois uma segunda seção transversal parabólica localizada à direita do plano xz. Essa superfície pode ser descrita como *cilindro parabólico.*

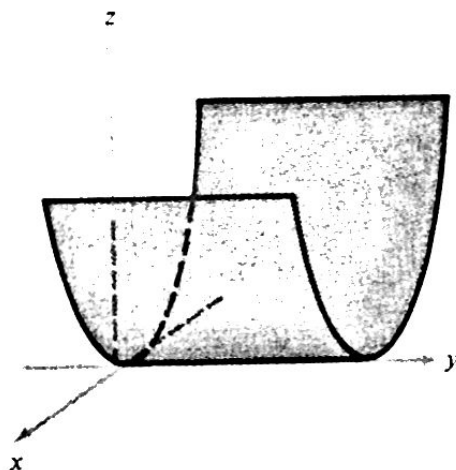



Figura 18.28 Cilindro parabólico.

Um outro modo de gerar uma superfície utilizando uma curva plana C é girar a curva (no espaço) ao redor de uma reta L em seu plano. A superfície resultante chama-se *superfície de revolução* com *eixo* L. No Capítulo 7 trabalhamos com superfícies de revolução calculando suas áreas como aplicação de integrais definidas. Consideraremos agora as equações dessas superfícies.

Suponha, por exemplo, que a curva C esteja no plano yz e que tenha equação

$$f(y, z) = 0. \tag{3}$$

Quando essa curva é girada ao redor do eixo z, um ponto qualquer $P = (x, y z)$ sobre a superfície resultante provém de algum ponto Q sobre C (Fig. 18.29).

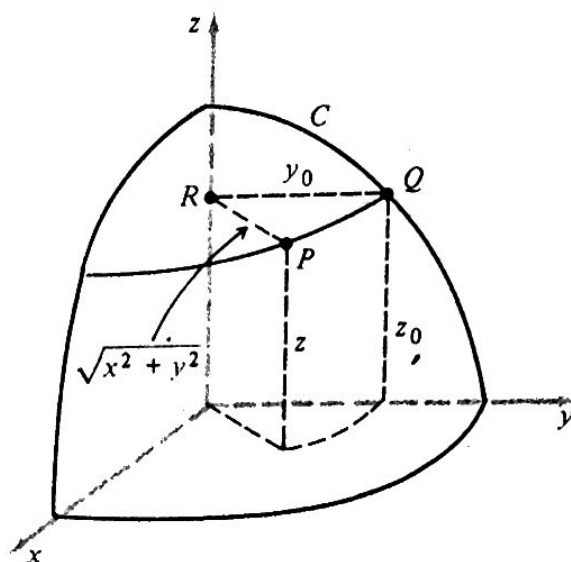



Figura 18.29.

Como Q está sobre C, suas coordenadas (y_0, z_0) satisfazem (3),

$$f(y_0, z_0) = 0. \tag{4}$$

Mas as posições de P a Q revelam que $z_0 = z$ e $y_0 = \sqrt{x^2 + y^2}$ e assim de (4) teremos

$$f(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0 \tag{5}$$

como equação da superfície de revolução. Resumidamente, quando Q vai ao ponto P da superfície, as distâncias QR e PR ao eixo z são iguais e obtemos a equação (5), substituindo y em (3) por $\sqrt{x^2 + y^2}$. A equação (5) pressupõe que $y \geqslant 0$ sobre C. Se y é positivo sobre algumas partes de C e negativo sobre outras, devemos substituir y em (3) por $\pm\sqrt{x^2 + y^2}$ para obter

$$f(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$$

como a equação da superfície completa. O radical desajeitado com sinal mais ou menos pode usualmente ser eliminado por elevação ao quadrado.

Exemplo 3 Se a reta $z = 3y$ do plano yz é girada ao redor do eixo z, a superfície de revolução resultante é claramente um cone circular reto de duas folhas com o vértice na origem e o eixo coincidindo com o eixo z (Fig. 18.30). Para obter a equação desse cone, substituímos y na equação $z = 3y$ por $\pm\sqrt{x^2 + y^2}$ e então racionalizamos por elevação ao quadrado:

$$z = \pm 3\sqrt{x^2 + y^2}, \qquad z^2 = 9(x^2 + y^2).$$

Se tivéssemos substituído y por $\sqrt{x^2 + y^2}$ para obter

teríamos obtido a equação da folha superior do cone, apenas, ou seja, da parte onde $z \geq 0$.

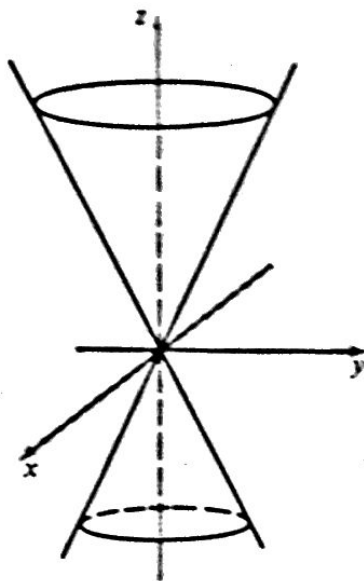



Figura 18.30 Cone.

Essencialmente da mesma maneira, podemos obter equações de superfícies de revolução tendo o eixo x ou o eixo y como eixo de simetria.

Problemas

Esboce os cilindros cujas equações são dadas nos Problemas 1 a 8. Se um cilindro tiver um nome óbvio, enuncie-o.

1. $y = x^2$.
2. $y^2 + 4z^2 = 16$.
3. $x = \text{sen}\, y$.
4. $xz = 4$.
5. $x + 3z = 6$.
6. $x^2 + z^2 = 9$.
7. $x = \text{tg}\, y, -\pi/2 < y < \pi/2$.
8. $y = e^x$.

9. As geratrizes de um cilindro são paralelas ao eixo y. Sua interseção com o plano xz é uma circunferência com centro $(0, 0, a)$ e raio a. Esboce o cilindro e determine sua equação.

10. As geratrizes de um cilindro são paralelas ao eixo x. Sua interseção com o plano yz é uma parábola com vértice em $(0, 0, 0)$ e foco em $(0, 0, -p)$. Esboce o cilindro e determine sua equação.

11. Determine a equação da superfície de revolução gerada girando a curva $z = e^{-y^2}$ ao redor do:
(a) eixo z; (b) eixo y.

Esboce ambas as superfícies.

12. Determine a equação da superfície de revolução gerada girando a circunferência $(y - b)^2 + z^2 = a^2$ $(a < b)$ em torno do:
(a) eixo z; (b) eixo y.

Esboce ambas as superfícies.

13. Em cada um dos seguintes problemas, escreva a equação da superfície de revolução gerada girando a curva dada em torno do eixo indicado e esboce a superfície:
(a) $y = z^2$, eixo y;
(b) $9x^2 + 4y^2 = 36$, eixo y;
(c) $z = 4 - x^2$, eixo z;
(d) $x = y^2$, eixo x.

14. Toda direção no espaço não-paralela ao plano xy pode ser especificada por um vetor da forma $\mathbf{V} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + \mathbf{k}$ (por quê?). Se uma curva C do plano xy tem equação $f(x, y) = 0$, mostre que a equação do cilindro gerado movendo-se uma reta paralela a $\mathbf{V}$ com pontos em C (Fig. 18.31) é

$$f(x - az, y - bz) = 0.$$

Sugestão: escreva as equações simétricas da reta que passa por um ponto $(x_0, y_0, 0)$ sobre C e paralela a V.

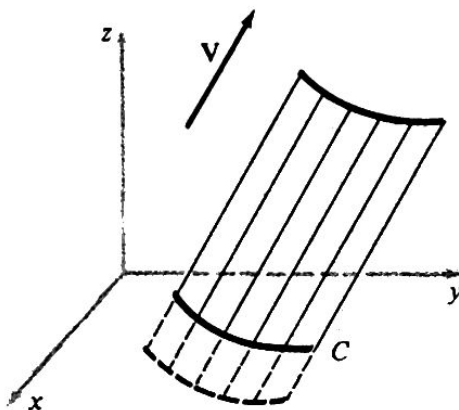



Figura 18.31.

15. Determine a equação do cilindro gerado por uma reta que se desloca paralelamente ao vetor $\mathbf{V} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$, passando por pontos da circunferência $x^2 + y^2 = 6x$ no plano xy.

16. Determine a equação do cilindro gerado por uma reta que se desloca paralelamente ao vetor $\mathbf{V} = -2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$, passando por pontos da parábola $y = x^2$ no plano xy.

18.6 SUPERFÍCIES QUÁDRICAS

Na Seção 15.6 aprendemos que o gráfico de uma equação do segundo grau nas variáveis x e y é sempre uma seção cônica – uma parábola, uma elipse, uma hipérbole ou talvez alguma forma degenerada de uma dessas curvas, tal como um ponto, o conjunto vazio ou um par de retas.

No espaço tridimensional, a equação mais geral do segundo grau é

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0. \tag{1}$$

Admitimos que nem todos os coeficientes $A, B, ..., F$ são nulos, de modo que o grau da equação é realmente 2 e não 1 ou 0. O gráfico de tal equação se chama *superfície quádrica.* Já encontramos diversas superfícies quádricas, como esferas e cilindros parabólicos, elípticos e hiperbólicos, mas há muitas outras. De fato, se pusermos de lado o caso familiar de cilindros, poderemos, por meio de rotações e translações convenientes dos eixos coordenados – que não discutiremos –, simplificar qualquer equação do tipo (1) e mostrar que há exatamente seis tipos distintos de superfícies quádricas não-degeneradas:

1. O elipsóide.
2. O hiperbolóide de uma folha.
3. O hiperbolóide de duas folhas.
4. O cone elíptico.
5. O parabolóide elíptico.
6. O parabolóide hiperbólico.

No que segue, daremos um exemplo de cada tipo de superfície em que a equação aparece na forma mais simples possível.

Os estudantes devem se familiarizar com essas superfícies e suas equações e, em particular, devem tentar compreender como a forma de cada superfície está relacionada aos aspectos especiais de sua equação. Com o propósito de visualizar e esboçar uma superfície, é muitas vezes útil examinar suas *seções,* ou seja as curvas de interseção da superfície com planos

$$x = k, \qquad y = k, \qquad z = k$$

paralelos aos planos coordenados. Salientamos explicitamente que toda seção de segundo grau de qualquer superfície quádrica é uma seção cônica. Seções que se constituem em curvas fechadas são usualmente as mais fáceis de se esboçar; por essa razão procuraremos primeiro as seções elípticas e as esboçaremos. Considerações de simetria também devem ser levadas em conta.

Nos exemplos seguintes, os números a, b e c são todos positivos. Nossos comentários sobre a superfície considerada em cada exemplo terão um caráter mais informal que exaustivo.

Exemplo 1 O elipsóide

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{2}$$

é mostrado na Fig. 18.32.

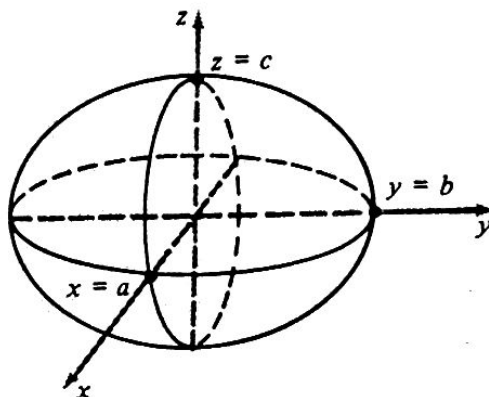



Figura 18.32 Elipsóide.

Como ocorrem na equação apenas as potências pares de x, y e z essa superfície é simétrica em relação a cada um dos planos coordenados. As seções dos planos xz e yz são as elipses

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \qquad \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

com um eixo vertical comum. A seção num plano horizontal $z = k$ é a elipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{k^2}{c^2},$$

que diminui à medida que k varia de 0 a c ou a $-c$. Os números a, b e c são os pontos de interseção dos eixos coordenados com o elipsóide e chamam-se *semi-eixos.* Se dois dos semi-eixos são iguais, o elipsóide chama-se *esferóide:* um esferóide *oblato,* se for achatado como um "disco-voador", ou um esferóide *prolato,* se for alongado como uma bola de futebol americano. Naturalmente, no caso em que $a = b = c$, o elipsóide será uma esfera.

Exemplo 2 O gráfico da equação

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{3}$$

é um *hiperbolóide de uma folha* (Fig. 18.33).

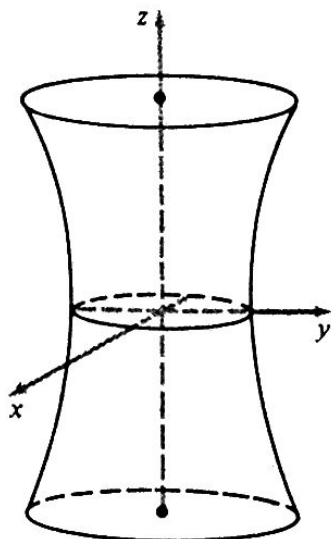



Figura 18.33 Hiperbolóide de uma folha.

Escrevendo a equação na forma

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}+1, \tag{4}$$

verificamos que todas as suas seções horizontais por planos $z = k$ são elipses e que essas elipses ficam maiores à medida que os planos horizontais movem-se para cima ou para baixo do plano xy. A menor elipse é a seção com o próprio plano xy. A seção da superfície no plano yz é a hipérbole

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

É essa hipérbole que une as seções elípticas horizontais numa superfície lisa. A frase "de uma folha" é usada porque essa superfície é formada por apenas uma parte, em contraste com o hiperbolóide a ser discutido no próximo exemplo, que é formado por duas partes. Observe que a equação (3) difere de (2) apenas pelo sinal do terceiro termo à esquerda; obtemos o mesmo tipo de superfície independentemente de qual desses termos tem o sinal trocado.

Exemplo 3 O *hiperbolóide de duas folhas*

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{5}$$

é mostrado na Fig. 18.34.

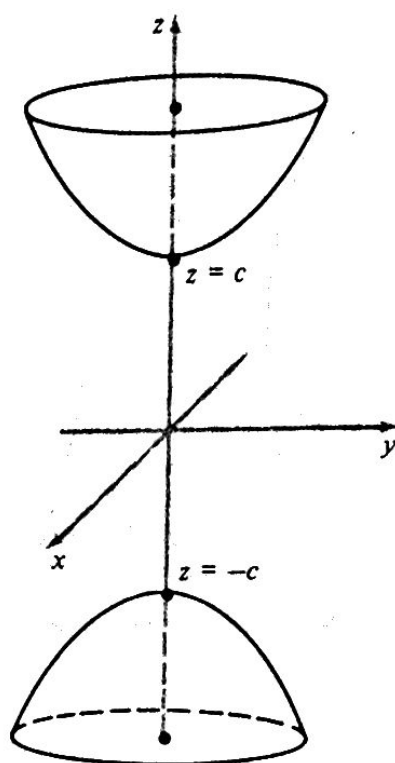



Figura 18.34 Hiperbolóide de duas folhas.

Essa equação difere de (2) pelos sinais dos dois primeiros termos da esquerda. (A razão dessa escolha é explicada abaixo.) Escrevendo a equação na forma

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}-1, \tag{6}$$

veremos que todas as suas seções horizontais por planos $z = k$ com $k \geqslant c$ ou $k \leqslant -c$ são elipses ou pontos isolados, enquanto as seções com planos $z = k$ com $|k| < c$ são vazias. A seção com o plano yz é a hipérbole

$$\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

e é essa hipérbole que une as seções horizontais numa superfície lisa – de "duas folhas". Observe que (6) é idêntica a (4), exceto pela presença do sinal de menos à direita, e é esse sinal que faz toda a diferença entre as superfícies nesses dois exemplos, pois o segundo membro de (4) é positivo para todos os z, enquanto o segundo membro de (6) é negativo para $|z| < c$.

Exemplo 4 O gráfico da equação

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2} \tag{7}$$

é um *cone elíptico* (Fig. 18.35).

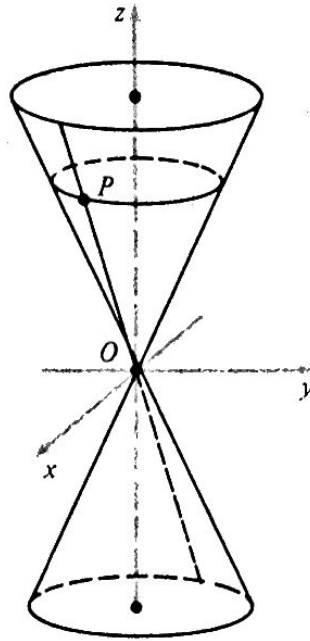



Figura 18.35 Cone elíptico.

Essa superfície seciona o plano xz e o plano yz nos pares de retas concorrentes

$$z = \pm \frac{c}{a} x \qquad \text{e} \qquad z = \pm \frac{c}{b} y,$$

respectivamente. Ela intercepta o plano xy apenas na origem. Todas as seções horizontais com os planos $z = k$ com $k \neq 0$ são elipses. (No Capítulo 15 era conveniente distinguir circunferências de elipses; aqui incluímos circunferências entre as elipses.) É claro pela forma de (7) que, se (x, y, z) for um ponto de superfície, (tx, ty, tz) também estará sobre a superfície, qualquer que seja o número t. Assim a superfície pode ser pensada como se gerada por uma reta móvel que passa pela origem O e por um ponto variável P sobre qualquer seção elíptica horizontal. No caso de $a = b$, o cone será o familiar cone circular reto.

Exemplo 5 O *parabolóide elíptico*

$$z = ax^2 + by^2$$

é mostrado na Fig. 18.36.

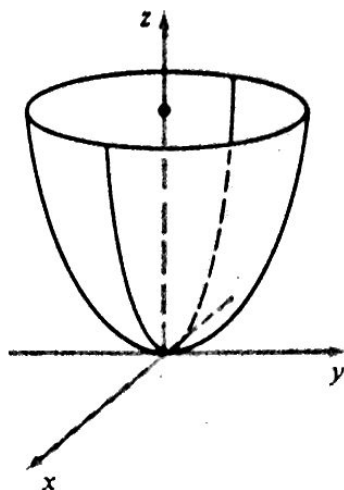



Figura 18.36 Parabolóide elíptico.

As seções verticais dessa superfície no plano xz e no plano yz são as parábolas.

$$z = ax^2 \qquad \text{e} \qquad z = by^2,$$

respectivamente. A seção horizontal no plano $z = k$ será uma elipse se $k > 0$, apenas a origem se $k = 0$ e vazio se $k < 0$.

Exemplo 6 Na Fig. 18.37, esboçamos o *parabolóide hiperbólico*

$$z = by^2 - ax^2.$$

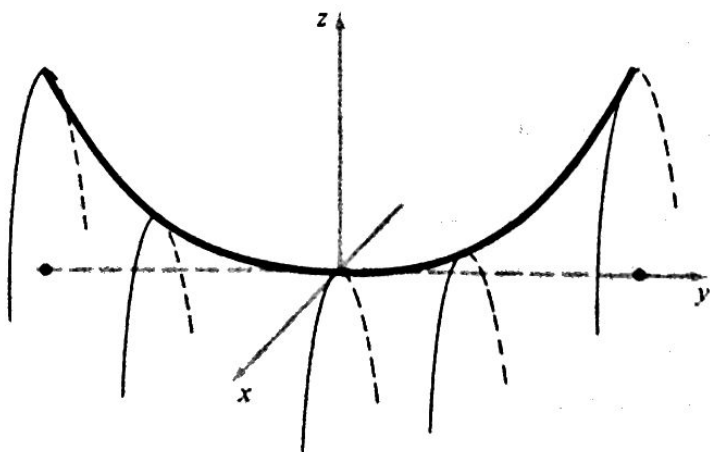



Figura 18.37 Parabolóide hiperbólico.

A seção no plano yz é a parábola $z = by^2$ que se abre para cima, e a seção no plano xz é a parábola $z = -ax^2$ que se abre para baixo. Em todos os planos $y = k$ paralelos ao plano xz, as seções são parábolas côncavas para baixo que são idênticas entre si e podem ser encaradas como penduradas pelos vértices em vários pontos ao longo da parábola $z = by^2$; isto é enfatizado pela maneira como desenhamos a figura. Perto da origem, a superfície sobe no sentido dos y positivos e desce no sentido dos x positivos, e assim tem a forma geral de uma sela. Por esta razão a superfície é, com

freqüência, chamada de *sela*, tendo a origem o nome de *ponto de sela*. É claro que, no plano horizontal $z = k$, a seção será uma hipérbole com eixo principal na direção do eixo y se $k > 0$, e uma hipérbole com eixo principal na direção do eixo x se $k < 0$; no caso em que $k = 0$, a seção será um par de retas concorrentes na origem.

Problemas

Esboce e identifique as superfícies dos Problemas 1 a 14.

1. $2x^2 + y^2 + 4z^2 = 16$.
2. $z^2 = 4(x^2 + y^2)$.
3. $z = 4(x^2 + y^2)$.
4. $x^2 + z^2 - 4y^2 = 4$.
5. $y^2 - 4x^2 - 9z^2 = 36$.
6. $z = 4 - 2x^2 - 3y^2$.
7. $z = x^2 - 2y^2$.
8. $x^2 = y^2 + 4z^2$.
9. $x^2 - 4y^2 - z^2 = 4$.
10. $x^2 + 9y^2 - 4z^2 = 36$.
11. $36x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 36$.
12. $y = 1 - x^2 - 2y^2$.
13. $z + 4x^2 = y^2$.
14. $x^2 + y^2 - z^2 - 2x - 4y + 1 = 0$.

15. Determine os pontos em que a reta

$$\frac{x-6}{3} = \frac{y+2}{-6} = \frac{z-2}{4}$$

corta o elipsóide

$$\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{36} + \frac{z^2}{9} = 1.$$

16. Mostre que o plano $2x - 2z - y = 10$ intercepta o parabolóide

$$2z = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}$$

num único ponto e determine esse ponto.

17. (a) Considere o elipsóide

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

e determine a área $A(k)$ da seção elíptica no plano horizontal $z = k$. Sugestão: recorde que πAB é a área da elipse com semi-eixos A e B.

(b) Use a fórmula encontrada em (a) para calcular o volume do elipsóide por integração.

18. Considere o parabolóide elíptico $z = ax^2 + by^2$ e use integração para mostrar que o volume do segmento cortado pelo plano $z = k$ $(k > 0)$ é a metade da área de sua base vezes sua altura.

19. Mostre que a projeção sobre o plano xy da curva de interseção das superfícies $z = 1 - x^2$ e $z = x^2 + y^2$ é uma elipse. Sugestão: o que significa geometricamente eliminar z dessas equações?

20. Mostre que a projeção sobre o plano yz da curva de interseção do plano $x = 2y$ com o parabolóide $x = y^2 + z^2$ é uma circunferência.

21. Mostre que a projeção sobre o plano xy da interseção dos parabolóides $z = 3x^2 + 5y^2$ e $z = 8 - 5x^2 - 3y^2$ é uma circunferência.

22. As duas equações

$$x^2 + 3y^2 - z^2 + 3x = 0$$
$$2x^2 + 6y^2 - 2z^2 - 4y = 3$$

quando consideradas formando um sistema simultâneo, definem a curva do espaço em que as superfícies se interceptam. Mostre que essa curva está num plano. Sugestão: projete sobre um plano coordenado.

23. Use os métodos da Seção 15.6 para descobrir a natureza do gráfico de $z = xy$. Esboce a superfície.

Uma *superfície regrada* é uma superfície S com a propriedade de que, para cada ponto P de S, existe uma reta que passa por P e que está inteiramente em S. Todos os cones e cilindros são superfícies regradas, enquanto elipsóides, hiperbolóides de duas folhas e parabolóides elípticos, obviamente, não o são. É surpreendente que todos os hiperbolóides de uma folha e todos os parabolóides hiperbólicos sejam superfícies regradas.

24. Mostre que o hiperbolóide de uma folha $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ é uma superfície regrada usando o seguinte esquema:

(a) A seção da superfície no plano xy é a circunferência C cuja equação é $x^2 + y^2 = 1$. Pegue $P_0 = (x_0, y_0, 0)$ um ponto em C e mostre que a reta L, cujas equações são

$$x = x_0 + y_0 t, \qquad y = y_0 - x_0 t, \qquad z = t,$$

passa por P_0 e está inteiramente contida na superfície.

(b) Sendo $P = (x, y, z)$ um ponto arbitrário da superfície, mostre que a reta L da parte (a) passa por P tomando-se um conveniente ponto $P_0 = (x_0, y_0, 0)$ em C. Assim, quando P_0 se move em C, as retas L cobrem a superfície *.

25. Indique que o parabolóide hiperbólico $z = y^2 - x^2$ é uma superfície regrada mostrando que, se $P_0 = (x_0, y_0, y_0^2)$ for um ponto qualquer da superfície, então a reta

$$x = x_0 + t, \qquad y = y_0 + t,$$
$$z = (y_0^2 - x_0^2) + 2(y_0 - x_0)t$$

passa por P_0 e está inteiramente contida na superfície* * .

As duas famílias de retas que constituem as superfícies duplamente regradas discutidas nos Problemas 24 e 25 são mostradas na Fig. 18.38.

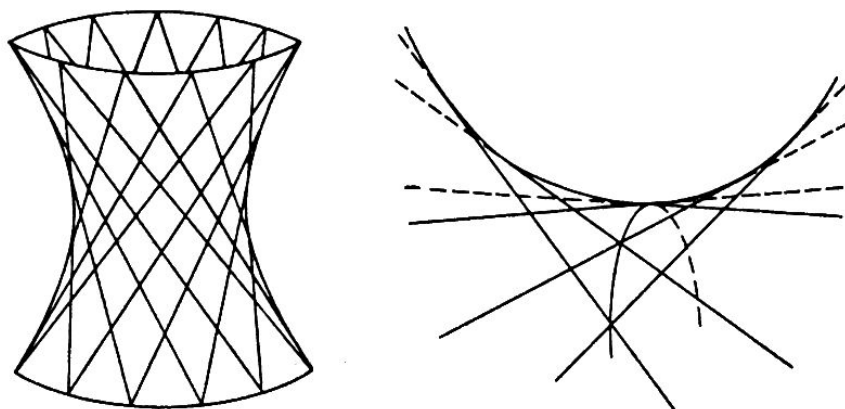



Figura 18.38 Superfícies duplamente regradas.

* A família de retas $x = x_0 + y_0 t$, $y = y_0 - x_0 t$, $z = -t$ também cobre a superfície e por essa razão o hiperbolóide de uma folha é chamado, muitas vezes, de *superfície duplamente regrada*.

** A família de retas $x = x_0 + t$, $y = y_0 - t$, $z = (y_0^2 - x_0^2) - 2(y_0 + x_0)t$ cobre também a superfície, logo o parabolóide hiperbólico também é uma superfície duplamente regrada.

18.7 COORDENADAS CILÍNDRICAS E ESFÉRICAS

Na Geometria Analítica Plana utilizamos um sistema de coordenadas retangulares para alguns tipos de problemas e um sistema de cordenadas polares para outros. Vimos que há muitas situações em que um sistema é mais conveniente que outro. O mesmo é verdadeiro para o estudo da Geometria e do Cálculo no espaço. Descreveremos agora dois outros sistemas de coordenadas tridimensionais distintos do familiar sistema de coordenadas retangulares que serão, muitas vezes, úteis no trato de tipos especiais de problemas.

Consideremos um ponto P do espaço cujas coordenadas retangulares são (x, y, z). As *coordenadas cilíndricas* desse ponto são obtidas substituindo x e y pelas correspondentes coordenadas polares r e θ e mantendo-se z. Ou seja, colocamos um eixo z na origem de um sistema de coordenadas polares e descrevemos a localização de um ponto do espaço por três coordenadas (r, θ, z). Iremos supor que esse sistema de coordenadas cilíndricas é superposto a um sistema de coordenadas retangulares (Fig. 18.39); assim as equações de transformação entre os dois conjuntos de coordenadas de um dado ponto serão

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r \operatorname{sen}\theta, \qquad z = z,$$

e

$$r^2 = x^2 + y^2, \qquad \operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x}, \qquad z = z.$$

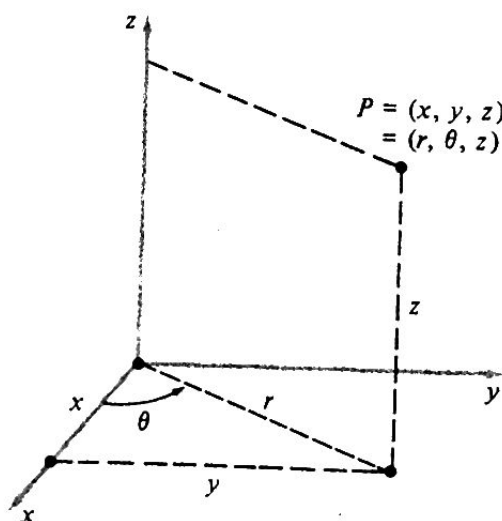



Figura 18.39 Coordenadas cilíndricas.

É fácil ver que o gráfico da equação r = constante é um cilindro circular reto cujo eixo é o eixo z; esta é a razão do termo "coordenadas cilíndricas". Analogamente, o gráfico de θ = constante é um plano que contém o eixo z, e o gráfico de z = constante é um plano horizontal.

Exemplo 1 Determine as coordenadas cilíndricas dos pontos P_1 e P_2, cujas coordenadas retangulares são $(3, 3, 7)$ e $(2\sqrt{3}, 2, 5)$, respectivamente.

Solução Para P_1 temos $r = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$, $\text{tg}\,\theta = 1, z = 7$; logo, um conjunto de coordenadas cilíndricas é $(3\sqrt{2}, \pi/4, 7)$. Para P_2 temos $r = \sqrt{12+4} = 4$, $\text{tg}\,\theta = 1/\sqrt{3} = \frac{1}{3}\sqrt{3}, z = 5$; logo, um conjunto de coordenadas cilíndricas é $(4, \pi/6, 6)$.

Exemplo 2 Descreva as superfícies

(a) $r + z = 3$ e

(b) $r(2\cos\theta + 5\,\text{sen}\,\theta) + 3z = 0.$

Solução (a) A interseção da superfície $r + z = 3$ com o plano yz é a reta $y + z = 3$, pois $r = y$ no plano yz. Mas θ está ausente da equação dada; logo, a superfície desejada é simétrica em relação ao eixo z e é portanto o cone gerado pela rotação da reta $y + z = 3$ ao redor do eixo z. De uma maneira mais geral, segue-se de nossa discussão sobre superfícies de revolução da Seção 18.5, que, se a curva $f(y, z) = 0$ for girada ao redor do eixo z, a equação da superfície resultante em coordenadas cilíndricas será $f(r, z) = 0$.

(b) Como $r\cos\theta = x$ e $r\,\text{sen}\,\theta = y$, a equação dada é transformada em $2x + 5y + 3z = 0$, que é o plano que passa pela origem com vetor normal $\mathbf{N} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$.

Exemplo 3 Determine uma equação em coordenadas cilíndricas para (a) o esferóide $x^2 + y^2 + 2z^2 = 4$ e (b) o parabolóide hiperbólico $z = x^2 - y^2$.

Solução A equação (a) se transforma imediatamente em $r^2 + 2z^2 = 4$. Para (b), temos

$$\begin{aligned} z &= x^2 - y^2 \\ &= r^2\cos^2\theta - r^2\text{sen}^2\,\theta = r^2(\cos^2\theta - \text{sen}^2\,\theta) \\ &= r^2\cos 2\theta, \end{aligned}$$

logo, $z = r^2\cos 2\,\theta$ é a equação desejada.

Em Física, as coordenadas cilíndricas são particularmente convenientes no estudo de situações em que há simetria axial, isto é, simetria com relação a uma reta do espaço. Como exemplo mencionamos duas classes importantes de problemas: os que tratam do fluxo de calor em tubos sólidos cilíndricos e os que são relacionados com os movimentos de uma membrana circular vibrante – por exemplo, o couro de um tambor.

Consideremos novamente um ponto P no espaço cujas coordenadas retangulares são (x, y, z). As *coordenadas esféricas* de P são os números (ρ, ϕ, θ) (Fig. 18.40).

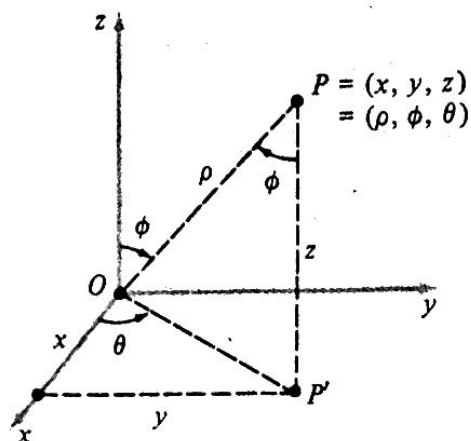



Figura 18.40 Coordenadas esféricas.

Aqui ρ (letra grega *rô*) é a distância da origem O a P, logo $\rho \geqslant 0$. O ângulo ϕ é o ângulo do eixo z com a semi-reta OP e subentende-se que ϕ está restrito ao intervalo $0 \leqslant \phi \leqslant \pi$. Finalmente, o ângulo θ tem exatamente o mesmo significado já estabelecido nas coordenadas cilíndricas; ou seja, θ é o ângulo do semi-eixo positivo dos x com a semi-reta OP', onde P' é a projeção de P sobre o plano xy. É claro (veja a figura), que $OP' = \rho$ sen ϕ e como $x = OP' \cos\theta$ e $y = OP'$ sen θ temos as equações de transformação

$$x = \rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta, \qquad y = \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta, \qquad z = \rho\cos\phi,$$

e

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2, \qquad \operatorname{tg}\phi = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}, \qquad \operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x}.$$

O termo "coordenadas esféricas" é utilizado porque o gráfico da equação ρ = constante é uma esfera com centro na origem. O gráfico de ϕ = constante α é a folha superior de um cone com vértice na origem e ângulo de vértice α, se $0 < \alpha < \pi/2$. O gráfico de θ = constante é um plano que contém o eixo z, exatamente como em coordenadas cilíndricas.

Exemplo 4 Determine uma equação em coordenadas esféricas da esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 2az = 0$, onde $a > 0$.

Solução Como $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$ e $z = \rho\cos\phi$, a equação dada pode ser escrita

$$\rho^2 - 2a\rho\cos\phi = 0 \qquad \text{ou} \qquad \rho(\rho - 2a\cos\phi) = 0.$$

O gráfico dessa equação é o gráfico de $\rho = 0$ junto com o gráfico de $\rho - 2a\cos\phi = 0$. Mas o gráfico de $\rho = 0$ (ou seja, a origem) é parte do gráfico de $\rho = 2a\cos\phi$; logo, a equação desejada é

$$\rho = 2a\cos\phi.$$

Esta é a esfera de raio a tangente ao plano xy na origem, (Fig. 18.41).

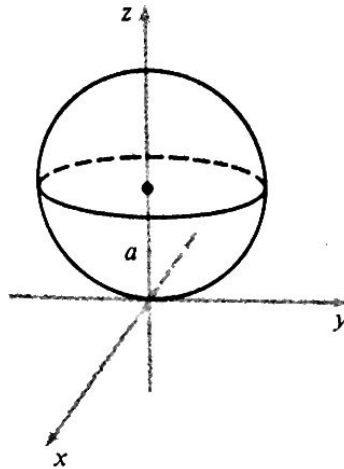



Figura 18.41

Exemplo 5 Qual o gráfico da equação em coordenadas esféricas $\rho = 2a$ sen ϕ?

Solução A variável θ está ausente dessa equação; logo, temos uma superfície de revolução em torno do eixo z. No plano yz a equação $\rho = 2a$ sen ϕ representa uma circunferência de raio a (Fig. 18.42).

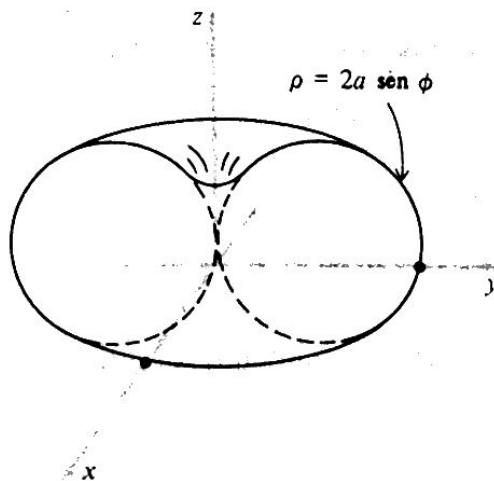



Figura 18.42

Como a superfície que estamos procurando é obtida girando-se essa circunferência em torno do eixo z, o gráfico é de um toro com buraco de raio zero.

Há muitas aplicações físicas das coordenadas esféricas, desde problemas da condução do calor a problemas da teoria da gravitação. Discutiremos algumas dessas aplicações no Capítulo 20.

Problemas

1. Determine um conjunto de coordenadas cilíndricas para o ponto cujas coordenadas cartesianas são

   (a) $(2, 2, -1)$; (b) $(1, -\sqrt{3}, 7)$;
   (c) $(3, \sqrt{3}, 2)$; (d) $(3, 6, 5)$.

2. Determine as coordenadas cartesianas do ponto com coordenadas cilíndricas:

   (a) $(\sqrt{2}, \pi/4, -2)$; (b) $(\sqrt{3}, 5\pi/6, 11)$;
   (c) $(1, 1, 1)$; (d) $(2, \pi/3, \pi)$.

3. Determine um conjunto de coordenadas esféricas para o ponto cujas coordenadas retangulares são

   (a) $(1, 1, \sqrt{6})$; (b) $(1, -1, -\sqrt{6})$;
   (c) $(1, 1, \sqrt{2})$; (d) $(0, -1, \sqrt{3})$.

4. Determine as coordenadas retangulares do ponto com coordenadas esféricas

   (a) $(3, \pi/2, \pi/2)$; (b) $(4, \pi/2, \pi)$;
   (c) $(4, \pi/3, \pi/3)$; (d) $(4, 2\pi/3, \pi/3)$.

Nos Problemas de 5 a 11 determine uma equação, em coordenadas cilíndricas, para a superfície cuja equação, em coordenadas retangulares, é dada. Esboce a superfície.

5. $x^2 + y^2 + z^2 = 16$.
6. $x^2 + y^2 = 6z$.
7. $x^2 + y^2 = z^2$.
8. $x^2 - y^2 = 3$.
9. $x^2 + y^2 - 2y = 0$.
10. $x^2 + y^2 - 4x = 0$.
11. $x^2 + y^2 = 9$.

12. Determine uma equação, em coordenadas cilíndricas, da superfície cuja equação cartesiana é $z^2 (x^2 - y^2) = 4xy$.

Nos Problemas de 13 a 18 determine uma equação, em coordenadas esféricas, de uma superfície cuja equação cartesiana é dada. Esboce a superfície.

13. $x^2 + y^2 + z^2 = 16$.
14. $x^2 + y^2 + z^2 + 4z = 0$.
15. $x^2 + y^2 + z^2 - 6z = 0$.
16. $x^2 + y^2 = 9$.
17. $z = 4 - x^2 - y^2$.
18. $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = (x^2 + y^2)^2$.

CAPÍTULO

19

DERIVADAS PARCIAIS

19.1 FUNÇÕES DE MUITAS VARIÁVEIS

Muitas das funções que aparecem na Matemática e em suas aplicações envolvem duas ou mais variáveis independentes. Já encontramos funções dessa espécie em nosso estudo da geometria analítica espacial. Assim, a equação $z = x^2 - y^2$ é a equação de uma certa superfície de sela, mas define também z como função das duas variáveis x e y, e a superfície pode ser encarada como o gráfico dessa função.

Usualmente denotamos uma função qualquer de duas variáveis x e y escrevendo $z = f(x, y)$, e podemos visualizar tal função esboçando – ou imaginando – seu gráfico no espaço xyz, (Fig. 19.1).

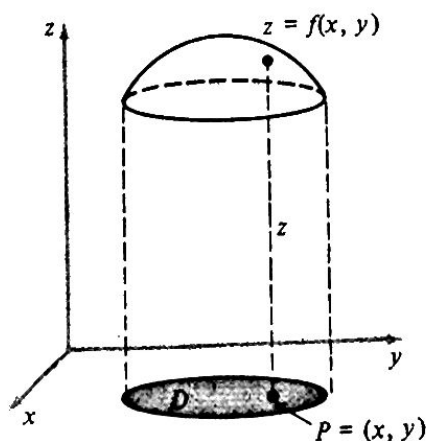



Figura 19.1 Uma superfície no espaço.

Nessa figura, $P = (x, y)$ é um ponto "adequado" do plano $x\,y$ – isto é, um ponto do domínio D da função – e z é a distância orientada para cima ou para baixo ao correspondente ponto sobre a superfície. Essa superfície foi esboçada como estando "acima" do domínio D, embora parte dela possa realmente estar abaixo do plano xy.

Por uma extensão óbvia da notação aqui usada, $w = f(x, y, z, t, u, v)$ é uma função das seis variáveis entre parênteses. Por exemplo, se a temperatura T num ponto P dentro de uma esfera sólida de ferro depende das três coordenadas cartesianas x, y e z de P, então escrevemos $T = f(x, y, z)$; se além disso consideramos a possibilidade de que a temperatura num dado ponto varia com o tempo t, então T é uma função das quatro variáveis, $T = f(x, y, z, t)$.

Neste capítulo veremos que os principais temas do cálculo diferencial de uma variável —derivadas, taxas de variação, cálculos com a regra da cadeia, problemas de máximo e mínimo e equações diferenciais – podem ser estendidos para funções de muitas variáveis. Entretanto, os estudantes devem estar preparados para enfrentar diferenças surpreendentes entre o cálculo de uma variável e o cálculo de muitas variáveis. Como a maioria dessas diferenças já surge em funções de apenas duas variáveis independentes, nos deteremos mais em tais funções e nos referiremos mais superficialmente a funções de três ou mais variáveis. Dedicaremos o próximo capítulo ao cálculo integral de funções de muitas variáveis.

Domínio

Exatamente como vimos anteriormente, o *domínio* (ou *domínio de definição*) de uma função $z = f(x, y)$ é o conjunto de todos os pontos $P = (x, y)$ do plano xy para os quais existe um correspondente z. Para as funções definidas no espaço xyz, no espaço $xyzt$ etc., a definição é análoga. A maioria das funções de que tratamos é definida por fórmulas e, nesses casos, o domínio é entendido como sendo o maior conjunto de pontos para os quais a fórmula faz sentido. Por exemplo, o domínio de

$$z = f(x, y) = \frac{1}{x - y}$$

é entendido como sendo o conjunto de todos os pontos (x, y) com $x \neq y$, isto é, todos os pontos do plano xy que não estão na reta $y = x$. O domínio de

$$z = g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$$

é o conjunto de todos os pontos (x, y) para os quais $9 - x^2 - y^2 \geqslant 0$, ou seja, o disco circular $x^2 + y^2 \leqslant 9$ de raio 3 com centro na origem. E o domínio de

$$w = h(x, y, z) = \frac{2x + 3y + 4z}{x^2 + y^2 + z^2}$$

é o conjunto de todos os pontos (x, y, z) para os quais $x^2 + y^2 + z^2 \neq 0$, isto é, todos os pontos do espaço xyz, exceto a origem.

Ao discutirmos uma função genérica $z = f(x, y)$, iremos com freqüência requerer que essa função esteja definida num certo ponto P_0 e em toda uma *vizinhança* desse ponto. Isto significa que o domínio de $f(x, y)$ deve incluir não só P_0 mas todos os pontos "suficientemente próximos" de P_0; ou seja, todos os pontos de algum pequeno disco circular centrado em P_0. Observações semelhantes se aplicam a funções definidas no espaço xyz etc.

Continuidade

Há diversos momentos neste capítulo em que será necessário mencionar a continuidade a fim de dispormos as coisas corretamente. Esse conceito estende-se de modo natural do caso de uma variável para o de funções $f(x, y)$.

Uma função $f(x, y)$ diz-se *contínua* num ponto (x_0, y_0) de seu domínio se seu valor $f(x, y)$ pode ser tornado tão próximo quanto quisermos de $f(x_0, y_0)$, isto é, se $|f(x, y) - f(x_0, y_0)|$ pode ser tornado tão pequeno quanto quisermos tornando ambos, $|x - x_0|$ e $|y - y_0|$, suficientemente pequenos. Por exemplo, $f(x, y) = xy$ é contínua em qualquer ponto (x_0, y_0), pois

$$\begin{aligned} |xy - x_0y_0| &= |xy - xy_0 + xy_0 - x_0y_0| \\ &= |x(y - y_0) + y_0(x - x_0)| \\ &\leq |x|\,|y - y_0| + |y_0|\,|x - x_0|, \end{aligned}$$

e é fácil notar que a quantidade escrita na última linha pode ser feita tão pequena quanto quisermos, bastando que ambos, $|x - x_0|$ e $|y - y_0|$, sejam suficientemente pequenos.

Por outro lado, a função definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0), \end{cases} \tag{1}$$

não é contínua na origem $(0, 0)$. Ao fazermos (x, y) tender a $(0, 0)$, assumindo valores sobre a reta $y = mx$ com $m \neq 0$, teremos

$$f(x, y) = \frac{mx^2}{x^2 + m^2x^2} = \frac{m}{1 + m^2}, \tag{2}$$

que é uma constante não-nula: esse valor não pode ser tornado tão próximo quanto quisermos de $f(0, 0) = 0$, com (x, y) suficientemente próximo de $(0, 0)$. Para expressar de outra maneira o que já dissemos, (2) mostra que os valores da função tendem a limites diferentes quando o ponto (x, y) se aproxima da origem por caminhos diferentes, o que é incompatível com o fato de a função ser contínua na origem.

Não prosseguiremos os detalhes desse tópico, além de uma última afirmação bastante simples de que qualquer combinação finita de funções elementares é contínua em todos os pontos de seu domínio. A continuidade é definida essencialmente da mesma maneira para funções de três ou mais variáveis.

Curvas de Nível

Muitas funções simples $z = f(x, y)$ têm gráficos que são demasiado difíceis de se esboçar. Felizmente, há um modo razoavelmente simples de se compreender e expressar a natureza geométrica de tais funções.

A idéia básica provém da arte do cartógrafo. Ao mapear um terreno com vales, morros e montanhas, é prática comum desenhar curvas que unem pontos de mesma elevação. Quando essas curvas são colocadas num mapa e designadas apropriadamente, o mapa topográfico resultante permite a um usuário experimentado obter um claro panorama mental dos contornos do terreno no espaço tridimensional a partir da representação bidimensional.

Podemos realizar a mesma coisa para retratar uma função $z = f(x, y)$ de duas variáveis. Para qualquer valor c assumido por $f(x, y)$, podemos esboçar a curva

$$f(x, y) = c$$

no plano xy (Fig. 19.2).

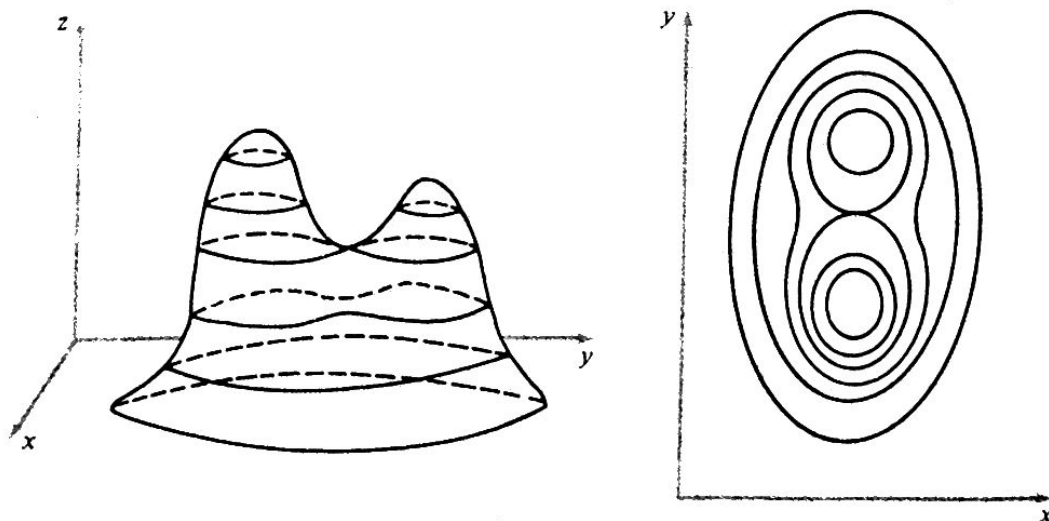



Figura 19.2 Curvas de nível.

Tal curva chama-se *curva de nível*; ela está no domínio da função e em seus pontos $z = f(x, y)$ tem o valor constante c.

Uma coleção de curvas de nível chama-se *mapa de contorno*; ele pode dar uma boa idéia da forma do gráfico e é um instrumento excelente para a obtenção de um esboço tridimensional. Por exemplo, o gráfico de $z = xy$ é difícil – embora não impossível – de se desenhar. Entretanto, uma idéia razoavelmente clara da forma desse gráfico é dada pelo mapa de contorno mostrado na Fig. 19.3, que é fácil de se desenhar.

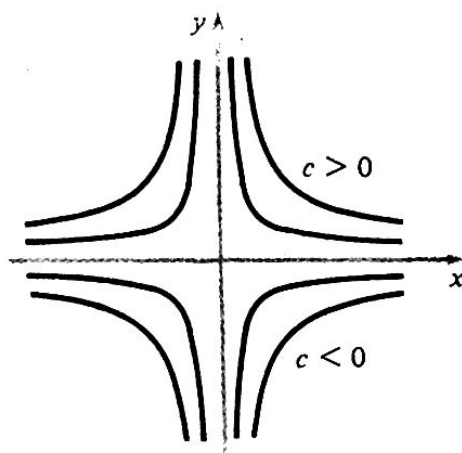



Figura 19.3

Cada curva de nível $xy = c$ é uma hipérbole no 1º e 3º quadrantes se $c > 0$; uma hipérbole no 2º e 4º quadrantes se $c < 0$; os dois eixos juntos se $c = 0$. Nós nos dirigimos para cima, na superfície quando deixamos a origem indo para o 1º ou 3º quadrante; e nos dirigimos para baixo quando deixamos a origem indo para o 2º ou 4º quadrante. Dessa maneira vemos que a origem é ponto de sela da superfície. Os estudantes devem tentar usar essa figura para visualizar qual forma a superfície aparenta ter no espaço tridimensional, olhando de cima.

Superfícies de Nível

Desenhar gráficos de funções de duas variáveis é muitas vezes difícil, mas desenhar gráficos de funções de três variáveis é impossível. Precisaríamos de um espaço visível de quatro dimensões que contivesse tal gráfico, e nenhum espaço como esse é disponível.

Entretanto, o conceito de curvas de nível sugere um modo de visualizar o comportamento de uma função $w = f(x, y, z)$ de três variáveis: trata-se de examinar suas *superfícies de nível*. Estas são as superfícies

$$f(x, y, z) = c \tag{3}$$

para valores da constante c. Naturalmente, as superfícies de nível podem ser difíceis de se desenhar, mas um conhecimento do que elas são pode nos ajudar a formar uma idéia útil e intuitiva da natureza da função. Na Fig. 19.4 apresentamos uma visão esquemática de três superfícies de nível adjacentes, na forma (3), para três valores da constante c, onde $c_1 < c_2 < c_3$.

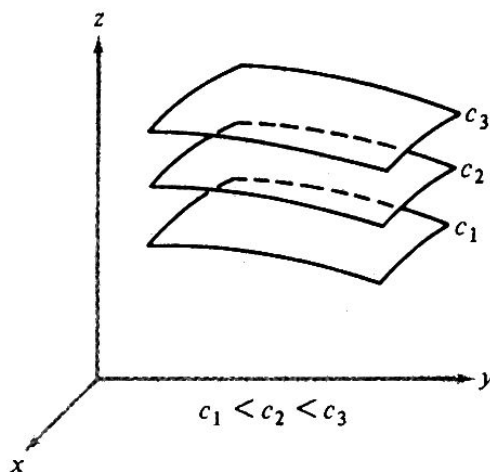



Figura 19.4 Superfícies de nível.

Quando um ponto $P = (x, y, z)$ move-se ao longo da superfície mais baixa, o valor de $w = f(x, y, z)$ é constantemente igual a c_1, mas quando esse ponto salta para a superfície acima dela, o valor da função cresce para c_2, e assim por diante.

Consideramos dois exemplos simples. No caso da função $w = x + 2y + 3z$, as superfícies de nível, é fácil ver, são os planos

$$x + 2y + 3z = c$$

com vetor normal $\mathbf{N} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$; para $w = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, as superfícies de nível são as esferas concêntricas

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2.$$

Nas aplicações, tomando-se a função $w = f(x, y, z)$ como indicadora da temperatura no ponto $P = (x, y, z)$, as superfícies de nível são chamadas *superfícies isotérmicas;* caso w represente o *potencial,* elas se chamam *superfícies eqüipotenciais.*

Dimensões Superiores

Superfícies de nível têm certo valor, mas num determinado sentido elas evitam abordar a questão real. O que fazer para tentar obter uma compreensão intuitiva do comportamento de funções de três ou mais variáveis?

Em resumo, o que fazemos é trabalhar por analogia com os casos de uma e duas variáveis. Por exemplo, nada há que nos impeça de considerar o conjunto de todas as quádruplas de números tais como (2, − 3, 1, 4) como formando um espaço de quatro dimensões perfeitamente legítimo, com origem (0, 0, 0, 0), quatro eixos de coordenadas e um conceito satisfatório de distância de um ponto arbitrário (x, y, z, w) à origem,

$$d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + w^2}.$$

Podemos agora considerar o gráfico de uma função

$$w = f(x, y, z)$$

como formando uma "superfície" tridimensional nesse espaço de dimensão 4, com o domínio D da função estando no "plano de coordenadas" tridimensional consistindo em todos os pontos da forma $(x, y, z, 0)$.

De maneira análoga, sendo n um inteiro positivo qualquer, podemos pensar no gráfico de uma função de n variáveis como formando uma "superfície" n-dimensional no espaço $(n + 1)$-dimensional. É verdade que para $n \geqslant 3$ não podemos mais desenhar figuras; mas podemos amparar nossa intuição com o uso da linguagem geométrica: podemos pensar geometricamente, embora de um modo mais vago. Entretanto, quando nos movemos para além da espécie de matemática que podemos estudar e compreender com desenhos de figuras, é necessário darmos maior atenção aos aspectos algébricos e analíticos do que a que demos até agora, a fim de evitar sermos enganados por palavras e analogias. Apesar de tudo, as palavras, as analogias e a intuição geométrica não deixam de ser indispensáveis, pois sugerem aspectos vantajosos de serem pensados e nos impedem de nos sentirmos totalmente perdidos por meio de abstrações.

Problemas

Nos Problemas de 1 a 12, determine o domínio da função dada.

1. $f(x, y) = \dfrac{xy}{y - 2x}$.
2. $f(x, y) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$.
3. $f(x, y) = \sqrt{xy}$.
4. $f(x, y) = \dfrac{1}{(e^x + e^y)^2}$.
5. $f(x, y) = \ln (y - 3x)$.
6. $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
7. $f(x, y, z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.
8. $f(x, y, z) = \dfrac{z}{4x^2 - y^2}$.
9. $f(x, y, z) = \sqrt{16 - x^2 - y^2 - z^2}$.
10. $f(x, y, z) = \dfrac{1}{xyz}$.
11. $f(x, y, z) = xy \ln z + 3 \text{ tg } \frac{1}{2}z$.
12. $f(x, y, z) = \ln (x^2 + y^2 + z^2 - 1)$.

13. Mostre que a função definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

é contínua na origem. Sugestão: utilize $x = r \cos \theta$ e $y = r \text{ sen } \theta$ para transformar em coordenadas polares.

Nos Problemas 14 a 24, represente a função dada desenhando algumas curvas de nível e tente visualizar a superfície a partir do mapa de contorno resultante.

14. $z = x^2 + y^2$.
15. $z = x^2 + 2y^2$.
16. $z = x + y$.
17. $z = x - y$.
18. $z = 2x - y$.
19. $z = x^2 - y$.
20. $z = x^3 - y$.
21. $z = y/x$.
22. $z = y/x^2$.
23. $z = x^2 - y^2$.
24. $z = \sqrt{x^2 - y^2}$.

Em cada um dos problemas seguintes, esboce algumas superfícies de nível das funções dadas e utilize-as para estimar a direção geral em que os valores da função crescem.

25. $w = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16}$.

26. $w = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$.

27. $w = 2x - 5y + 3z$.

28. $w = x^2 + y^2 - z^2$.

19.2 DERIVADAS PARCIAIS

Suponha que $y = f(x)$ seja uma função de apenas uma variável. Sabemos que sua derivada, definida por

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

pode ser interpretada como a taxa de varição de y em relação a x. No caso de uma função $z = f(x, y)$ de duas variáveis independentes, necessitaremos de instrumental matemático semelhante para trabalhar com a taxa com que z muda quando ambos x e y variam. A idéia-chave é fazer com que apenas uma variável por vez varie, enquanto a outra é mantida invariável. Para funções de mais de duas variáveis, o procedimento é fazer com que uma delas varie enquanto *todas* as outras são mantidas invariáveis. Especificamente, derivamos em relação a apenas uma variável por vez, encarando todas as outras como constantes; tal procedimento nos dá uma derivada para cada uma das variáveis independentes. Essas derivadas individuais são as peças com as quais construiremos o instrumental mais complicado, que será necessário mais tarde.

Voltando a nossa função $z = f(x, y)$ de duas variáveis, primeiro mantemos y fixo e consideramos x como variável. A taxa de variação em x é denotada por $\partial z/\partial x$ e definida por

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

Esse limite (se existir) chama-se *derivada parcial de z em relação a x* e lê-se "delta z, delta x". A notações mais comumente usadas para essa derivada são

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \quad z_x, \quad \frac{\partial f}{\partial x}, \quad f_x, \quad f_x(x, y),$$

e as usaremos todas em diferentes oportunidades, a fim de ajudar os estudantes a se acostumarem com elas. O símbolo ∂ na notação $\partial z/\partial x$ é utilizado para enfatizar que há outras variáveis independentes e não apenas x.

Analogamente, se x for mantido fixo e y variar, então a *derivada parcial de z em relação a y* é definida por

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y},$$

e as notações-padrão nesse caso são

$$\frac{\partial z}{\partial y}, \qquad z_y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}, \qquad f_y, \qquad f_y(x, y).$$

O cálculo efetivo de derivadas parciais para a maioria das funções é muito fácil: tratamos todas as variáveis independentes exceto uma pela qual estamos interessados, como se fossem constantes e aplicamos as regras familiares.

Exemplo 1 Calcular as derivadas parciais $\partial f/\partial x$ e $\partial f/\partial y$ da função $f(x,y)$ x $x^3 - 3x^2$ ü y^2.

Solução Para determinar a derivada parcial de f em relação a x, consideramos y constante e derivamos da maneira usual,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 6xy^3.$$

Quando encaramos x como constante e derivamos em relação a y, obtemos

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -9x^2y^2 + 2y.$$

As notações $f_x(x, y)$ e $f_y(x, y)$ são úteis para indicar os valores das derivadas parciais em pontos específicos.

Exemplo 2 (a) Se $f(x, y) + xy^2 + x^3$, então

$$f_x(x, y) = y^2 + 3x^2, \qquad f_y(x, y) = 2xy,$$
$$f_x(2, 1) = 13, \qquad f_y(2, 1) = 4.$$

Em outra notação, os valores numéricos dados aqui pelos símbolos simples e convenientes $f_x(2, 1)$ e $f_y(2, 1)$ teriam de ser escritos mais grosseiramente como

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(2,1)} \quad \text{e} \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(2,1)}$$

(b) Se $g(x, y) = xe^{xy^2}$, então

$$g_x(x, y) = xy^2e^{xy^2} + e^{xy^2}, \qquad g_y(x,y) = 2x^2ye^{xy^2}.$$

(c) Se $h(x, y) = \operatorname{sen} x^2 \cos 3y$, então

Esses exemplos ilustram a circunstância de que as derivadas parciais de uma função de x e y são elas próprias funções de x e y.

Essas idéias e notações se aplicam também a funções de qualquer número de variáveis.

Exemplo 3 . Se $w = f(x, y, z, u, v) = xy^2 + 2x^3 + xyz + zu + \operatorname{tg} uv$, então

$$\frac{\partial w}{\partial x} = y^2 + 6x^2 + yz, \qquad \frac{\partial w}{\partial y} = 2xy + xz, \qquad \frac{\partial w}{\partial z} = xy + u,$$

$$\frac{\partial w}{\partial u} = z + v \sec^2 uv, \qquad \frac{\partial w}{\partial v} = u \sec^2 uv.$$

No caso de uma variável, sabemos que a derivada dy/dx pode legitimamente ser encarada como fração: o quociente das diferenciais dy e dx. A notação $\partial z/\partial x$ para a derivada parcial $f_x(x, y)$ sugere que poderíamos encarar ∂z e ∂x da mesma maneira. Entretanto, não é possível tratar as derivadas parciais como frações. Daremos um exemplo para enfatizar esse ponto.

Exemplo 4 A *Lei do Gás Ideal* afirma que, para uma dada quantidade de gás, a pressão p, o volume V e a temperatura absoluta T são ligados pela equação $pV = nRT$, onde n é o número de moles de gás na amostra e R é uma constante. Mostre que

$$\frac{\partial p}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial p} = -1.$$

Solução Como

$$p=\frac{nRT}{V}, \qquad V=\frac{nRT}{p}, \qquad T=\frac{pV}{nR},$$

temos

$$\frac{\partial p}{\partial V}=-\frac{nRT}{V^2}, \qquad \frac{\partial V}{\partial T}=\frac{nR}{p}, \qquad \frac{\partial T}{\partial p}=\frac{V}{nR}.$$

Assim,

$$\frac{\partial p}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial p}=\left(-\frac{nRT}{V^2}\right)\frac{nR}{p}\frac{V}{nR}=-\frac{nRT}{pV}=-1.$$

Por ser esse resultado -1 e não $+1$, concluímos que não podemos tratar as derivadas parciais do membro esquerdo como frações.

No caso particular de uma função $z=f(x, y)$ de apenas duas variáveis, as derivadas parciais têm a seguinte interpretação geométrica simples: o gráfico dessa função é uma superfície (Fig. 19.5):

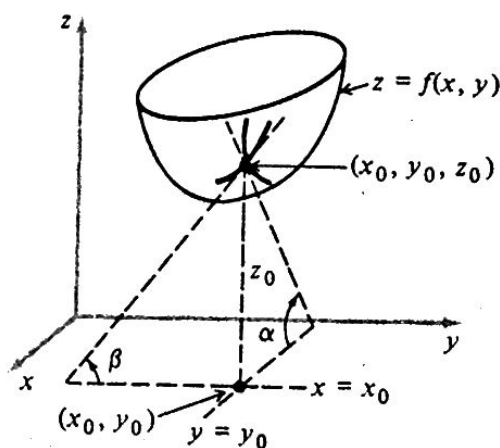



Figura 19.5

Seja (x_0, y_0) um ponto dado do plano xy e (x_0, y_0, z_0) o ponto correspondente da superfície. Manter y fixo no valor y_0 significa secionar a superfície com o plano $y=y_0$. A interseção é a curva

$$z=f(x, y_0)$$

nesse plano. O número

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{(x_0,\, y_0)} = f_x(x_0, y_0)$$

é o coeficiente angular da reta tangente a essa curva em $x = x_0$. Assim, na figura temos

$$\operatorname{tg} \alpha = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{(x_0,\, y_0)} = f_x(x_0, y_0).$$

Analogamente, a interseção da superfície com o plano $x = x_0$ é a curva

$$z = f(x_0, y),$$

e a outra derivada parcial é o coeficiente angular da tangente a essa curva em $y = y_0$,

$$\operatorname{tg} \beta = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{(x_0,\, y_0)} = f_y(x_0, y_0).$$

Nenhuma interpretação como esta é válida quando há mais de duas variáveis independentes.

Observamos que para uma função $z = f(x, y)$ de duas variáveis, as derivadas parciais f_x e f_y também são funções de duas variáveis e próprias podem ter derivadas parciais. Como era de se esperar, essas *derivadas parciais de segunda ordem* são denotadas de diferentes maneiras. Começando com as derivadas parciais de primeira ordem.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = f_y,$$

as derivadas em relação a x são

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} f_x = f_{xx}$$

e

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} f_y = f_{yx};$$

as derivadas em relação a y são

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} f_x = f_{xy}$$

e

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} f_y = f_{yy}.$$

Essa notação pode ser um pouco confusa no início, mas é realmente bem razoável.. Observe que em f_{yx} derivamos primeiro em relação à variável y e, depois, em relação à variável x. Esta é a ordem natural, pois f_{yx} deve significar $(f_y)_x$. Assim, nos símbolos f_{xy} e f_{yx}, as letras no subscrito se escrevem da esquerda para a direita, porque esta é a ordem em que as derivações são realizadas. Pela mesma razão, nos símbolos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x},$$

é natural que as letras que indicam a variável de derivação se escrevam da direita para a esquerda; primeiro y, depois x, na primeira derivação; e primeiro x, depois y, na segunda derivação.

As derivadas parciais de segunda ordem *puras*,

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad \text{e} \quad f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},$$

não representam nada de realmente novo. Cada uma delas é obtida mantendo-se uma variável fixa e derivando duas vezes com relação à outra variável; cada uma delas dá a taxa de variação da taxa de variação de f na direção de um dos eixos.

Exemplo 5 Seja $f(x, y) = x^3 e^{5y} + y \text{ sen } 2x$. Temos então

$$f_x = 3x^2 e^{5y} + 2y \cos 2x, \qquad f_y = 5x^3 e^{5y} + \text{sen } 2x,$$
$$f_{xx} = 6x e^{5y} - 4y \text{ sen } 2x, \qquad f_{yy} = 25x^3 e^{5y}.$$

Por outro lado, as derivadas parciais de segunda ordem *mistas*,

$$f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} \quad \text{e} \quad f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y},$$

envolvem novas idéias. A derivada parcial mista f_{xy} dá a taxa de variação na direção do eixo y da taxa de variação de f na direção do eixo x; f_{yx} dá a taxa de variação na direção do eixo x da taxa de variação de f na direção do eixo y. Não é de todo claro como essas derivadas parciais mistas estão relacionadas entre si, se é que na realidade estejam relacionadas de algum modo.

Exemplo 5 (cont.) Para a função em consideração, $f(x, y) = x^3e^{5y} + y \text{ sen } 2x$, vemos facilmente que

$$f_x = 3x^2e^{5y} + 2y \cos 2x, \qquad f_y = 5x^3e^{5y} + \text{sen } 2x,$$
$$f_{xy} = 15x^2e^{5y} + 2 \cos 2x, \qquad f_{yx} = 15x^2e^{5y} + 2 \cos 2x.$$

Para a particular função considerada nesse exemplo, obtivemos

$$f_{xy} = f_{yx}, \tag{1}$$

ou, equivalentemente,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y},$$

dando a impressão de que a ordem de derivação não é importante – pelo menos nesse caso. Mas não se trata de uma casualidade: (1) é verdade para a grande maioria das funções que aparecem normalmente nas aplicações. Mais precisamente, *se ambas f_{yx} e fxy existirem para todos os pontos numa vizinhança de (x_0, y_0) e forem contínuas em (x_0, y_0), então*

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0).$$

Uma prova dessa afirmação é dada no Apêndice B.6.

Derivadas parciais de ordem superior a dois, assim como derivadas de ordem superior de funções de mais de duas variáveis, são definidas de maneira óbvia. Por exemplo, se $w = f(x, y, z)$, então

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y\,\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}\right) = (f_{zy})_x = f_{zyx},$$
$$\frac{\partial^4 f}{\partial z\,\partial y\,\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial y\,\partial x^2}\right) = (f_{xxy})_z = f_{xxyz}$$

etc. Em geral, com continuidade adequada, não é importante a ordem em que uma seqüência de derivações parciais é realizada, pois, aplicando (1), podemos inverter a ordem de quaisquer duas derivações sucessivas. Por exemplo, $f_{xxyz} = f_{xyxz} = f_{xyzx} = f_{yxzx} = f_{yzxx}$.

Problemas

Nos Problemas 1 a 14, calcule

1. $z = 2x + 3y$.
2. $z = 5x^2y$.
3. $z = \dfrac{2y^2}{3x+1}$.
4. $z = y \cos x$.
5. $z = x^2 \operatorname{sen} y$.
6. $z = \operatorname{tg} 3x + \operatorname{cotg} 4y$.
7. $z = x \operatorname{tg} 2y + y \operatorname{tg} 3x$.
8. $z = \operatorname{sen} xy$.
9. $z = \cos(3x - y)$.
10. $z = xye^{xy}$.
11. $z = e^x \operatorname{sen} y$.
12. $z = \operatorname{arc\,tg}^{-1} \dfrac{x}{y}$.
13. $z = e^y \ln x^2$.
14. $z = \ln(3x + y^2)$.

Nos Problemas 15 a 18, calcule as derivadas parciais em relação a x, y e z.

15. $w = x^2y^5z^7$.
16. $w = \operatorname{arc\,sen}^{-1} \dfrac{z}{xy}$.
17. $w = x \ln \dfrac{y}{z}$.
18. $w = e^{x^2+y^3+z^4}$.

19. Considere a superfície $z = 2x^2 + y^2$.
   (a) O plano $y = 3$ intercepta a superfície numa curva. Determine as equações da reta tangente a essa curva em $x = 2$.

   (b) O plano $x = 2$ intercepta a superfície numa curva. Determine as equações da reta tangente a essa curva em $y = 3$.

20. Considere a superfície $z = x^2/(y^2 - 3)$.
   (a) O plano $y = 2$ intercepta a superfície numa curva. Determine as equações da reta tangente a essa curva em $x = 3$.

   (b) O plano $x = 3$ intercepta a superfície numa curva. Determine as equações da reta tangente a essa curva em $y = 2$.

21. Mostre que todas as funções $z = f(x, y)$ seguintes satisfazem a equação $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$:

   (a) $z = \dfrac{x}{y}$; (b) $z = \dfrac{x}{x+y}$;

   (c) $z = \ln \dfrac{2y^2}{x^2}$; (d) $z = \dfrac{xy^2}{x^3 + y^3}$.

22. Se $z = ye^{x/y}$, mostre que $xz_x + yz_y = z$.

23. Se $z = x^5 - 2x^4y + 5x^2y^3$, mostre que

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 5z.$$

Nos Problemas 24 a 28, verifique que

24. $z = \text{arc tg}^{-1}\dfrac{x}{y}$.
25. $z = \ln(x + 5y)$.
26. $z = e^{xy}\cos(y - 2x)$.
27. $z = f(x)g(y)$.
28. $z = x^3 \text{ tg } 2x \text{ cosec } 3y^4 \text{ arc sen}^{-1}\sqrt{x^2+1}$.

29. Mostre que as funções seguintes satisfazem a *equação de Laplace*

(a) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$; (b) $f(x, y) = e^x \text{ sen } y$;
(c) $f(x, y) = e^{-3x}\cos 3y$; (d) $f(x, y) = \text{arc tg}^{-1}\dfrac{y}{x}$.

30. Mostre que as funções seguintes satisfazem a *equação da onda* $a^2\,\partial^2 f/\partial x^2 = \partial^2 f/\partial t^2$:

(a) $f(x, t) = (x + at)^3$; (b) $f(x, t) = (x - at)^5$;
(c) $f(x, t) = \text{sen}(x + at)$; (d) $f(x, t) = e^{x-at}$.

31. Determine uma função $f(x, y)$ tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3y^2 - 2x\cos y \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 6xy + x^2 \text{ sen } y + 2.$$

Às vezes convém definir funções por integrais da forma

$$F(x) = \int_a^b f(x, y)\, dy.$$

É usualmente possível calcular a derivada $F'(x)$ de tal função "derivando sob o sinal da integral":

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^b f(x, y)\, dy = \int_a^b \left[\frac{\partial}{\partial x} f(x, y)\right] dy^*.$$

32. Verifique a fórmula acima enunciada nos seguintes casos:

(a) $a = 0, b = 1, f(x, y) = x + y$;
(b) $a = 0, b = 1, f(x, y) = x^3y^2 + x^2y^3$;
(c) $a = 0, b = \pi, f(x, y) = \text{sen}\, xy$.

19.3 PLANO TANGENTE A UMA SUPERFÍCIE

O conceito de plano tangente a uma superfície corresponde ao conceito de reta tangente a uma curva. Geometricamente, o plano tangente a uma superfície num ponto é o plano que "melhor aproxima" a superfície nas vizinhanças do ponto. Será necessário aprofundarmos o significado dessas considerações, pois – como veremos nas Seções 19.5 e 19.6 – disso dependem conseqüências práticas muito importantes.

Considere uma superfície $z = f(x, y)$, como se mostra na Fig. 19.6.

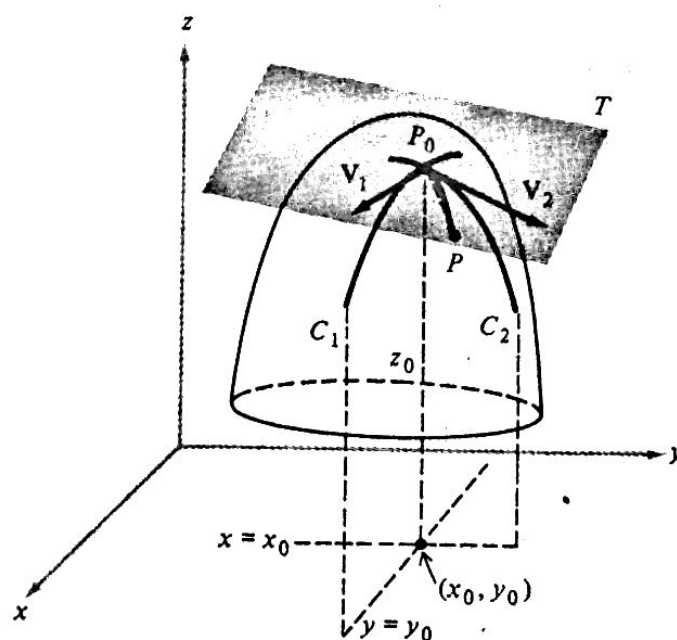



Figura 19.6 O plano tangente.

* Uma prova é dada no Apêndice B.7.

Como salientamos na Seção 19.2, o plano $y = y_0$ intercepta essa superfície numa curva C_1 cuja equação é

$$z = f(x, y_0),$$

e o plano $x = x_0$ a intercepta numa curva C_2 cuja equação é

$$z = f(x_0, y);$$

e os coeficientes angulares das retas tangentes a essas curvas no ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ são as derivadas parciais

$$f_x(x_0, y_0) \qquad \text{e} \qquad f_y(x_0, y_0). \tag{1}$$

Essas duas retas tangentes determinam um plano, e, como sugere a Fig. 19.6, se a superfície for suficientemente lisa perto de P_0, então esse plano será tangente à superfície em P_0.

É importante ter bem claro o que queremos dizer com plano tangente; assim, começamos com a definição. Seja P_0 um ponto sobre uma superfície $z = f(x, y)$, seja T um plano por P_0; tomemos P qualquer sobre a superfície. Se, quando P tende a P_0 mantendo-se sobre a superfície, o ângulo entre o segmento P_0P e o plano T tende a zero, então T chama-se *plano tangente* à superfície em P_0.

É fácil ver que uma superfície não tem obrigatoriamente um plano tangente num ponto P_0. Um exemplo muito simples é fornecido pelo cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ mostrado na Fig. 19.7

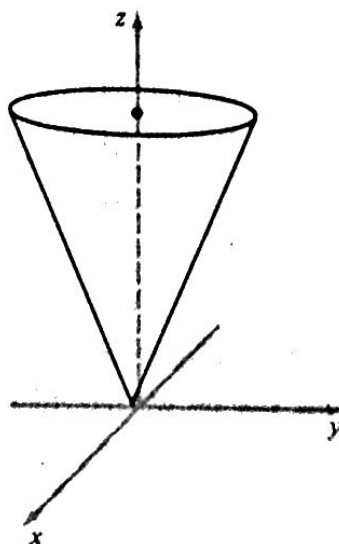



Figura 19.7

É claro que nenhum plano é tangente a essa superfície na origem. Nesse caso, as curvas C_1 e C_2 não têm retas tangentes na origem e as derivadas parciais (1) não existem nesse ponto. Entretanto, mesmo quando as curvas C_1 e C_2 são suficientemente lisas, tendo retas tangentes em P_0, a superfície, por causa de seu comportamento não-suave, pode não ter plano tangente em P_0 perto de P_0 nas regiões entre C_1 e C_2. Na Seção 19.4 discutiremos um lema fundamental revelando

as condições para que haja plano tangente à superfície no ponto (x_0, y_0) e que são: as derivadas parciais $f_x(x, y)$ e $f_y(x, y)$, existem em todos os pontos em alguma vizinhança de (x_0, y_0) e são contínuas no próprio ponto (x_0, y_0).

Entretanto, admitimos que o plano tangente existe em P_0 e desenvolvemos um método para descobrir sua equação. Como o ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ está sobre esse plano tangente, sabemos que sua equação tem a forma

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0, \tag{2}$$

onde $\mathbf{N} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ é um vetor normal qualquer. Falta encontrar **N**, e, para isto, utilizamos o produto vetorial de dois vetores $\mathbf{V}_1$ e $\mathbf{V}_2$ tangentes às curvas C_1 e C_2 em P_0 (Fig. 19.6). Para encontrar $\mathbf{V}_1$, usamos o fato de que ao longo da reta tangente a C_1, um acréscimo de 1 unidade em x produz uma variação $f_x(x_0, y_0)$ em z, com y não tendo nenhuma variação. Assim, o vetor

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{i} + 0 \cdot \mathbf{j} + f_x(x_0, y_0)\mathbf{k}$$

é tangente a C_1 em P_0. Analogamente, o vetor

$$\mathbf{V}_2 = 0 \cdot \mathbf{i} + \mathbf{j} + f_y(x_0, y_0)\mathbf{k}$$

é tangente a C_2 em P_0. Como $\mathbf{V}_1$ e $\mathbf{V}_2$ estão no plano tangente, estamos agora habilitados para obter nosso vetor normal **N** calculando

$$\mathbf{N} = \mathbf{V}_2 \times \mathbf{V}_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 1 & f_y(x_0, y_0) \\ 1 & 0 & f_x(x_0, y_0) \end{vmatrix} = f_x(x_0, y_0)\mathbf{i} + f_y(x_0, y_0)\mathbf{j} - \mathbf{k}. \tag{3}$$

(A ordem dos fatores nesse produto vetorial é escolhida somente por conveniência, para produzir só um sinal negativo no resultado em vez de dois.) Substituindo as componentes de (3) em (2), veremos que a equação desejada é

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0,$$

ou, equivalentemente,

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0). \tag{4}$$

Exemplo 1 Determine o plano tangente à superfície

$$z = f(x, y) = 2xy^3 - 5x^2$$

no ponto $(3, 2, 3)$.

Solução O primeiro passo deve ser conferir se esse ponto realmente está sobre a superfície dada. Admitamos que isto foi feito. Temos $f_x = 2y^3 - 10x$ e $f_y = 6xy^2$, logo $f_x(3, 2) = -14$ e $f_y(3, 2) = 72$. A equação do plano tangente é, portanto,

$$z - 3 = -14(x - 3) + 72(y - 2).$$

Planos tangentes à superfície onde z não é explicitamente dado como função de x e y serão discutidos na Seção 19.5. Entretanto, podemos obter uma idéia preliminar do que esperar aplicando nosso método presente para casos simples.

Exemplo 2 Determine o plano tangente à esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = 14 \qquad (5)$$

no ponto $(1, 2, 3)$.

Solução Embora essa esfera não seja uma superfície da forma $z = f(x, y)$, ela pode ser pensada como uma combinação de duas de tais superfícies, os hemisférios superior e inferior. Resolvendo (5) para z, vemos que o hemisfério superior é dado por

$$z = f(x, y) = \sqrt{14 - x^2 - y^2},$$

logo

$$f_x = \frac{-x}{\sqrt{14 - x^2 - y^2}} \quad \text{e} \quad f_y = \frac{-y}{\sqrt{14 - x^2 - y^2}}.$$

Essas fórmulas dão

$$f_x(1, 2) = -\tfrac{1}{3} \quad \text{e} \quad f_y(1, 2) = -\tfrac{2}{3},$$

logo a equação do plano tangente é

$$z - 3 = -\tfrac{1}{3}(x - 1) - \tfrac{2}{3}(y - 2),$$

ou

$$x + 2y + 3z = 14.$$

Nesse exemplo resolvemos a equação (5) explicitamente para z, depois aplicamos o que sabíamos. Um método alternativo muitas vezes mais fácil é admitir que a equação dada define z implicitamente como uma função de x e y; então encontramos as derivadas parciais por derivação implícita. Com esse método utilizamos a equação (4) de forma um pouco diferente

$$z - z_0 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{P_0} (x - x_0) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{P_0} (y - y_0), \tag{6}$$

onde os coeficientes são escritos dessa maneira pois $\partial z/\partial x$ e $\partial z/\partial y$ não precisam depender apenas de x e y.

Exemplo 3 Para determinar o plano tangente do Exemplo 2 pelo método acima sugerido, mantemos y fixo e derivamos (5) implicitamente com relação a x, obtendo

$$2x + 2z\frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$

logo $\partial z/\partial x = -x/z$. Analogamente, $\partial z/\partial y = -y/z$. No ponto $P_0 = (1, 2, 3)$, essas derivadas parciais têm os valores numéricos

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{P_0} = -\frac{1}{3} \qquad \text{e} \qquad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{P_0} = -\frac{2}{3},$$

logo, por (6), o plano tangente é

$$z - 3 = -\tfrac{1}{3}(x - 1) - \tfrac{2}{3}(y - 2),$$

coincidindo com o que já obtivemos. Naturalmente esse método é de particular valor quando a equação da superfície é difícil ou impossível de resolver para z.

Problemas

Nos Problemas 1 a 10, determine uma equação do plano tangente à superfície dada no ponto indicado.

1. $z = (x^2 + y^2)^2$, $(1, 2, 25)$.
2. $z = 4xy$, $(4, \frac{1}{4}, 4)$.
3. $z = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2y + \operatorname{sen} 3(x + y)$, $(0, 0, 0)$.
4. $z = x^2 + xy + y^2 - 10y + 5$, $(3, 2, 4)$.
5. $z = x^2 - 2y^2$, $(3, 2, 1)$.

6. $z = \dfrac{2x + y}{x - 2y}$, (3, 1, 7).
7. $z = e^y \cos x$, (0, 0, 1).
8. $z = \text{arc tg}\,\dfrac{x}{y}$, $\left(4, 4, \dfrac{\pi}{4}\right)$.
9. $xy^2 + yz^2 + zx^2 = 25$, (1, 2, 3).
10. $z^3 + xyz = 33$, (1, 2, 3).

11. Seja $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ com $z_0 > 0$ um ponto da esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

Mostre que o plano tangente nesse ponto é perpendicular ao raio vetor ao ponto, em concordância com um teorema da geometria.

12. Use derivação implícita para mostrar que a equação do plano tangente à esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

no ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ é $x_0x + y_0y + z_0z = a^2$.

13. Use derivação implícita para determinar a equação do plano tangente ao elipsóide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

no ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$.

14. Seja a uma constante positiva e considere o plano tangente à superfície $xyz = a$ num ponto do primeiro octante. Mostre que o tetraedro formado por esse plano e os planos coordenados têm volume constante, independentemente do ponto de tangência. Qual é esse volume?

15. O *ângulo entre duas superfícies* num ponto comum é o menor ângulo positivo entre as normais a essas superfícies nesse ponto. Determine o ângulo entre $z = e^{xy} - 1$ e $z = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$ em (0, 1, 0).

16. Sendo $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ um ponto da curva de interseção de duas superfícies $z = f(x, y)$ e $z = g(x, y)$, descubra um método para determinar um vetor tangente a essa curva em P_0. Aplique esse método para determinar um vetor tangente à curva de interseção do cone $z^2 = 3x^2 + 4y^2$ com o plano $3x - 2y + z = 8$ no ponto $P_0 = (2, 1, 4)$.

17. Uma superfície tem uma equação de forma $z = xf(x, y)$. Mostre que todos os seus planos tangentes têm um ponto comum. Qual é esse ponto?

18. $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ é um ponto do cone $z^2 = z(x^2 + y^2)$ diferente do vértice. Mostre que o plano tangente ao cone em P_0 tem equação $z_0 z = a(x_0 x + y_0 y)$. Conclua que todos os planos dessa natureza passam pelo vértice. Mostre que a reta normal em P_0 tem

$$x = x_0 + ax_0 t, \qquad y = y_0 + ay_0 t, \qquad z = z_0 - z_0 t$$

como equações paramétricas.

19. Sobre o cone do Problema 18, considere todos os pontos de altura fixa h acima do plano xy e desenhe retas normais nesses pontos. Mostre que os pontos em que essas retas interceptam o plano xy formam uma circunferência e determine o raio dessa circunferência.

20. Trace retas normais em todos os pontos da superfície $z = ax^2 + by^2$ que estão a uma dada altura fixa h acima do plano xy; determine a equação da curva em que essas retas interceptam o plano xy.

19.4 INCREMENTOS E DIFERENCIAIS. LEMA FUNDAMENTAL

A maior parte do cálculo pode ser compreendida usando a intuição geométrica acompanhada de bom senso, sem necessidade de aprofundamento na teoria subjacente do assunto. Em alguns lugares, entretanto, essa teoria é imprescindível, porque sem ela não há meios de se compreender o que ocorre nos principais desenvolvimentos do próprio assunto. Isto é verdade para séries infinitas e para a teoria da convergência. É também verdade para os tópicos das duas seções seguintes – derivadas direcionais e regra da cadeia – que não podem ser compreendidas sem dedicarmos atenção aos aspectos teóricos que agora discutiremos brevemente.

Com a finalidade de revelarmos quais são esses aspectos, começamos considerando uma função $y = f(x)$ de uma variável com derivada num ponto x_0. Se Δx é um incremento que leva x_0 a um ponto próximo $x_0 + \Delta x$ (Fig. 19.8), estamos interessados no incremento correspondente em y,

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

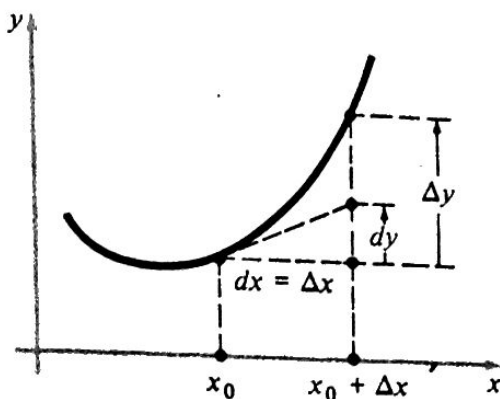



Figura 19.8 Diferenciais dx e dy.

A definição da derivada $f'(x_0)$ é

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \tag{1}$$

expressão que pode ser escrita na forma equivalente

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \epsilon,$$

onde $\epsilon \to 0$ quando $\Delta x \to 0$. Conseqüentemente, sem hipóteses adicionais além da admissão da existência da derivada (1), podemos escrever o incremento Δy na forma

$$\Delta y = f'(x_0)\,\Delta x + \epsilon\,\Delta x, \quad \text{onde } \epsilon \to 0 \text{ quando } \Delta x \to 0. \tag{2}$$

A situação é inteiramente diferente para uma função de duas (ou mais) variáveis, como explicaremos agora.

Consideramos uma função $z = f(x, y)$ e seja (x_0, y_0) um ponto em que ambas as derivadas parciais $f_x(x_0, y_0)$ e $f_y(x_0, y_0)$ existam. O incremento em z produzido ao passarmos de (x_0, y_0) para um ponto próximo $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ é

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0),$$

como mostra a Fig. 19.9.

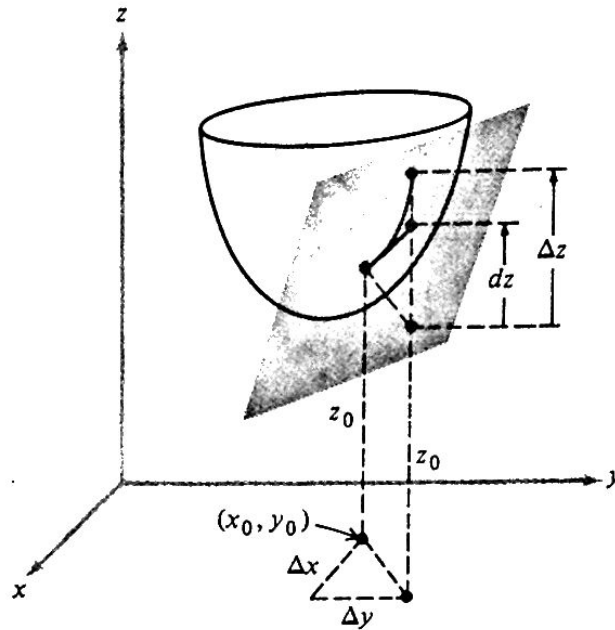



Figura 19.9 A diferencial.

Para desenvolvermos os instrumentos que necessitaremos nas Seções 19.5 e 19.6, será necessário expressar Δz em forma análoga a (2)

$$\Delta z = f_x(x_0, y_0)\,\Delta x + f_y(x_0, y_0)\,\Delta y + \epsilon_1\,\Delta x + \epsilon_2\,\Delta y,$$

onde ϵ_1 e $\epsilon_2 \to 0$ quando Δx e $\Delta y \to 0$. Infelizmente, contrastando fortemente com o caso de uma variável, a existência das derivadas parciais f_x e f_y em (x_0, y_0) não é suficiente para garantir a validade de (3). Condições suficientes para que (3) seja válida são dadas no

---

Lema fundamental *Suponha que uma função $z = f(x, y)$ e suas derivadas parciais f_x e f_y estejam definidas num ponto (x_0, y_0) e também numa vizinhança desse ponto. Suponha além disso que f_x e f_y sejam contínuas em (x_0, y_0). Então o incremento Δz pode ser expresso na forma (3), onde ϵ_1 e $\epsilon_2 \to 0$ quando Δx e $\Delta y \to 0$.*

Essa afirmação é um "lema" porque sua importância não está em si, mas no uso que dela pode ser feito. Uma prova é dada no Apêndice B.8.

Não desejamos dedicar mais tempo ao assunto, mas algumas breves observações são necessárias.

Observação 1 No caso de função de uma variável, (1) e (2), são equivalentes e se uma delas for válida, é costume denotar Δx por dx e escrever $dy = f'(x_0)\,dx$, sendo dy a variação de y ao longo da reta tangente. Uma função $z = f(x, y)$, da qual $f_x(x_0, y_0)$ e $f_y(x_0, y_0)$ existem, é dita *diferenciável* em (x_0, y_0) se a tese do lema for válida, ou seja, exige-se mais do que meramente a existência das derivadas parciais. Nesse caso – e somente nesse caso – denotamos Δx e Δy por dx e dy e definimos a *diferencial* dz por *

---

* Às vezes dz é chamada *diferencial total.*

$$dz = f_x(x_0, y_0)\, dx + f_y(x_0, y_0)\, dy.$$

Nessas condições pode ser provado que a superfície $z = f(x, y)$ tem um plano tangente em (x_0, y_0, z_0) e que dz é a variação de z sobre esse plano, como sugerido na Fig. 19.9. A diferencial dz é usualmente escrita nas formas equivalentes.

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\, dx + \frac{\partial z}{\partial y}\, dy \qquad \text{ou} \qquad df = \frac{\partial f}{\partial x}\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}\, dy.$$

Observação 2 Uma função $z = f(x, y)$ derivável num ponto é automaticamente contínua nesse ponto. Essa afirmação vem imediatamente de (3), que revela que $\Delta z \to 0$ se Δx e $\Delta y \to 0$. No caso de uma única variável, sabemos que se uma função tem derivada num ponto, então é necessariamente contínua nesse ponto. Entretanto, isto não é verdade para funções de mais de uma variável: a simples existência das derivadas parciais f_x e f_y num ponto não implica a continuidade de $f(x, y)$ nesse ponto. Como exemplo temos a função bizarra discutida na Seção 19.1, para a qual $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$, e mesmo assim a função é descontínua em $(0, 0)$.

Os conceitos de função diferenciável de sua diferencial e também do Lema Fundamental podem ser estendidos de maneira óbvia à função de um número finito qualquer de variáveis. Não incomodaremos o leitor com os detalhes pois isto envolveria muito escrito adicional sem novas idéias.

19.5 DERIVADAS DIRECIONAIS E GRADIENTE

Seja $f(x, y, z)$ uma função definida em alguma região do espaço tridimensional e seja P um ponto dessa região. Com que taxa f varia quando partimos de P numa direção específica? Nas direções dos eixos x, y e z sabemos que as taxas de variação de f são dadas pelas derivadas parciais $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$ e $\partial f/\partial z$. Mas como calcular a taxa de variação de f se partimos de P numa direção que não é a de um eixo coordenado? A análise desse problema nos leva ao conceito muito importante de gradiente de uma função.

Suponhamos que o ponto P em consideração tenha coordenadas x, y e z, $P = (x, y, z)$; seja $\mathbf{R} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ o vetor posição de P e seja dada uma direção específica por um vetor unitário $\mathbf{u}$ (Fig. 19.10). Movendo-nos de P nessa direção para um ponto próximo $Q = (x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$, a função f variará de uma quantidade Δf. Dividindo essa variação Δf *pela* distância $\Delta s = |\Delta \mathbf{R}|$ entre P e Q, o quociente $\Delta f/\Delta s$ é a taxa média de variação da temperatura ao longo do segmento PQ. O valor limite de $\Delta f/\Delta s$ quando Q tende a P, ou seja,

$$\frac{df}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta s},$$

chama-se *derivada de f no ponto P na direção* **u**, ou simplesmente *derivada direcional de f*. No caso da função temperatura, df/ds representa a taxa instantânea de variação da temperatura em relação à distância – dito grosso modo; com que rapidez está ficando mais quente – no ponto P quando nos movemos de P na direção indicada por **u**.

Está tudo muito bem, mas como nós calculamos efetivamente df/ds num caso específico? Para descobrir como fazê-lo, admitimos que $f(x, y, z)$ tem derivadas parciais contínuas em relação a x, y e z. De fato, para evitar a repetição tediosa do enunciado de hipóteses, adotamos essa hipótese como geral para toda função que discutimos, a menos que se especifique em contrário. O Lema Fundamental permite-nos escrever Δf na forma

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y + \epsilon_3 \Delta z, \tag{1}$$

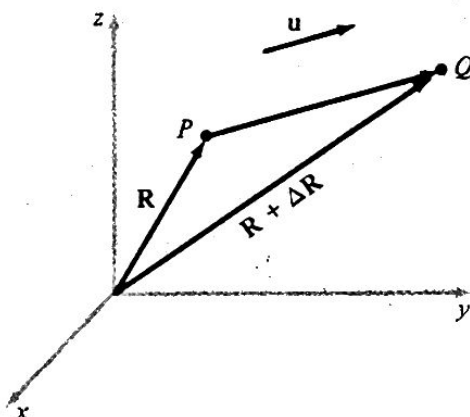



Figura 19.10

onde $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3 \to 0$ quando Δx, Δy e $\Delta z \to 0$, isto é, quando $\Delta s \to 0$. Dividindo (1) por Δs obtemos

$$\frac{\Delta f}{\Delta s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta s} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\Delta z}{\Delta s} + \epsilon_1 \frac{\Delta x}{\Delta s} + \epsilon_2 \frac{\Delta y}{\Delta s} + \epsilon_3 \frac{\Delta z}{\Delta s}, \tag{2}$$

e tomando o limite quando $\Delta s \to 0$, vemos que os últimos termos em (2) tendem a zero e obtemos a fórmula

$$\frac{df}{ds} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{ds}. \tag{3}$$

Essa fórmula deve ser entendida como um caso particular da regra da cadeia: quando nos movemos sobre a reta que passa por P e é paralela a **u**, f sendo função de x, y e z onde x, y e z, por sua vez, são funções do comprimento de arco s, (3) mostra como derivar f em relação a x.

Observamos que o primeiro fator em cada termo no membro direito de (3) depende apenas da função f e das coordenadas do ponto P em que as derivadas parciais de f são calculadas, enquanto o segundo fator é independente de f e depende apenas da direção em que df/ds está sendo calculado. Esses fatos sugerem que o segundo membro de (3) deve ser pensado – e escrito – como produto interno de dois vetores, como se segue

$$\frac{df}{ds} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}\right) \cdot \left(\frac{dx}{ds}\mathbf{i} + \frac{dy}{ds}\mathbf{j} + \frac{dz}{ds}\mathbf{k}\right)$$
$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}\right) \cdot \frac{d\mathbf{R}}{ds}. \tag{4}$$

O primeiro fator é um vetor chamado *gradiente* de f, e é denotado pelo símbolo grad F. Assim, por definição

$$\text{grad}\, f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}. \tag{5}$$

Com esta notação, (4) se escreve

$$\frac{df}{ds} = (\text{grad}\, f) \cdot \frac{d\mathbf{R}}{ds}. \tag{6}$$

Sabemos, no entanto que $d\mathbf{R}/ds$ é um vetor unitário e, tendo a mesma direção de $\mathbf{u}$, é igual a $\mathbf{u}$. A fórmula (6) é, portanto, equivalente a

$$\frac{df}{ds} = (\text{grad}\, f) \cdot \mathbf{u}. \tag{7}$$

Assim temos a maneira de calcular df/ds, pois (5) é presumivelmente simples de se estabelecer a partir da função dada f, e também é simples, em seguida, calcular os valores das derivadas parciais no ponto dado P; finalmente o produto interno (7) de dois vetores conhecidos é fácil de calcular.

Para uma dada função f e um dado ponto P, grad f é um vetor determinado que pode ser colocado com seu início em P. Colocamos também a extremidade inicial de $\mathbf{u}$ em P (Fig. 19.11).

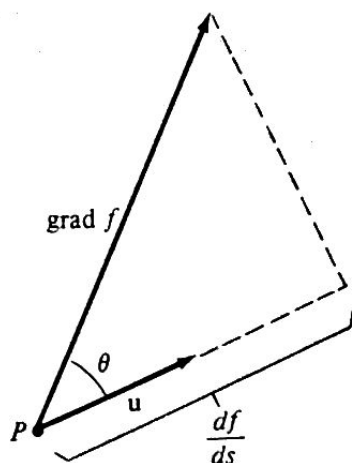



Figura 19.11 Derivada direcional.

Para compreender o significado de grad f, usamos a definição de produto interno e o fato de que **u** é um vetor unitário. Isto posto escrevemos (7) na forma

$$\frac{df}{ds} = |\text{grad } f| \cos \theta, \tag{8}$$

onde θ é o ângulo entre grad f e **u**. Como o sentido de **u** pode ser escolhido de forma a satisfazer nossa conveniência, de (8) obtemos imediatamente a primeira propriedade fundamental do gradiente:

Propriedade 1 A derivada direcional df/ds em qualquer direção dada é a componente escalar de grad f naquela direção (Fig. 19.11).

Nesse sentido o vetor grad f contém em si mesmo as derivadas direcionais de f no ponto P em todas as direções possíveis.

A seguir, se **u** for escolhido apontando no mesmo sentido de grad f, de modo que $\theta = 0$ e $\cos \theta = 1$, então (8) mostra que df/ds tem seu valor máximo – isto é, f cresce mais rapidamente nessa direção. Também, esse valor máximo é igual a $|\text{grad } f|$. Essas observações estão resumidas nas duas seguintes propriedades fundamentais do gradiente:

Propriedade 2 O vetor grad f aponta na direção e no sentido em que f cresce mais rapidamente.

Propriedade 3 O comprimento do vetor grad f é a taxa máxima de crescimento de f.

Como essas observações revelam, embora as fórmulas (7) e (8) sejam equivalentes, elas desempenham papéis muito diferentes em nosso raciocínio, pois usamos (7) para calcular df/ds e (8) para compreender o significado intuitivo do vetor grad f.

Exemplo 1 Sendo $f(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2$, calcule a derivada direcional df/ds no ponto $(1, 2, 1)$ na direção e no sentido do vetor $4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$.

Solução No ponto $(1, 2, 1)$, temos grad $f = 2x\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2z\mathbf{k} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$. Obtemos um vetor unitário $\mathbf{u}$ no sentido desejado dividindo o vetor dado por seu próprio comprimento,

$$\mathbf{u} = \frac{4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}}{\sqrt{16 + 4 + 16}} = \frac{2}{3}\mathbf{i} - \frac{1}{3}\mathbf{j} + \frac{2}{3}\mathbf{k}.$$

A fórmula (7) nos dá agora

$$\frac{df}{ds} = (\text{grad } f)\cdot\mathbf{u}$$

$$= (2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k})\cdot(\tfrac{2}{3}\mathbf{i} - \tfrac{1}{3}\mathbf{j} + \tfrac{2}{3}\mathbf{k}) = 3.$$

Assim, a função f cresce à taxa de 3 unidades por unidade de distância quando deixamos $(1, 2, 1)$ no sentido dado.

Exemplo 2 Seja a temperatura do ar em pontos do espaço dada pela função $f(x, y, z) = x^2 - y + z^2$. Um mosquito localizado em $(1, 2, 1)$ deseja esfriar o mais rápido possível. Em que direção deve ele voar?

Solução Vimos no Exemplo 1 que grad $f = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ no ponto $(1, 2, 1)$. Como o sentido do grad f é aquele em que a temperatura cresce mais rapidamente, o mosquito deverá voar no sentido oposto, o de $-$ grad $f = -2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$.

A quarta propriedade fundamental do gradiente é útil em geometria. A fim de explicá-la, denotamos o ponto em consideração por $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ para enfatizar que ele é fixo nessa discussão, e seja c_0 o valor de nossa função f no ponto P_0. Então o conjunto de todo os pontos do espaço em que $f(x, y, z)$ tem o mesmo valor c_0 constitui, em geral, uma superfície de nível que passa por P_0 cuja equação é $f(x, y, z) = c_0$. Desejamos mostrar que o vetor grad f é normal (perpendicular) a essa superfície de nível no ponto P_0, como sugerido na Fig. 19.12 à esquerda.

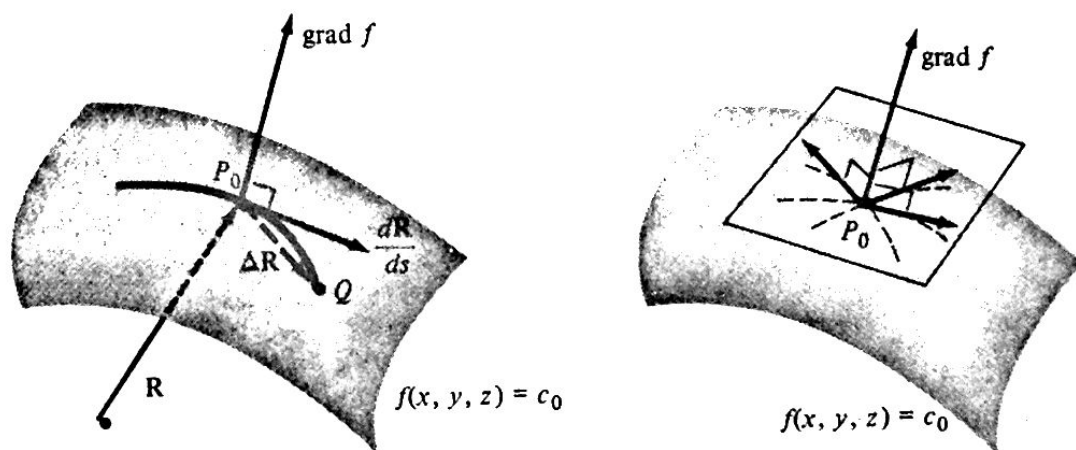



Figura 19.12 O gradiente é normal à superfície de nível.

Para esse fim, consideramos uma curva que está na superfície e passa por P_0. Se nos movermos a um ponto próximo Q nessa curva e medirmos s ao longo da curva, então $\Delta f = 0$, pois f tem o mesmo valor em todos os pontos da superfície e, portanto, $df/ds = 0$ em P_0 na direção da tangente à curva. A fórmula (6) permanece válida e implica que

$$(\text{grad} f) \cdot \frac{d\mathbf{R}}{ds} = 0, \tag{9}$$

onde $d\mathbf{R}/ds$ é o vetor unitário tangente à curva em P_0. O anulamento do produto interno em (9) nos diz que grad f é perpendicular a esse vetor tangente. Mas o mesmo raciocínio se aplica a qualquer curva da superfície que passa por P_0, logo grad f é perpendicular aos vetores tangentes a todas essas curvas (Fig. 19.12 à direita). Como esses vetores tangentes determinam o plano tangente em P_0 e ser normal à superfície significa ser normal a esse plano tangente, temos:

Propriedade 4 O gradiente de uma função $f(x, y, z)$ num ponto P_0 é normal à superfície de nível de f que passa por P_0.

No contexto desta discussão, salientamos que a equação de qualquer superfície pode ser escrita na forma $f(x, y, z) = c_0$ e pode, portanto, ser encarada como uma superfície de nível da função $f(x, y, z)$. Se $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ é um ponto dessa superfície, então a Propriedade 4 mostra que o vetor

$$\mathbf{N} = \text{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{P_0} \mathbf{i} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{P_0} \mathbf{j} + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{P_0} \mathbf{k}$$

é normal ao plano tangente em P_0; logo, se $\mathbf{N} \neq 0$, a equação desse plano tangente é

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{P_0}(x - x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{P_0}(y - y_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{P_0}(z - z_0) = 0.$$

Observamos que essa equação tem a equação (4) da Seção 19.3 como caso particular; sendo a superfície dada na forma $z = g(x, y)$, podemos escrevê-la como $g(x, y) - z = 0$, logo a superfície é uma superfície de nível da função $f(x, y, z) = g(x, y) - z$, e isto torna os coeficientes em (10) iguais a $g_x(x_0, y_0), g_y(x_0, y_0) - 1$.

Exemplo 3 Determine a equação do plano tangente à superfície $xy^2z^3 = 12$ no ponto $(3, -2, 1)$.

Solução Essa superfície é uma superfície de nível da função $f(x, y, z) = xy^2z^3$. O vetor grad f no ponto $(3, -2, 1)$ é normal à superfície nesse ponto. Esse vetor é

$$\begin{aligned}\text{grad } f &= y^2z^3\mathbf{i} + 2xyz^3\mathbf{j} + 3xy^2z^2\mathbf{k} \\ &= 4\mathbf{i} - 12\mathbf{j} + 36\mathbf{k} = 4(\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 9\mathbf{k}).\end{aligned}$$

Portanto, a equação do plano tangente é

$$(x - 3) - 3(y + 2) + 9(z - 1) = 0$$

ou

$$x - 3y + 9z = 18.$$

Observação 1 As principais aplicações das derivadas direcionais e dos gradientes são encontrados na Geometria e na Física do espaço tridimensional. Entretanto, esses conceitos podem também ser definidos em duas dimensões e têm propriedades semelhantes (mas mais finas). Assim, uma curva $f(x, y) = c_0$ pode ser encarada como uma curva de nível da função $z = f(x, y)$; sendo o gradiente dessa função definido por

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j},$$

seu valor num ponto $P_0 = (x_0, y_0)$ sobre a curva é um vetor normal à curva.

Observação 2 O gradiente de uma função $f(x, y, z)$ pode ser escrito em "forma operacional" como

$$\text{grad } f = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k} \right) f.$$

O *operador* del precedendo a função f é usualmente denotado pelo símbolo ∇ (um delta invertido, lê-se "del") de modo que

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}.$$

O operador del é semelhante ao familiar operador de derivação d/dx, porém mais complicado. Quando del se aplica a uma função f, produz-se um vetor, ou seja, o vetor grad f. Nesta notação, as fórmulas (5), (6) e (7) tornam-se

$$\text{grad } f = \nabla f, \qquad \frac{df}{ds} = \nabla f \cdot \frac{d\mathbf{R}}{ds}, \qquad \text{e} \qquad \frac{df}{ds} = \nabla f \cdot \mathbf{u}.$$

Em cursos de Cálculo avançado e análise vetorial, é feito um estudo mais aprofundado do operador ∇ e de suas aplicações do que o que fizemos aqui.

Problemas

1. Calcule o gradiente de f em P se
   (a) $f(x, y, z) = xy + xz + yz$, $P = (-1, 3, 5)$;
   (b) $f(x, y, z) = e^{xy} \cos z$, $P = (0, 2, 0)$;
   (c) $f(x, y, z) = \ln (x^2 + y^2 + z^2)$, $P = (1, 2, -2)$;
   (d) $f(x, y, z) = xy/z$, $P = (2, -1, 5)$.

2. Calcule a derivada direcional de f em P na direção do vetor dado:
   (a) $f(x, y, z) = xy^2 + x^2z + yz$, $P = (1, 1, 2)$, $\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$;
   (b) $f(x, y, z) = \ln (x^2 + y^2 + z^2)$, $P = (0, 0, 1)$, vetor de P a $(2, 2, 0)$;
   (c) $f(x, y, z) = x \text{ sen } y + y \text{ sen } z + z \text{ sen } x$, $P = (1, 0, 0)$, $2\sqrt{3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}}$;
   (d) $f(x, y, z) = xye^z + yze^x$, $P = (1, 0, 0)$, vetor de P a $(2, 2, 1)$.

3. Calcule o valor máximo da derivada direcional de f em P e a direção em que ocorre:
(a) $f(x, y, z) = \text{sen}\, xy + \cos yz$, $P = (-3, 0, 7)$;
(b) $f(x, y, z) = e^x \cos y + e^y \cos z + e^z \cos x$, $P = (0, 0, 0)$;
(c) $f(x, y, z) = 2xyz + y^2 + z^2$, $P = (2, 1, 1)$;
(d) $f(x, y, z) = e^{xyz}$, $P = (2, 1, 1)$.

4. Em que direção seguir, começando na origem, para obter a taxa mais rápida de decrescimento da função

$$f(x, y, z) = (2 - x - y)^3 + (3x + 2y - z + 1)^2?$$

5. Determine os vetores unitários normais à superfície $xyz = 4$ no ponto $(2, -2, -1)$.

6. Se $f(x, y, z) = x^2 + 4y^2 - 8z$, calcule df/ds em $(4, 1, 0)$
(a) sobre a reta $(x - 4)/2 = (y - 1)/1 = z/(-2)$ na direção dos x decrescentes;
(b) sobre a normal ao plano $3(x - 4) - (y - 1) + 2z = 0$ na direção dos x crescentes;
(c) na direção em que f cresce mais rapidamente.

7. Suponha que a temperatura T num ponto $P = (x, y, z)$ é dada por $T = 2x^2 - y^2 + 4z^2$. Determine a taxa de variação de T no ponto $(1, -2, 1)$ na direção do vetor $4\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$. Em que direção T cresce mais rapidamente nesse ponto? Qual a taxa máxima de crescimento?

8. Determine o plano tangente e a reta normal ao hiperbolóide $x^2 + y^2 - z^2 = 5$ no ponto $(4, 5, 6)$.

9. Mostre que o plano tangente à superfície quádrica $ax^2 + by^2 + cz^2 = d$ no ponto (x_0, y_0, z_0) tem $ax_0x + by_0y + cz_0z = d$ como sua equação.

10. Mostre que o operador del tem as seguintes propriedades que demonstram sua grande semelhança com o operador de derivação d/dx:
(a) $\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$;
(b) $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$;
(c) $\nabla\left(\dfrac{f}{g}\right) = \dfrac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2}$;
(d) $\nabla f^n = nf^{n-1}\nabla f$.

19.6 REGRA DA CADEIA PARA DERIVADAS PARCIAIS

A regra da cadeia para derivadas ordinárias mostra a maneira de se derivar funções compostas: sendo w uma função de x e x, por sua vez, função de uma terceira variável t, assim $w=f(x), x=g(t)$, então

$$\frac{dw}{dt}=\frac{dw}{dx}\frac{dx}{dt}. \tag{1}$$

Sabemos, por experiência, que a regra da cadeia é um instrumento indispensável de cálculo; é usada com mais freqüência do que qualquer outra regra de derivação.

A regra da cadeia mais simples para funções de várias variáveis envolve uma função $w=f(x, y)$ de duas variáveis x e y, onde x e y são, cada uma delas, funções de uma outra variável $t, x=g(t)$ e $y=h(t)$. Então, w é uma função de t,

$$w=f[g(t), h(t)]=F(t),$$

e provaremos que a derivada dessa função composta é dada pela fórmula

$$\frac{dw}{dt}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt}. \tag{2}$$

A expressão (2) é a *regra da cadeia* para a situação descrita.

A prova de (2) é fácil. Começamos mudando de t a $t+\Delta t, \Delta t\neq 0$. Esse incremento em t produz incrementos Δx e Δy em x e y, que, por sua vez, produzem um incremento Δw em w. Como admitimos que todas as funções que discutimos têm derivadas parciais contínuas, o Lema Fundamental possibilita-nos escrever Δw na forma

$$\Delta w=\frac{\partial w}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial w}{\partial y}\Delta y+\epsilon_1\Delta x+\epsilon_2\Delta y, \tag{3}$$

onde ϵ_1 e $\epsilon_2\to 0$ quando Δx e $\Delta y\to 0$. Dividindo-se (3) por Δt, obtemos

$$\frac{\Delta w}{\Delta t}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta t}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta t}+\epsilon_1\frac{\Delta x}{\Delta t}+\epsilon_2\frac{\Delta y}{\Delta t}. \tag{4}$$

Tomando agora o limite para $\Delta t\to 0$, Δx e Δy também tendem a zero, logo ϵ_1 e $\epsilon_2\to 0$ e (4) implica imediatamente (2).

Exemplo 1 Sendo $w = 3x^2 + 2xy - y^2$ com $x = \cos t$ e $y = \operatorname{sen} t$, calcule dw/dt.

Solução Aplicando a fórmula (2) teremos que

$$\frac{dw}{dt} = (6x + 2y)(-\operatorname{sen} t) + (2x - 2y) \cos t.$$

Substituindo-se agora $x = \cos t$ e $y = \operatorname{sen} t$, dw/dt se expressa em termos apenas de t,

$$\begin{aligned}\frac{dw}{dt} &= (6 \cos t + 2 \operatorname{sen} t)(-\operatorname{sen} t) + (2 \cos t - 2 \operatorname{sen} t)(\cos t)\\ &= -6 \operatorname{sen} t \cos t - 2\operatorname{sen}^2 t + 2 \cos^2 t - 2 \operatorname{sen} t \cos t\\ &= 2(\cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t) - 8 \operatorname{sen} t \cos t = 2 \cos 2t - 4 \operatorname{sen} 2t.\end{aligned}$$

Podemos conferir esse resultado primeiro substituindo e depois derivando:

$$w = 3 \cos^2 t + 2 \operatorname{sen} t \cos t - \operatorname{sen}^2 t$$

e

$$\begin{aligned}\frac{dw}{dt} &= 6 \cos t\,(-\operatorname{sen} t) + 2 \operatorname{sen} t\,(-\operatorname{sen} t) + 2 \cos^2 t - 2 \operatorname{sen} t \cos t\\ &= 2(\cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t) - 8 \operatorname{sen} t \cos t = 2 \cos 2t - 4 \operatorname{sen} 2t,\end{aligned}$$

conforme havíamos encontrado.

Na situação da fórmula (2) convém chamar w de *variável dependente*, x e y de *variáveis intermediárias* e t de *variável independente.* Observamos que o segundo membro de (2) tem dois termos, um para cada variável intermediária, e que cada um desses termos parece com o segundo membro da regra da cadeia (1) para funções de uma variável.

A fórmula (2) estende-se de maneira óbvia para qualquer número de variáveis intermediárias. Por exemplo, se $w = f(x, y, z)$, onde x, y e z são, cada uma delas, funções de t, então

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dt}. \tag{5}$$

A prova é essencialmente a mesma prova de (2), exceto que usa o Lema Fundamental para três variáveis em vez de para duas.

Além disso, x, y e z não necessitam ser funções de apenas uma variável independente, mas podem ser funções de duas ou mais variáveis. Assim, se x, y e z são, cada uma delas, funções das variáveis t e u, então w é também uma função de t e u e suas derivadas parciais são dadas por

$$\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} \tag{6}$$

e

$$\frac{\partial w}{\partial u}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}. \tag{7}$$

Utilizamos derivadas parciais aqui porque todas as funções envolvidas dependem de mais de uma variável. É necessário ter muito claro o significado das letras em fórmulas como essas. Por exemplo, no primeiro membro de (6), w é considerada função de x, y e z. As provas são as mesmas que antes e todas as fórmulas – (2), (5), (6) e (7) e suas extensões a qualquer número de variáveis intermediárias e independentes – são coletivamente chamadas *regra da cadeia.*

Na Seção 19.4 definimos a diferencial dw de uma função $w=f(x, y, z)$ pela fórmula

$$dw=\frac{\partial w}{\partial x}dx+\frac{\partial w}{\partial y}dy+\frac{\partial w}{\partial z}dz. \tag{8}$$

A regra da cadeia (5) mostra que sendo x, y e z funções de uma única variável independente t, é permitido calcular dw/dt dividindo formalmente (8) por dt. Analogamente, no caso em que x, y e z são funções das variáveis independentes t, u e desejamos calcular $\partial w/\partial t$, a regra da cadeia (6) mostra que podemos calcular $\partial w/\partial t$ dividindo (8) por dt e escrevendo ∂ em lugar dos d ordinários para indicar que existe uma outra variável independente que está sendo mantida fixa.

Os termos individuais do segundo membro de (8) são, às vezes, chamados *diferenciais parciais* de w com relação a x, y, z. Desse ponto de vista, a quantidade dw definida por (8) recebe o nome de *diferencial total,* como observamos na Seção 19.4

Exemplo 2 Uma função de várias variáveis diz-se *homogênea de grau n* se multiplicar cada variável por t ($t > 0$) tem o mesmo efeito que multiplicar a função original por t^n. Assim, $f(x, y)$ é homogênea de grau n se

$$f(tx, ty)=t^n f(x, y). \tag{9}$$

Por exemplo, $f(x, y) = x^2 + 3xy$ é homogênea de grau 2, pois $f(tx, ty) = (tx)^2 + 3(tx)(ty) = t^2(x^2 + 3xy) = t^2 f(x, y)$. Analogamente, $f(x, y) = (x + y)/(x - y)$; é homogênea de grau 0, $f(x, y) = (xy - x^2 e^{x/y})/y$ é homogênea de grau 1 e $f(x, y, z) = \sqrt{x^3 - 3xy^2 + 2z^3}$ é homogênea de grau 3/2. A maioria das funções, como por exemplo, $f(x, y) = y^2 + x \operatorname{sen} y$, não é homogênea.

Há um teorema de Euler para funções homogêneas que tem diversas aplicações importantes: *se $f(x, y)$ é homogênea de grau n, então*

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = nf(x, y). \tag{10}$$

Para prová-lo, mantemos x e y fixos e derivamos ambos os membros de (9) em relação a t. Concretamente escrevemos $u = tx$ e $v = ty$, de modo que (9) se torna

$$f(u, v) = t^n f(x, y).$$

Usando agora a regra da cadeia para derivar em relação a t, obtemos

$$\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t} = nt^{n-1} f(x, y)$$

ou

$$x \frac{\partial f}{\partial u} + y \frac{\partial f}{\partial v} = nt^{n-1} f(x, y);$$

para $t = 1$ obtemos (10). Analogamente, se $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ é homogênea de grau n então, usando o mesmo argumento, obtemos

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = nf(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

O Teorema de Euler tem algumas conseqüências interessantes em modelos de Economia. Como exemplo, suponha que $f(x, y)$ seja a produção (medida em cruzados) de x unidades de capital e y unidades de trabalho. Duplicando as quantidades de capital e de trabalho, é razoável esperar que a produção resultante seja também duplicada, isto é, $f(2x, 2y) = 2f(x, y)$. Em termos gerais, esperamos que

$$f(tx, ty) = tf(x, y),$$

ou seja, a função de produção é homogênea de grau 1. Em Economia, essa propriedade de $f(x, y)$ recebe o nome de "retornos de escalas constantes". O Teorema de Euler aplicado à função produção estabelece que:

$$f(x, y) = x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y}. \tag{11}$$

As derivadas parciais $\partial f/\partial x$ e $\partial f/\partial y$ chamam-se o *produto marginal de capital* e *produto marginal de trabalho*, respectivamente. Nessa linguagem, (11) é um teorema da economia quantitativa cujo enunciado é: "O valor total da produção é igual ao custo do capital mais o custo do trabalho quando pagos às respectivas taxas de seu produto marginal". Nessas circunstâncias, não há excedente de lucros e no mundo real isto é uma coisa muito ruim*.

Exemplo 3 Muitas aplicações da regra da cadeia envolvem o cálculo do efeito produzido em alguma equação ou expressão quando novas variáveis são introduzidas. Como ilustração de um método que será útil na resolução da equação da onda na Seção 19.9, resolveremos agora a equação diferencial parcial

$$a\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial y}, \qquad a \neq 0. \tag{12}$$

Isto é, procuraremos determinar a função $w = f(x, y)$ que seja a mais geral e que satisfaça essa equação. Começamos introduzindo novas variáveis independentes u, v e escrevendo

$$u = x + ay, \qquad v = x - ay. \tag{13}$$

Consideramos w como uma função de u e v,

$$w = F(u, v),$$

e obtemos a equação equivalente a (12), usando a regra da cadeia

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v},$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=a\frac{\partial w}{\partial u}-a\frac{\partial w}{\partial v}.$$

Substituindo essas expressões em (12) obtemos a equação diferencial parcial

$$2a\frac{\partial w}{\partial v}=0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{\partial w}{\partial v}=0.$$

---

* Para informação adicional sobre esses assuntos, veja pp. 81-84 de J. M. Henderson e R.E. Quandt, *Microeconomic Theory* (McGraw-Hill, 1971); ou Capítulo 12 "Homogeneous Functions and Euler's Theorem", em D.E. James e C.D. Throsby, *Quantitative Methods in Economics* (Wiley, 1973). Para aplicações do Teorema de Euler em Mecânica Teórica Avançada, veja p. 382 do texto do autor *Differential Equations* (McGraw-Hill, 1972).

Essa equação é muito fácil de ser resolvida, pois indica que a função $w = F(u, v)$ é constante quando u é mantida fixa e v varia; portanto é uma função apenas de u. Isto significa que a solução desejada de (12) é

$$w = g(u) = g(x + ay),$$

onde $g(u)$ é uma função (continuamente derivável) de u *completamente arbitrária.* Pedimos desculpas aos estudantes por essa inclusão "caída do céu" das equações de transformação (13) que surgiram sem nenhuma explicação. Entretanto, alguns dos desenvolvimentos da Seção 19.9 farão essa substituição parecer perfeitamente natural.

Exemplo 4 As derivadas parciais são os principais instrumentos matemáticos utilizados em Termodinâmica. É prática universal nessa ciência evitar confusão usando índices nas derivadas parciais para especificar a variável (ou variáveis) mantida fixa na derivação. Assim, se $w = F(x, y)$, então $\partial w/\partial x$ seria denotada por

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_y.$$

Essa notação indica que w está sendo considerada função de x e y e que y é mantida fixa e x é a variável de derivação. Essa prática pode parecer supérflua, mas a seguinte situação – que é bem comum em termodinâmica – mostra que não é.

Seja $w = f(x, y)$, onde y é uma função $g(x, t)$ de x e de uma outra variável t; assim w é uma função composta de x e t e calculamos sua derivada parcial com relação a x.

Esta é uma situação típica de regra da cadeia com x e y como variáveis intermediárias e x e t como variáveis independentes:

$$w = f(x, y) \qquad \text{onde} \quad \begin{cases} x = x, \\ y = g(x, t). \end{cases}$$

Pela regra da cadeia obtemos

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}, \tag{14}$$

logo

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}. \tag{15}$$

Infelizmente essa equação contém duas derivadas parciais de w com relação a x. Fazendo um pouco de esforço mental podemos concluir que $\partial w/\partial x$ no primeiro membro de (15) é a derivada da função composta, enquanto $\partial w/\partial x$ do segundo membro é a derivada de $w = f(x, y)$. Apesar disso, essa notação ambígua leva à confusão e contraria o espírito global dos símbolos matemáticos, que pretendem correção com um mínimo de esforço. Entretanto, utilizando a notação com os índices da Termodinâmica, escrevemos (14) como

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_t = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_y \left(\frac{\partial x}{\partial x}\right)_t + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_x \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_t.$$

Como $(\partial x/\partial x)_t = 1$, chegamos finalmente a

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_t = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_y + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_x \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_t, \tag{16}$$

que é talvez desajustada, mas menos sujeita a má compreensão do que (15)*.

Problemas

Nos Problemas 1 a 4, calcule dw/dt de suas maneiras: (a) usando a regra da cadeia e depois expressando tudo em termos de t e (b) primeiro substituindo e depois derivando.

1. $w = e^{x^2+y^2}$, $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$.
2. $w = xy + yz + zx$, $x = 3t^2$, $y = e^t$, $z = e^{-t}$.
3. $w = \dfrac{3xy}{x^2 - y^2}$, $x = t^2$, $y = 3t$.
4. $w = \ln(x^4 + 2x^2y + 3y^2)$, $x = t$, $y = 2t^2$.

Nos problemas 5 e 6, calcule $\partial w/\partial t$ e $\partial w/\partial u$ pela regra da cadeia e confira seus resultados usando um outro método.

5. $w = x^2 + y^2$, $x = t^2 - u^2$, $y = 2tu$.
6. $w = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$, $x = t \cos u$, $y = t \operatorname{sen} u$.

---

* Os estudantes cujo principal interesse é Física podem ler discussões desses assuntos em algum dos tratados -padrão. Veja, por exemplo, p. 19 de Enrico Fermi, *Thermodynamics* (Dover, 1956); p. 28 de Philip M. Morse, *Thermal Physics* (W.A. Benjamin, 1969); ou pp. 30-33, 52-55 de F.W. Sears, *Thermodynamics* (Addison-Wesley, 1953).

7. Sendo f uma função (continuamente diferenciável) qualquer, mostre que $w = f(x^2 - y^2)$ é uma solução da equação diferencial parcial

$$y\frac{\partial w}{\partial x} + x\frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

Sugestão: escreva $w = f(u)$ onde $u = x^2 - y^2$ e aplique a regra da cadeia com apenas uma variável intermediária.

8. Sendo a e b constantes e $w = f(ax + by)$, mostre que

$$b\frac{\partial w}{\partial x} = a\frac{\partial w}{\partial y}.$$

9. Sendo $w = f(x^2 - y^2, y^2 - x^2)$, mostre que

$$y\frac{\partial w}{\partial x} + x\frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

10. Sendo $w = f\left(\dfrac{y - x}{xy}, \dfrac{z - y}{yz}\right)$, mostre que

$$x^2\frac{\partial w}{\partial x} + y^2\frac{\partial w}{\partial y} + z^2\frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

11. A diferencial dw de uma função $w = f(x, y, z)$ é definida por (8) apenas no caso em que x, y, z são variáveis independentes. Se x, y, z não forem independentes mas sim funções de variáveis independentes t, u, então dw deve ser definido por

$$dw = \frac{\partial w}{\partial t}\,dt + \frac{\partial w}{\partial u}\,du.$$

Mostre que essa definição leva a (8), de modo que (8) permanece válida, não importando serem x, y, z independentes ou não.

12. Se u e v são ambas funções de x, y, z, mostre que

(a) $d(c) = 0$, c é constante;
(b) $d(cu) = c\,du$;
(c) $d(u + v) = du + dv$;
(d) $d(uv) = u\,dv + v\,du$;
(e) $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\,du - u\,dv}{v^2}$;
(f) se $w = f(u)$, então $dw = f'(u)\,du$.

13. Verificar o Teorema de Euler (10) para cada uma das seguintes funções:

(a) $f(x, y) = xy^2 + x^2y - y^3$;
(b) $f(x, y) = e^{x/y}$;
(c) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$;
(d) $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{x + y}}{x}$.

14. Sendo $w = f(x, y)$, onde $x = r\cos\theta$ e $y = r\,\text{sen}\,\theta$, mostre que

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2.$$

15. Sendo α uma constante e $w = f(x, y)$, onde $x = u\cos\alpha - v\,\text{sen}\,\alpha$ e $y = u\,\text{sen}\,\alpha + v\cos\alpha$, mostre que

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2.$$

16. Sendo $w = f(x, y)$, onde $x = e^u\cos v$ e $y = e^u\,\text{sen}\,v$, mostre que

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 = e^{-2u}\left[\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2\right].$$

17. Obtenha a fórmula (16) usando diferenciais, como se segue:
(a) Escreva

$$dw = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_y dx + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_x dy,$$

$$dw = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_t dx + \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)_x dt,$$

$$dy = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_t dx + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_x dt.$$

(b) Substitua dy da terceira fórmula na primeira e compare o resultado com a segunda.

18. Sejam a pressão, o volume e a temperatura absoluta de uma dada quantidade de um certo gás denotados (como usual) por p, V, T. Essas variáveis não são independentes, mas estão ligadas por uma equação da forma geral

$$f(p, V, T) = 0,$$

que se chama *equação de estado*. Essa equação determina qualquer uma das variáveis como uma função das outras duas.
(a) Calculando dp e dV e eliminando dV, mostre que

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T = \frac{1}{(\partial V/\partial p)_T},$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p + \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = 0,$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V = -1.$$

(b) Se a energia interna E da quantidade de gás em discussão é uma função de V e T, então, como T é uma função de p e V, E é indiretamente função de p e V. Mostre que

$$\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_p = \left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T + \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p.$$

É, às vezes, necessário trabalhar com funções da forma

$$w = F(u, v, x) = \int_u^v f(x, y)\, dy,$$

onde $u = u(x)$ e $v = v(x)$ são funções de x. Pela regra da cadeia obtemos

$$\frac{dw}{dx} = \frac{\partial w}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{dv}{dx} + \frac{\partial w}{\partial x},$$

aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo e derivando sob o sinal da integral (Problema 32 da Seção 19.2), chegamos à expressão

$$\frac{d}{dx}\int_u^v f(x, y)\, dy = -f(x, u)\frac{du}{dx} + f(x, v)\frac{dv}{dx} + \int_u^v \left[\frac{\partial}{\partial x} f(x, y)\right] dy.$$

Esta é a conhecida *fórmula de Leibniz*.

19. Verifique a fórmula de Leibniz nos seguintes casos:
    (a) $u = x$, $v = x^2$, $f(x, y) = x + y$;
    (b) $u = x$, $v = x^2$, $f(x, y) = x^3y^2 + x^2y^3$;
    (c) $u = x$, $v = x^2$, $f(x, y) = \ln y$.

19.7 PROBLEMAS DE MÁXIMO E MÍNIMO

No caso de funções de uma variável, uma das principais aplicações das derivadas é o estudo de seus máximos e mínimos. No Capítulo 4 (Volume I) desenvolvemos vários testes envolvendo as derivadas primeira e segunda de funções e utilizamos esses testes para esboçar seus gráficos e atacar uma ampla variedade de problemas geométricos e físicos. Os problemas de máximo e mínimo de funções de duas ou mais variáveis podem ser muito mais complicados. Restringimo-nos aqui a uma introdução a tais problemas, incluindo uma versão para duas variáveis do teste da segunda derivada (Observação 3, Seção 4.2).

Suponha que uma função $z = f(x, y)$ tenha um valor máximo num ponto $P_0 = (x_0, y_0)$ no interior de seu domínio. Isto significa que $f(x, y)$ está definida e que também $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ em alguma vizinhança de P_0* (Fig. 19.13, à esquerda).

---

* Nessa discussão, estamos considerando apenas o chamado máximo *relativo* (ou *local*) que leva em conta somente pontos vizinhos de P_0, mas, por simplicidade, omitimos o adjetivo.

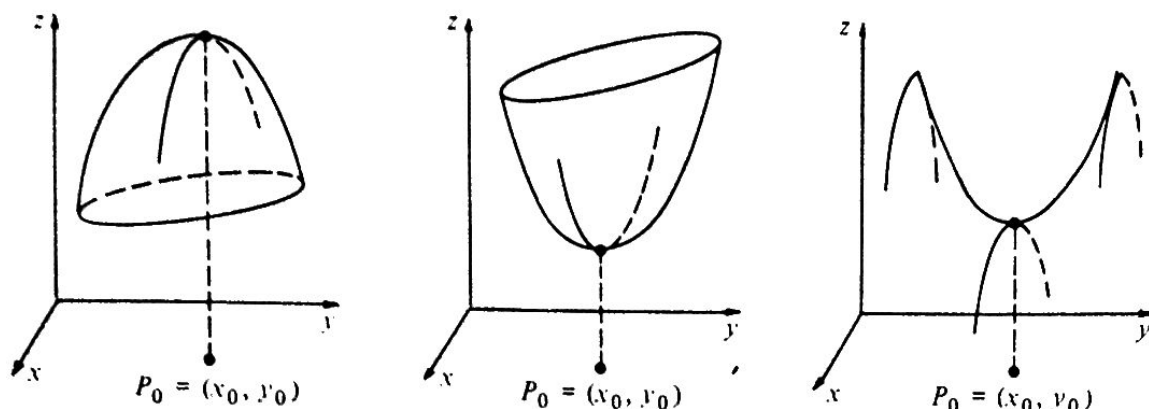



Figura 19.13

Mantendo-se y fixo no valor y_0, $z = f(x, y_0)$ é uma função apenas de x e, como ela tem um valor máximo em $x = x_0$, sua derivada deve ser zero nesse ponto, como no Capítulo 4(Volume I). Ou seja, $\partial z/\partial x = 0$ nesse ponto. Exatamente da mesma maneira, $\partial z/\partial y = 0$ nesse ponto. As equações

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \tag{1}$$

são, portanto, duas equações em duas incógnitas cuja solução são as coordenadas do ponto de máximo (x_0, y_0). Em muitos casos podemos resolver essas equações simultaneamente determinando o ponto (x_0, y_0) e assim, o valor máximo real da função.

Essas mesmas considerações se aplicam ao valor mínimo mostrado no centro da figura. Entretanto, quando tentamos localizar valores máximo ou mínimo de uma função resolvendo as equações (1), é necessário ter em mente que essas equações podem resultar nas coordenadas de um ponto de sela, como mostrado à direita da figura, onde a função tem um máximo numa direção e um mínimo em alguma outra direção. As equações (1) significam apenas que o plano tangente à superfície é horizontal, cabendo a nós decidir qual o significado desse fato.

Por analogia a nossa definição do Capítulo 4 (Volume I) referente a funções de uma variável, chamamos um ponto (x_0, y_0), em que ambas as derivadas parciais são nulas, de *ponto crítico* de $f(x, y)$.

Exemplo 1 Calcule as dimensões de uma caixa retangular com a parte superior aberta, com volume fixo de 4 m³ e com a menor área de superfície possível.

Solução Sendo x e y as arestas da base e z a altura, a área total da caixa será

$$A = xy + 2xz + 2yz.$$

Como $xyz = 4$, temos $z = 4/xy$, e a área a ser minimizada pode ser expressa como função das duas variáveis x e y,

$$A = xy + \frac{8}{y} + \frac{8}{x}. \tag{2}$$

Procuramos um ponto crítico dessa função, isto é, um ponto em que

$$\frac{\partial A}{\partial x} = y - \frac{8}{x^2} = 0, \qquad \frac{\partial A}{\partial y} = x - \frac{8}{y^2} = 0.$$

Para resolver essas equações simultaneamente, as reescrevemos

$$x^2y = 8, \qquad xy^2 = 8.$$

Dividindo membro a membro teremos $x/y = 1$, logo $y = x$ e uma das equações fica $x^3 = 8$. Portanto, $x = y = 2$. Segue-se daí que $z = 1$, logo a caixa de volume dado, sem tampa com área de superfície mínima, tem uma base quadrada e altura medindo metade do valor da aresta da base.

Nesse exemplo é geometricamente claro que o ponto crítico (2, 2) é realmente um ponto de mínimo e não um ponto de máximo ou de sela. Entretanto, numa situação mais complicada, podemos determinar um ponto crítico e mesmo assim sermos completamente incapazes de estabelecer sua natureza, baseados em considerações de senso comum como acima. Um instrumento útil para classificar pontos críticos é fornecido pelo *teste da segunda derivada:*

Seja $f(x, y)$ uma função com derivadas parciais de segunda ordem contínua numa vizinhança de um ponto crítico (x_0, y_0), e seja o número D (chamado discriminante) definido por

$$D = f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) - [f_{xy}(x_0, y_0)]^2;$$

então (x_0, y_0) é

(i) um ponto de máximo, se $D > 0$ e $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$;
(ii) um ponto de mínimo, se $D > 0$ e $F_{xx}(x_0, y_0) > 0$;
(iii) um ponto de sela, se $D < 0$.

Além disso, se $D = 0$, nada se pode afirmar, e qualquer dos comportamentos descritos de (i) a (iii) pode ocorrer.

Como há muitas provas errôneas desse teorema por aí afora, e uma prova válida exige instrumental de que não dispomos, recomendamos que os estudantes consultem livros mais avançados*.

---

* Veja, por exemplo, pp. 157-159 de R. C. Buck, *Advanced Calculus* (McGraw-Hill, 1978).

Exemplo 1 (cont.) A fim de ilustrar o uso do teste da segunda derivada, o aplicamos para verificar que o ponto crítico (2, 2) encontrado no Exemplo 1 é um ponto de mínimo da função (2). Temos

$$A_{xx} = \frac{16}{x^3}, \qquad A_{yy} = \frac{16}{y^3}, \qquad A_{xy} = 1, \tag{3}$$

logo o discriminante (3) tem o valor $D = 2 \cdot 2 - 1^2 = 3 > 0$. Como A_{xx} é também positivo no ponto (2, 2), o teste afirma que esse ponto crítico é, de fato, um ponto de mínimo, como havíamos concluído.

Exemplo 2 Determine os pontos críticos da função

$$z = 3x^2 + 2xy + y^2 + 10x + 2y + 1,$$

e utilize o teste da segunda derivada para classificá-los.

Solução Aqui temos

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6x + 2y + 10 = 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 2x + 2y + 2 = 0,$$

logo o sistema de equações que devemos resolver é

$$3x + y = -5,$$
$$x + y = -1.$$

Por manipulações simples vemos facilmente que $x = -2$ e $y = 1$ é solução do sistema; logo existe um único ponto crítico $(-2, 1)$. Nesse ponto temos

$$D = z_{xx} z_{yy} - z_{xy}^2 = 6 \cdot 2 - 2^2 = 8 > 0,$$

e como $z_{xx} = 6 > 0$, o ponto crítico é um ponto de mínimo.

O sucesso na determinação de pontos de máximo e mínimo de uma função $z = f(x, y)$ depende evidentemente de nossa capacidade de resolver duas equações simultâneas $f_x = 0$ e $f_y = 0$. Nos Exemplos 1 e 2, essas equações eram muito fáceis de se resolver. Entretanto, como os estudantes devem certamente imaginar, há muitas situações complicadas nas quais os métodos de rotina para solucionar sistemas de equações simultâneas são um tanto quanto inúteis. A única sugestão geral que podemos dar é tentar resolver uma das equações expressando uma das incógnitas em termos da outra, substituí-la na segunda equação e tentar resolver esta. Além disso, deve-se fazer conjecturas razoáveis e ser engenhoso – sugestão que é mais fácil dar do que seguir!

Problemas

Nos Problemas 1 a 8 determine os pontos críticos e classifique-os por meio do teste da segunda derivada.

1. $z = 5x^2 - 3xy + y^2 - 15x - y + 2$.
2. $z = 2x^2 + xy + 3y^2 + 10x - 9y + 11$.
3. $z = x^5 + y^4 - 5x - 32y - 3$.
4. $z = x^2 + y^3 - 6xy$.
5. $z = x^2y + 3xy - 3x^2 - 4x + 2y$.
6. $z = 3xy^2 + y^2 - 3x - 6y + 7$.
7. $z = x^3 + y^3 + 3xy + 5$.
8. $z = xy(2x + 4y + 1)$.

9. Para cada uma das seguintes funções $z = f(x, y)$, mostre que f_x, f_y e D são todos iguais a 0 na origem. Mostre também que na origem, (a) tem um mínimo, (b) um máximo e (c) um ponto de sela.

   (a) $f(x, y) = x^4 + y^4$.
   (b) $f(x, y) = -x^4 - y^4$.
   (c) $f(x, y) = x^3y^3$.

10. Mostre que uma caixa retangular com tampa e volume dado terá a menor área de superfície se for cúbica.

11. Mostre que uma caixa retangular com tampa e área de superfície dada terá o máximo volume se for um cubo.

12. Suponha que as equações $f(x) = 0$ e $f'(x) = 0$ não têm raízes comuns. Mostre que todos os pontos críticos de $z = yf(x) + g(x)$ devem ser pontos de sela.

13. Se a soma de três números x, y e z é 12, quais devem ser esses números para o produto de x, y^2 e z^3 ser o máximo possível?

14. A função $z = (y - x^2)(y - 2x^2)$ tem um ponto de sela em $(0, 0)$.
    (a) Verifique que $(0, 0)$ é o único ponto crítico.
    (b) Mostre que o teste da segunda derivada falha na tentativa de se estabelecer que esse ponto crítico é um ponto de sela.
    (c) Mostre que esse ponto crítico é um ponto de sela pelo exame direto do sinal da função nas proximidades $(0, 0)$.

(d) As "provas errôneas" do teste da segunda derivada referidas no texto são baseadas na idéia de que um ponto crítico $P_0 = (x_0, y_0)$ de $z = f(x, y)$ será necessariamente um ponto de mínimo dessa superfície se toda seção vertical da superfície por P_0 tem em P_0 um ponto de mínimo. Mostre que essa idéia é falsa examinando a seção vertical de $z = (y - x^2)(y - 2x^2)$ no plano $y = mx$.

15. Uma caixa retangular tem três faces nos planos coordenados e um vértice $P = (x, y, z)$ no primeiro octante sobre o plano $ax + by + cz = 1$. Calcule o volume da maior caixa com essas características.

16. Resolva o Problema 15 para o caso em que P esteja no elipsóide $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$. Sugestão: use derivação implícita.

17. Resolva o Problema 15 para o caso em que P esteja no parabolóide $z = 1 - x^2 - y^2$.

18. Sendo $z = f(s, t)$ o quadrado da distância entre um ponto móvel sobre a reta

$$x = -2 + 4s, \qquad y = 3 + s, \qquad z = -1 + 5s$$

e um ponto móvel sobre a reta

$$x = -1 - 2t, \qquad y = 3t, \qquad z = 3 + t,$$

mostre que essa função tem ponto crítico que é ponto de mínimo. Calcule a distância entre as retas.

19. Calcule a distância da origem ao plano $x + 2y + 3z = 14$. Sugestão: minimize $w = x^2 + y^2 + z^2$ tratando y e z como variáveis independentes.

20. As faces laterais de uma caixa retangular aberta custam o dobro, por metro quadrado, da base. Determine as dimensões relativas da maior caixa que pode ser feita com dado custo.

21. Determine a equação do plano por $(2, 2, 1)$ que forma o menor volume no primeiro octante.

22. Sendo (x_1, y_1), (x_2, y_2) e (x_3, y_3) os vértices de um triângulo, determine o ponto (x, y) para o qual a soma dos quadrados de suas distâncias aos vértices é a menor possível.

23. Sendo α, β e γ os ângulos de um triângulo, calcule o valor máximo de sen α + sen β + sen γ.

24. Dentre todos os triângulos com um dado perímetro, mostre que o triângulo eqüilátero tem a área máxima. Sugestão: seja $2s$ o perímetro, use a fórmula de Heron $A = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}$ trabalhe com ln A. (Você pode resolver esse problema sem cálculo, só com considerações intuitivas?)

25. Dentre todos os triângulos inscritos num dado círculo, mostre que o triângulo eqüilátero tem área máxima. Sugestão: sendo α, β e γ os ângulos centrais que subentendem os lados do triângulo, $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$, observe que a área do triângulo é múltiplo constante de $\text{sen}\,\alpha + \text{sen}\,\beta - \text{sen}\,(\alpha + \beta)$.

26. Quando uma corrente elétrica de grandeza I passa por um fio de resistência R, o calor gerado é proporcional a I^2R. Dois terminais são ligados por três fios de resistências R_1, R_2 e R_3. Uma dada corrente entre os terminais se dividirá de modo a minimizar o calor total produzido. Mostre que as correntes I_1, I_2 e I_3 nos três fios satisfarão as equações $I_1R_1 = I_2R_2 = I_3R_3$.

27. Um dado pentágono consiste em um triângulo isósceles no topo de um retângulo. Para um perímetro P fixo, determine as dimensões do retângulo e a altura do triângulo que conduzem à área máxima.

28. Mostre que a superfície $z = (2x^2 + y^2)e^{1 - x^2 - y^2}$ se assemelha a dois picos de montanhas ligados por duas cristas com uma depressão entre eles.

29. Um cientista repete uma experiência n vezes e obtém n pares de dados,

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \; . \; . \; . \; , (x_n, y_n).$$

A teoria subjacente à experiência sugere que esses pontos devem estar sobre uma reta $y = mx + b$; no entanto por causa de erro experimental, esses não são colineares. Ele então determina a reta que "melhor se ajusta" aos dados no sentido dos *mínimos quadrados:* escolhe m e b, que minimizam a soma dos quadrados dos desvios verticais (Fig. 19.14):

$$S = S(m, b) = \sum_{i=1}^{n} (mx_i + b - y_i)^2.$$

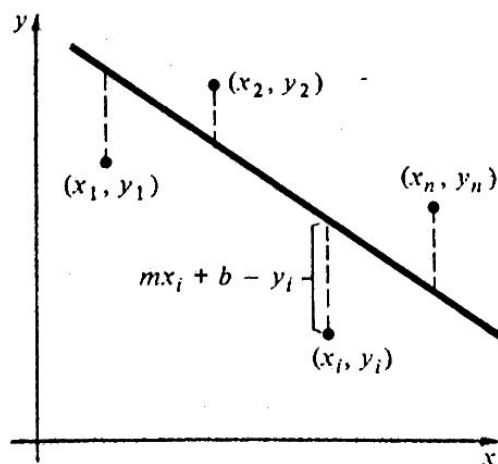



Figura 19.14

Mostre que m e b são determinados pela solução simultânea das equações

$$m \sum x_i^2 + b \sum x_i = \sum x_i y_i,$$
$$m \sum x_i + nb = \sum y_i.$$

30. Use o método dos mínimos quadrados explicado no Problema 29 para determinar a reta que melhor se ajusta aos dados (1; 1,7), (2; 1,8), (3; 2,3), (4; 3,2).

31. Use o teste da segunda derivada para verificar que S no Problema 29 é realmente minimizado pelos valores obtidos de m e b. Sugestão: é necessário usar o fato de que $(\Sigma x_i)^2 < n \Sigma x_i^2$, a menos que os x_i sejam todos iguais; como partida para estabelecer essa desigualdade, mostre que o valor máximo de $f(x, y, z) = x + y + z$ sobre a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ é $\sqrt{3}\, a$ e conclua que $(x + y + z)^2 \leqslant 3(x^2 + y^2 + z^2)$ para quaisquer três números x, y e z.

19.8 (OPCIONAL) MÁXIMOS E MÍNIMOS CONDICIONADOS. MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

Nesta seção explicaremos o método dos multiplicadores de Lagrange utilizando idéias intuitivas ligadas ao significado geométrico do gradiente. Esse método é utilizado para maximizar e minimizar funções de muitas variáveis sujeitas a uma ou mais restrições (vínculos). É um instrumento importante em Economia, Geometria Diferencial e Mecânica Teórica Avançada.

Comecemos com o caso mais simples, que é o de duas variáveis e uma restrição.

Na Seção 19.7 aprendemos como calcular máximos e mínimos de uma função $z = f(x, y)$ de duas variáveis independentes x e y. Entretanto, em muitos problemas x e y não são independentes, estando ligadas por uma *condição ou restrição lateral* sob a forma de equação

$$g(x, y) = 0. \tag{1}$$

No Capítulo 4 (volume I) nos familiarizamos com situações dessa natureza. O que se segue é uma ilustração simples.

Exemplo 1 Calcule as dimensões do retângulo de área máxima inscrito numa semicircunferência de raio a.

Solução É claro, a partir da Fig. 19.15, que o problema é maximizar a função

$$A = 2xy \tag{2}$$

Sujeita à restrição

$$x^2 + y^2 = a^2. \tag{3}$$

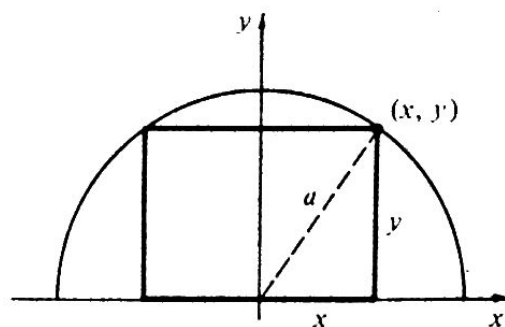



Figura 19.15

No Exemplo 3 da Seção 4.3 resolvemos o problema utilizando a restrição (3) para expressar A como função de apenas uma variável,

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}, \text{ de modo que } A = 2x\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Calculamos então dA/dx, igualamos a zero e resolvemos a equação resultante e assim por diante. Prosseguiremos com esse exemplo após algumas observações e explicações.

O procedimento que acabamos de descrever funciona suficientemente bem para esse problema, mas como método geral, tem dois defeitos. Primeiro, nesse caso particular é fácil resolver a equação (3) em y, mas em outro problema a restrição (1) pode ser tão complicada que torne difícil ou impossível a resolução. O outro defeito está em que, embora as variáveis x e y exerçam papéis idênticos no problema, elas são manipuladas de maneira diferente na solução: isolamos uma variável, x, como sendo a variável independente e a outra, y, como variável dependente. Convém muitas vezes, e é certamente mais elegante, tratar tais problemas de forma simétrica, sem que seja dada preferência a qualquer das variáveis em detrimento das outras*.

Retornemos agoa ao problema geral de maximizar uma função $f(x, y)$ sujeita à restrição $g(x, y) = 0$. Para compreender melhor, esbocemos o gráfico de $g(x, y) = 0$ (Fig. 19.16) e diversas curvas de nível $f(x, y) = c$ da função $f(x, y)$, observando o sentido em que c cresce.

---

* O grande físico Einstein disse certa vez – provavelmente num acesso de impaciência com os matemáticos e seus métodos – que "a elegância é para os alfaiates". Ele estava errado. Para os matemáticos e para os físicos teóricos, o fator estético em seu raciocínio é tão indispensável quanto os sentidos do paladar e do olfato o são para um chefe de cozinha.

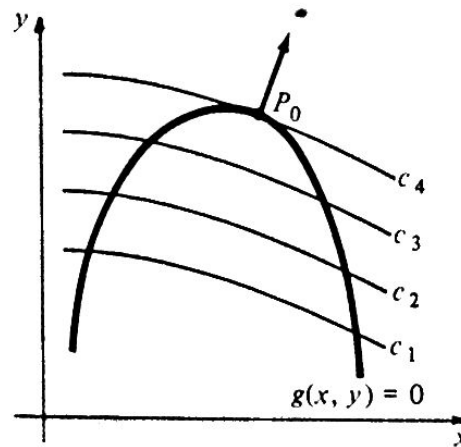



Figura 19.16.

Na figura, supomos, por exemplo, que $c_1 < c_2 < c_3 < c_4$. Para determinar o valor máximo de $f(x, y)$ sobre a curva $g(x, y) = 0$, procuramos o maior c tal que $f(x, y) = c$ intercepta $g(x, y) = 0$. Em tal ponto de interseção (P_0, na figura) as duas curvas têm a mesma reta tangente, logo elas têm a mesma reta normal. Mas os vetores

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathbf{j}$$

e

$$\text{grad } g = \frac{\partial g}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial g}{\partial y}\,\mathbf{j}$$

são normais a essas curvas e, portanto, têm a mesma direção no ponto P_0. Portanto, um vetor é múltiplo do outro em P_0, isto é,

$$\text{grad } f = \lambda \text{ grad } g \tag{4}$$

para algum número λ. (Esse argumento supõe que grad $g \neq \mathbf{0}$ em P_0, ou seja, a curva $g(x, y) = 0$ tem realmente uma tangente nesse ponto.)

Da equação vetorial (4) e de $g(x, y) = 0$, obtemos as três equações escalares

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \lambda \frac{\partial g}{\partial y}, \qquad g(x, y) = 0. \tag{5}$$

Portanto, temos três equações nas três incógnitas x, y e λ que podemos tentar resolver simultaneamente. Os pontos (x, y) que encontrarmos são os únicos pontos onde podem ocorrer os valores máximo (ou mínimo) de $f(x, y)$ com a restrição $g(x, y) = 0$. Os valores correspondentes de λ podem sair do processo de resolução de (5), mas usualmente não têm muito interesse para nós. A etapa final é calcular os valores de $f(x, y)$ nos pontos-solução (x, y) a fim de distinguir valores de máximo dos valores de mínimo.

O *método dos multiplicadores de Lagrange* é simplesmente o seguinte artifício para obter as equações (5): definimos uma função $L(x, y, \lambda)$ das três variáveis x, y e λ pela expressão

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y), \tag{6}$$

e observamos que as equações (5) são equivalentes, na ordem em que aparecem as equações

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0. \tag{7}$$

A variável λ chama-se *multiplicador de Lagrange*. Assim, para determinarmos os valores máximo ou mínimo *condicionados* de $f(x, y)$ com a restrição $g(x, y) = 0$, procuramos os valores máximo ou mínimo *não-condicionados* (ou *livres*) da função L definida por (6). Enfatizamos que esse método tem dois aspectos notáveis, que podem ser de valor prático, e são, muitas vezes, importantes para o trabalho teórico: ele não perturba a simetria do problema por uma escolha arbitrária da variável independente e faz desaparecer a restrição com o pequeno custo de introduzir uma nova variável, λ.

Exemplo 1 (cont.) Para resolvermos o problema do retângulo inscrito usando esse novo método, expressamos primeiro a restrição (3) na forma $x^2 + y^2 - a^2 = 0$ e depois escrevemos a função

$$L = 2xy - \lambda(x^2 + y^2 - a^2).$$

As equações (7) são

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2y - 2\lambda x = 0, \tag{8}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 2x - 2\lambda y = 0, \tag{9}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = -(x^2 + y^2 - a^2) = 0. \tag{10}$$

As equações (8) e (9) conduzem a $y = \lambda x$ e $x = \lambda y$; substituindo em (10) temos

$$\lambda^2(x^2 + y^2) = a^2.$$

Mas de (10) temos que $x^2 + y^2 = a^2$, logo $\lambda^2 = 1$ e $\lambda = \pm 1$. O valor $\lambda = -1$ implicaria que $y = -x$, o que é impossível, pois ambos x e y são números positivos, logo $\lambda = 1$ e $y = x$. Isto nos dá a forma do maior retângulo inscrito, ou seja, comprimento é o dobro da largura, pois

$$\text{comprimento} = 2x = 2y = 2\ (\text{largura}).$$

Se quisermos as dimensões reais desse retângulo máximo, substituímos $y = x$ em $x^2 + y^2 = a^2$, obtendo $x = y = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,a$; logo o comprimento é $2x = \sqrt{2}\,a$ e a largura é $y = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,a$.

Um dos méritos do método dos multiplicadores de Lagrange é que ele pode se estender muito facilmente a situações com mais variáveis ou mais restrições. Por exemplo, para maximizar $f(x, y, z)$ sujeita à restrição $g(x, y, z) = 0$, o gradiente

$$\text{grad}\, f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$$

deve ser normal à superfície $g(x, y, z) = 0$ (Fig. 19.17), logo grad f deve ser paralelo a grad g, e novamente temos

$$\text{grad}\, f = \lambda\, \text{grad}\, g.$$

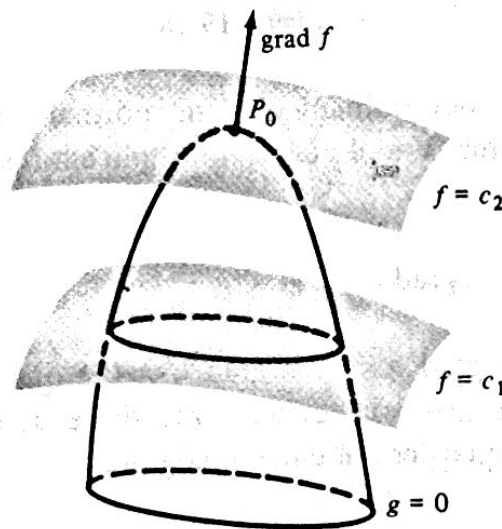



Figura 19.17.

As quatro equações,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \lambda \frac{\partial g}{\partial y}, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = \lambda \frac{\partial g}{\partial z}, \qquad g(x, y, z) = 0,$$

nas quatro incógnitas, x, y, z e λ, são novamente equivalentes às equações mais simples

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0,$$

onde $L = f(x, y, z) - \lambda g(x, y, z)$.

Analogamente, suponhamos que desejamos maximizar ou minimizar $f(x, y, z)$ sujeita a duas restrições $g(x, y, z) = 0$ e $h(x, y, z) = 0$. Cada restrição define uma superfície e, em geral, essas duas superfícies têm uma curva de interseção. Como antes, um ponto P_0 em que $f(x, y, z)$ tem um valor máximo ou mínimo sobre essa curva é um ponto em que uma superfície de nível de f é tangente à curva, isto é, um ponto em que grad f é normal à curva (Fig. 19.18).

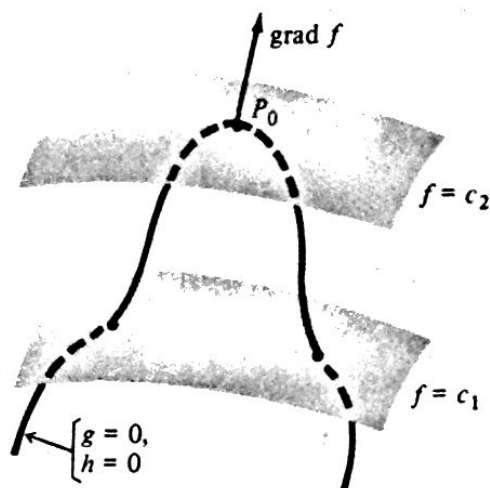



Figura 19.18

Mas os vetores grad g e grad h determinam o plano normal à curva em P_0, e como grad f está nesse plano, deve haver escalares λ e μ (*dois* multiplicadores de Lagrange dessa vez) com a propriedade

$$\text{grad } f = \lambda \text{ grad } g + \mu \text{ grad } h.$$

(Esse argumento pressupõe que grad $g \neq \mathbf{0}$ e grad $h \neq \mathbf{0}$ e que esses vetores não são paralelos.) Assim, como antes, é fácil ver que essa equação vetorial e as duas equações de restrições são equivalentes às seguintes cinco equações em cinco incógnitas:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial \mu} = 0,$$

onde $L = f(x, y, z) - \lambda g(x, y, z) - \mu h(x, y, z)$.

Exemplo 2 Determine o ponto do plano $x + 2y + 3z = 6$ mais próximo da origem.

Solução Queremos minimizar a distância $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ sujeita à restrição $x + 2y + 3z - 6 = 0$. Se a distância é mínima, seu quadrado é mínimo, e assim simplificamos um pouco os cálculos minimizando $x^2 + y^2 + z^2$ com a mesma restrição. Seja

$$L = x^2 + y^2 + z^2 - \lambda(x + 2y + 3z - 6).$$

As equações que devemos resolver são

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x - \lambda = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 2y - 2\lambda = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = 2z - 3\lambda = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = -(x + 2y + 3z - 6) = 0.$$

Substituindo os valores de x, y e z das primeiras três equações na quarta, obtemos

$$\tfrac{1}{2}\lambda + 2\lambda + \tfrac{9}{2}\lambda = 6 \qquad \text{ou} \qquad \tfrac{14}{2}\lambda = 6 \qquad \text{ou} \qquad \lambda = \tfrac{6}{7}.$$

Segue-se agora que $x = \dfrac{3}{7}$, $y = \dfrac{6}{7}$ e $z = \dfrac{9}{7}$, logo o ponto desejado é $\left(\dfrac{3}{7}, \dfrac{6}{7}, \dfrac{9}{7}\right)$.

Exemplo 3 Determine o ponto da reta de interseção dos planos $x + y + z = 1$ e $3x + 2y + z = 6$ mais próximo da origem.

Solução Dessa vez queremos minimizar $x^2 + y^2 + z^2$ sujeita às duas condições $x + y + z - 1 = 0$ e $3x + 2y + z - 6 = 0$. Escrevendo

$$L = x^2 + y^2 + z^2 - \lambda(x + y + z - 1) - \mu(3x + 2y + z - 6),$$

nossas equações serão

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x - \lambda - 3\mu = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 2y - \lambda - 2\mu = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = 2z - \lambda - \mu = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = -(x + y + z - 1) = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu} = -(3x + 2y + z - 6) = 0.$$

As primeiras três equações dão

$$x = \tfrac{1}{2}(\lambda + 3\mu), \qquad y = \tfrac{1}{2}(\lambda + 2\mu), \qquad z = \tfrac{1}{2}(\lambda + \mu).$$

Substituindo-se essas expressões nas quarta e quinta equações, e simplificando-se os resultados, obtemos

$$3\lambda + 6\mu = 2,$$
$$3\lambda + 7\mu = 6,$$

logo $\mu = 4$ e $\lambda = -\dfrac{22}{3}$. Com esses valores chegamos a $x = \dfrac{7}{3}$, $y = \dfrac{1}{3}$, $z = \dfrac{-5}{3}$, e assim o ponto desejado é $\left(\dfrac{7}{3}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{-5}{3}\right)$.

Observação 1 Em Economia, os multiplicadores de Lagrange são utilizados no problema de maximizar a produção total de uma empresa sujeita à restrição de recursos disponíveis fixos. Por exemplo, seja

$$P = f(x, y) = Ax^{\alpha}y^{\beta}, \qquad \alpha + \beta = 1,$$

a produção (medida em cruzados) resultante de x unidades de capital e y unidades de trabalho. Essa função – conhecida pelos economistas como *função de produção de Cobb-Douglas* – é homogênea de grau 1 no sentido explicado no Exemplo 2 da Seção 19.6. Se o custo de cada unidade de capital for a cruzados e de cada unidade de trabalho for b cruzados, e se um total de c cruzados estiver disponível para cobrir os custos conjuntos de capital e trabalho, o problema é maximizar a produção $P = f(x, y)$ sujeita à restrição $ax + by = c$. No Problema 23 pedimos para os estudantes mostrarem que a produção será maximizada quando $x = \alpha c/a$ e $y = \beta c/b$*.

Observação 2 No início desta seção dissemos que os multiplicadores de Lagrange têm também aplicações à Geometria Diferencial e à Mecânica Teórica Avançada. Essas aplicações são complexas demais para ser descritas aqui. Os detalhes podem ser encontrados na pp. 372-374 e 380 do texto *Differential Equations* (McGraw-Hill, 1972) do autor.

---

* Para maiores detalhes, os estudantes interessados podem procurar as funções de produção de Cobb-Douglas nos índices dos livros mencionados no primeiro rodapé da Seção 19.6.

Problemas

Resolva todos os problemas seguintes utilizando multiplicadores de Lagrange.

1. Um retângulo com lados paralelos aos eixos está inscrito na região limitada pelos eixos e pela reta $x + 2y = 2$. Calcule a área máxima desse retângulo.

2. Determine o retângulo de perímetro máximo (com lados paralelos aos eixos) que pode ser inscrito na elipse $x^2 + 4y^2 = 4$.

3. Determine o retângulo de área máxima (com lados paralelos aos eixos) que pode ser inscrito na elipse $x^2 + 4y^2 = 4$.

4. Sobre cada uma das seguintes curvas, determine os pontos que estão mais próximos da origem e aqueles que estão mais afastados:
(a) $x^2 + xy + y^2 = 3$; (b) $x^4 + 3xy + y^4 = 2$.

5. Se um cilindro tem volume fixo V_0, encontre a relação entre a altura h e o raio da base r que minimiza a área de superfície.

6. Calcule os valores máximo e mínimo de $f(x, y) = 2x^2 + y + y^2$ sobre a circunferência $x^2 + y^2 = 1$.

7. Calcule os valores máximo e mínimo de $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$ sobre a circunferência $x^2 + y2 = 1$.

8. Determine a elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ que passa pelo ponto $(4, 1)$ e tem a área mínima. Sugestão: a área dessa elipse é πab.

9. Determine o elipsóide $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$ que passa pelo ponto $(1, 2, 3)$ e tem o menor volume. Sugestão: o volume desse elipsóide é $\frac{4}{3}\pi abc$.

10. Calcule o valor máximo de $f(x, y, z) = 2x + 2y - z$ sobre a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

11. Calcule o valor mínimo de $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ sobre o plano $x - y - z = 1$.

12. Calcule o valor máximo de $f(x, y, z) = x + y + z$ sobre o elipsóide $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$.

13. Calcule o volume máximo da caixa retangular cuja soma dos comprimentos de suas arestas é $12a$.

14. Calcule o volume máximo de uma caixa retangular cuja soma das áreas de suas faces é $6a^2$.

15. (a) Mostre que de todos os triângulos inscritos numa dada circunferência, o triângulo eqüilátero tem o perímetro máximo. Sugestão: sendo a o raio da circunferência e α, β e γ os ângulos centrais subentendendo os três lados, qual o perímetro?

    (b) Na parte (a), mostre que o triângulo eqüilátero inscrito tem também a área máxima.

16. Determine o ponto sobre a reta de interseção dos planos $x + 2y + z = 1$ e $-3x - y + 2z = 4$ que está mais próximo da origem.

17. (a) Determine o ponto sobre o plano $ax + by + cz + d = 0$ que está mais próximo da origem e use essa informação para obter uma fórmula para a distância da origem ao plano.

    (b) Adapte o método usado na parte (a) para mostrar que a distância de um ponto arbitrário (x_0, y_0, z_0) ao plano dado é

$$\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

18. (a) Mostre que o triângulo com a área máxima A para um dado perímetro é eqüilátero. Sugestão: Sendo x, y e z os lados, $A = \sqrt{s(s-x)(s-y)(s-z)}$, onde $2s = x + y + z$.

    (b) Mostre que o triângulo com o menor perímetro para uma dada área é eqüilátero.

19. Se a soma de n números positivos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tem um valor fixado s, mostre que o produto $x_1, x_2 \ldots x_n$ tem s^n/n^n como seu valor máximo e conclua disto que a média geométrica de n números positivos não pode jamais exceder sua média aritmética:

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

20. (a) Calcule o valor máximo de

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

com as restrições

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1 \qquad \text{e} \qquad \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = 1.$$

(b) Use a parte (a) para provar que para quaisquer $a_1, a_2, \ldots a_n$ e $b_1, b_2, \ldots, b_n$,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{1/2}.$$

Sugestão: faça

$$x_i = \frac{a_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{1/2}} \qquad \text{e} \qquad y_i = \frac{b_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{1/2}}.$$

A desigualdade em (b), chamada *desigualdade de Schwarz*, é importante em Matemática Superior.

21. Use o método do Problema 20 para deduzir a *desigualdade de Hölder:* se $1/p + 1/q = 1$ e os a e b são números não-negativos, então

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{1/q}.$$

Observe que quando $p = q = 2$, a desigualdade de *Hölder* reduz-se à desigualdade de Schwarz.

22. Referindo-se ao Exemplo 4 da Seção 4.4 e à notação da Fig. 4.26, obtenha a Lei de Refração de Snell minimizando o tempo total de percurso

$$T = \frac{a}{v_a \cos \alpha} + \frac{b}{v_w \cos \beta},$$

sujeito à condição $a \cdot \operatorname{tg} \alpha + b \cdot \operatorname{tg} \beta = \text{constante}$.

23. Mostre que, para maximizar a função de produção de Cobb-Douglas $P = f(x, y) = Ax^{\alpha} y^{\beta} (\alpha + \beta = 1)$, sujeita à condição de custos totais fixos, $ax + by = c$, devemos ter $x = \alpha c/a$ e $y = \beta c/b$.

19.9 (OPCIONAL) EQUAÇÃO DE LAPLACE, EQUAÇÃO DO CALOR E EQUAÇÃO DA ONDA

Uma grande parte da Física Matemática está relacionada com três equações diferenciais parciais clássicas: *a equação de Laplace,*

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}=0;$$

a *equação do calor,*

$$a^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)=\frac{\partial w}{\partial t};$$

e a *equação da onda,*

$$a^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)=\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}.$$

Observando-se (2) e (3) notamos que a variável w é compreendida como sendo função do tempo t e das coordenadas espaciais x, y e z de um ponto P; em (1) w depende apenas de x, y e z e é independente de t. A quantidade a é uma constante. Cada uma das três equações tem também versões bidimensionais e unidimensionais, dependendo de estarem presentes duas coordenadas espaciais ou apenas uma. Assim,

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0$$

é a equação de Laplace bidimensional e

$$a^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=\frac{\partial w}{\partial t} \qquad \text{e} \qquad a^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

são as equações do calor e da onda unidimensionais.

Um estudo completo dessas equações pode ocupar anos, pois seu significado físico é extraordinariamente rico. É também necessário muito acúmulo de conhecimentos para dominar os vários ramos da Matemática Avançada necessários para resolvê-la e interpretá-la. Nesta seção consideraremos diversos aspectos dessas equações que não requerem técnicas muito aprofundadas.

Equação de Laplace

Partículas de massas $m_1, m_2, ..., m_n$ sofrem atração recíproca de acordo com a Lei da Gravitação; se colocadas em pontos fixos $P_1, P_2, ..., P_n$, o *potencial* devido a essas partículas em qualquer ponto P (isto é, o trabalho realizado contra as forças de atração dessas massas para mover uma massa unitária de P a uma distância infinita) é

$$w = \frac{Gm_1}{PP_1} + \frac{Gm_2}{PP_2} + \cdots + \frac{Gm_n}{PP_n}, \qquad (5)$$

onde G é a constante gravitacional*. Os pontos $P, P_1, P_2, ..., P_n$ têm coordenadas cartesianas $(x, y, z), (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), ..., (x_n, y_n, z_n)$; assim temos que

$$PP_1 = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2},$$

e expressões semelhantes para as outras distâncias. É bastante fácil verificar que o potencial w satisfaz a equação de Laplace (1). Essa equação independe das massas em particular e das coordenadas dos pontos em que estão localizadas: logo ela é satisfeita pelo potencial produzido no espaço vazio por uma distribuição de massa discreta ou contínua arbitrária.

A função w definida por (5) chama-se *potencial gravitacional*. Trabalhando com partículas carregadas de cargas elétricas $q_1, q_2, ..., q_n$, seu *potencial eletrostático* tem a mesma forma que (5), onde os m são substituídos pelos q e G pela constante de Coulomb; logo ela satisfaz também a equação de Laplace. Na verdade essa equação tem uma variedade tâo grande de aplicações que seu estudo forma um ramo da Matemética conhecido como *Teoria do Potencial*.

A Equação do Calor

Quando estudamos o fluxo de calor em corpos condutores, encontramos um tipo inteiramente diferente de problema que conduz a uma equação diferencial parcial.

No interior de um corpo em que o calor está fluindo de uma região a outra, a temperatura geralmente é diferente nos diferentes pontos num instante qualquer, variando também com o tempo num ponto fixo qualquer. Assim, a temperatura w é uma função das coordenadas espaciais x, y e z e do tempo t, digamos $w = f(x, y, z, t)$. A forma precisa dessa função naturalmente

---

* Veja o Exemplo 2 da Seção 7.8 (Volume I). Nesse exemplo mostramos que se duas partículas de massas M e m estão separadas por uma distância a, então o trabalho realizado para separá-las a uma distância infinita é GMm/a.

depende da forma do corpo, das características térmicas desse material, da distribuição inicial de temperatura, e das condições existentes na superfície do corpo. O físico-matemático francês Fourier estudou esse problema em seu tratado clássico (publicado em 1822) *Théorie Analytique de la Chaleur* (*Teoria Analítica do Calor*). Ele utilizou princípios físicos para mostrar que a temperatura w é função que deve satisfazer a equação do calor (2)*. Iremos acompanhar seu raciocínio para uma situação unidimensional simples e desse modo deduzir a equação unidimensional do calor.

Os seguintes princípios físicos serão necessários.

(a) O calor flui no sentido em que a temperatura decresce, isto é, de regiões quentes para regiões frias.

(b) A taxa em que o calor flui através de uma área é proporcional à área e à taxa de variação da temperatura em relação à distância, em direção perpendicular à área. (O fator de proporcionalidade é denotado por k e se chama *condutividade térmica* da substância.)

(c) A quantidade de calor ganho ou perdido por um corpo quando sua temperatura varia, isto é, a variação de sua energia térmica, é proporcional à massa do corpo e à variação da temperatura. (O fator de proporcionalidade é denotado por c e se chama *calor específico* da substância.)

Consideremos agora o fluxo de calor num tubo cilíndrico estreito cuja área de seção transversal é A (Fig. 19.19) e cuja superfície lateral está perfeitamente isolada: não flui calor através dela. A palavra "estreito" usada acima significa que se considera que a *temperatura* é uniforme em qualquer seção transversal, sendo portanto função apenas do tempo e da posição da seção transversal, $w = f(x, t)$. Examinemos a taxa de variação do calor numa "fatia" estreita do tubo entre as posições x e $x + \Delta x$.

Sendo ρ a densidade do tubo, isto é, sua massa por unidade de volume, então a massa da "fatia" é

$$\Delta m = \rho A \, \Delta x.$$

* Essa mesma equação diferencial parcial descreve também uma classe mais geral de processos de difusão, sendo, às vezes, chamada de *equação de difusão.*

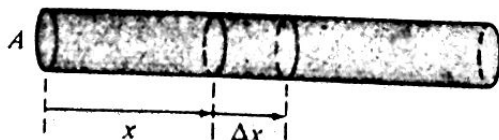



Figura 19.19

Além disso, se Δw é a variação da temperatura no ponto x, num pequeno intervalo de tempo Δt, então (c) indica que a quantidade de calor que entra na "fatia" nesse intervalo de tempo é

$$\Delta H = c\,\Delta m\,\Delta w = c\rho A\,\Delta x\,\Delta w,$$

logo a taxa em que o calor está entrando é aproximadamente

$$\frac{\Delta H}{\Delta t} = c\rho A\,\Delta x\,\frac{\Delta w}{\Delta t}. \tag{6}$$

Admitimos que não seja gerado calor dentro da "fatia" – como por exemplo, por processos químicos ou elétricos –, de modo que ela recebe calor apenas em virtude do fluxo de calor por meio de suas faces. Por (6) a taxa em que o calor flui por meio da face esquerda é

$$-kA\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_x.$$

O sinal negativo foi escolhido para ficarmos de acordo com (a): essa quantidade será positiva nos casos em que $\partial w/\partial x$ é negativo. Analogamente, a taxa em que o calor flui por meio da face direita é

$$kA\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{x+\Delta x}.$$

Assim a taxa total do fluxo de calor na "fatia" é

$$kA\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{x+\Delta x} - kA\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_x. \tag{7}$$

Igualando-se as expressões (6) e (7), obtemos

$$kA\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{x+\Delta x} - kA\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_x = c\rho A\,\Delta x\,\frac{\Delta w}{\Delta t},$$

ou

$$\frac{k}{c\rho}\left[\frac{\partial w/\partial x|_{x+\Delta x} - \partial w/\partial x|_x}{\Delta x}\right] = \frac{\Delta w}{\Delta t}.$$

Finalmente, para Δx e $\Delta t \to 0$, obtemos a equação desejada

$$a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial w}{\partial t},$$

onde $a^2 = k/c\rho$. O raciocínio físico que fizemos levou à equação unidimensional do calor. A equação tridimensional (2) pode ser deduzida essencialmente da mesma maneira.

A Equação da Onda

Todos os fenômenos de propagação de ondas, como, por exemplo, ondas de luz, som ou rádio, são governados pela equação da onda (3). Consideraremos o caso simples de uma onda unidimensional descrita pela equação unidimensional da onda.

$$a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \tag{8}$$

Tal onda $w = f(x, t)$ como envolve alguma propriedade como a posição de uma partícula, a intensidade de um campo elétrico ou a pressão de uma coluna de ar que depende não só da posição x mas do tempo t.

A fim de compreendermos a ligação entre a noção que temos de ondas e a equação (8), consideraremos uma função $w = F(x - at)$. Em $t = 0$, ela define a curva $w = F(x)$, e, em qualquer instante posterior $t = t_1$, define a curva $w = F(x - at_1)$. É fácil ver que essas curvas são idênticas, exceto que a posterior é transladada para a direita a uma distância at_1 e, portanto, com velocidade

$$v = \frac{at_1}{t_1} = a.$$

Assim a função $w = F(x - at)$ representa uma "figura em movimento" que se desloca para a direita com velocidade a (Fig. 19.20).

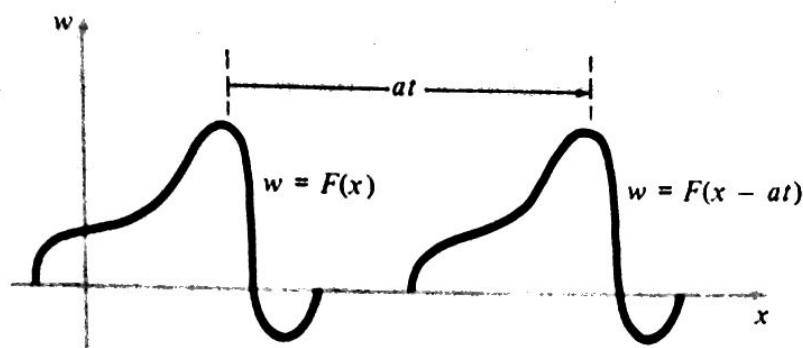



Figura 19.20 Uma "figura em movimento".

Considerando-se que $w = F(u)$ possui derivada segunda, teremos, pela regra da cadeia aplicada a $w = F(u)$, onde $u = x - a$:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = F'(u), \qquad \frac{\partial w}{\partial t} = F'(u)\cdot(-a) = -aF'(u),$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = F''(u), \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -aF''(u)\cdot(-a) = a^2F''(u).$$

Fica claro, a partir desses resultados, que $w = F(x - at)$ satisfaz a equação unidimensional da onda (8).

Analogamente, a função $w = G(x + at)$ representa uma "figura em movimento" que se desloca para a esquerda com velocidade A. É igualmente fácil mostrar que essa função é uma solução de (8). Pela linearidade da derivação, segue-se que a soma dessas duas funções

$$w = F(x - at) + G(x + at) \tag{9}$$

também é solução. Na realidade, pode-se mostrar (veja o Problema 8) que para F e G, funções arbitrárias duas vezes diferenciáveis, (9) é solução geral de (8) no sentido de que qualquer solução de (8) tem a forma (9). É bastante claro que a função (9) representa a onda unidimensional mais geral, e o resultado que obtivermos confirma isto.

Problemas

1. (a) Verifique que a função

$$w = \frac{1}{\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2}}$$

satisfaz a equação de Laplace (1).

(b) Uma equação diferencial chama-se *linear* se a soma de duas soluções quaisquer é solução e se qualquer constante multiplicando uma solução conduz a uma outra solução. Verifique que a equação de Laplace (1) é linear e conclua, a partir de (a), que o potencial (5) é solução.

2. (a) Verifique se a função

$$w = \frac{1}{\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}}$$

é ou não solução da equação bidimensional de Laplace (4).

(b) Mostre que a função $w = \ln[(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2]$ é solução da equação bidimensional de Laplace (4).

3. Verifique que cada uma das seguintes funções satisfaz a equação de Laplace (1):

(a) $w = x^2 + 2y^2 - 3z^2$;
(b) $w = x^2 - y^2 + 57z$;
(c) $w = 4z^3 - 6(x^2 + y^2)z$;
(d) $w = e^{-2x} \operatorname{sen} 2y + 3z$;
(e) $w = e^{3x} e^{4y} \cos 5z$;
(f) $w = e^{13x} \operatorname{sen} 12y \cos 5z$.

4. Sendo $w = f(x, y)$ transformada em $w = F(r, \theta)$ pelas equações $x = r \cos \theta$, $y = r \operatorname{sen} \theta$ (estas são as equações de transformação de coordenadas cartesianas em polares), mostre que a equação bidimensional de Laplace

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

se torna

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} = 0.$$

5. Utilize o Problema 4 para mostrar que cada uma das funções $w = r^n \operatorname{sen} n\theta$ e $w_2 = r^n \cos n\theta$ satisfaz a equação de Laplace em duas dimensões.

6. Suponha que uma solução $w = f(x, t)$ da equação unidimensional do calor

$$a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial w}{\partial t}$$

tenha a forma $f(x, t) = g(x)h(t)$, isto é, que seja o produto de uma função de x e uma função de t.

(a) Mostre que $a^2 g''(x)h(t) = g(x)h'(t)$.

(b) A parte (a) implica que

$$\frac{g''(x)}{g(x)} = \frac{h'(t)}{a^2 h(t)},$$

onde o primeiro membro é uma função apenas de x e o segundo membro é uma função apenas de t. Deduza que existe uma constante λ tal que $g''/g = \lambda$ e $h'/(a^2 h) = \lambda$.

(c) Suponha que a constante λ da parte (b) seja negativa, e possa, portanto, ser escrita na forma $\lambda = -k^2$ para algum número positivo k. Mostre que $g(x) = c_1 \operatorname{sen} kx + c_2 \cos kx$ é solução da equação $g''/g = -k^2$ para quaisquer constante c_1 e c_2.

(d) Mostre que $h(t) = ce^{-a^2k^2t}$ é solução da equação $h'/(a^2 h) = -k^2$ para qualquer constante c. Assim, todas as funções

$$w = f(x, t) = ce^{-a^2k^2t}(c_1 \operatorname{sen} kx + c_2 \cos kx)$$

são soluções da equação do calor e qualquer soma de tais soluções é solução.

7. É solução *estacionária* da equação do calor (2) uma solução que não depende de t. Nesse caso a equação do calor reduz-se à equação de Laplace (1). Resolva a equação unidimensional de Laplace.

8. Use a regra da cadeia para mostrar que com a mudança de variáveis especificada por $u = x - at$, $v = x + at$, a equação

$$a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \qquad \text{torna-se} \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial u\, \partial v} = 0.$$

Sugestão: analise o Exemplo 3 da seção 19.6. Use o resultado para mostrar que $w = F(x - at) + G(x + at)$ é a solução mais geral da equação unidimensional da onda.

19.10 (OPCIONAL) FUNÇÕES IMPLÍCITAS

Na Seção 3.4 afirmamos que tendo uma equação

$$F(x, y) = 0, \tag{1}$$

comumente existirá pelo menos uma função

$$y = f(x) \tag{2}$$

que "resolve" (1), no sentido de que (2) reduz (1) a uma identidade em x. Tendo em mente que y em (1) é função de x, derivamos a identidade (1) com relação a x e resolvemos a equação resultante para dy/dx, chamando esse processo de *derivação implícita*. Por exemplo, a equação

$$x^2y^5 - 2xy + 1 = 0, \tag{3}$$

por derivação com relação a x, fornece

$$x^2 \cdot 5y^4 \frac{dy}{dx} + 2xy^5 - 2x\frac{dy}{dx} - 2y = 0, \tag{4}$$

logo

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y - 2xy^5}{5x^2y^4 - 2x}. \tag{5}$$

A maioria dos estudantes sente-se, com razão, pouco à vontade com a derivação implícita. Por um lado, nesse caso particular não sabemos se (3) define realmente y como função de x ou não; se não, o cálculo subseqüente que leva a (5) não tem nenhum significado. Além disso, o próprio procedimento é um tanto confuso, pois requer que mantenhamos em mente os papéis diferentes exercidos pelas variáveis x e y. Estamos agora aptos a esclarecer o significado desse processo e também a apresentar um enunciado preciso das condições em que uma equação da forma (1) define uma função derivável (2).

Ampliemos um pouco essa discussão e, em vez de (1), consideremos uma equação da forma

$$F(x, y) = c, \tag{6}$$

cujo gráfico é uma curva de nível da função $z = F(x, y)$. Por exemplo, o gráfico de

$$x^2 + y^2 = 1 \tag{7}$$

é uma circunferência centrada na origem (Fig. 19.21, à esquerda) e esta é uma curva de nível da função $F(x, y) = x^2 + y^2$.

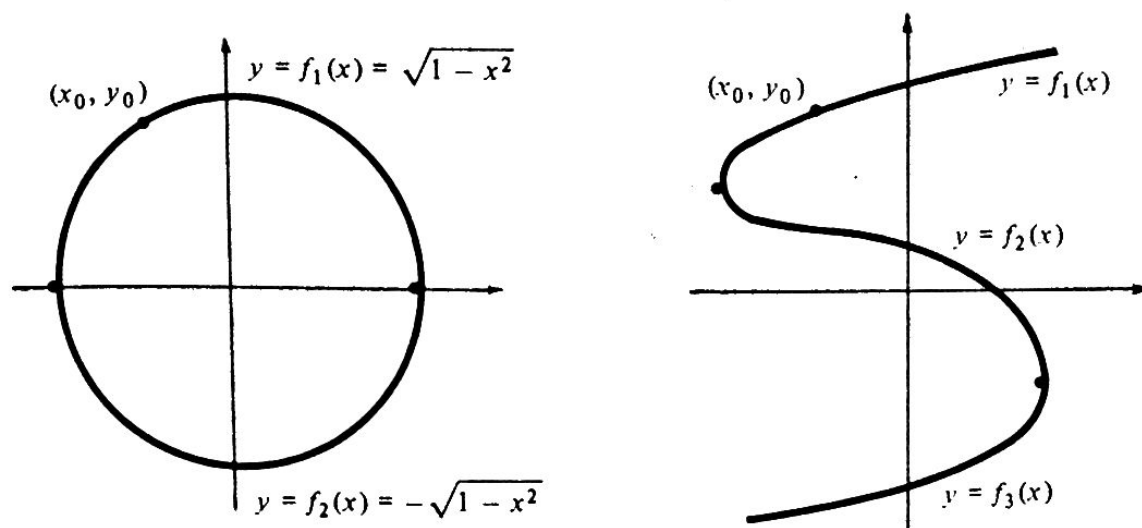



Figura 19.21.

Geralmente, como nesse caso, o gráfico de (6) será uma espécie de curva que não é gráfico de uma única função. Entretanto, mesmo que o gráfico completo de (7) não seja o gráfico de uma única função, é claro que todo ponto (x_0, y_0) desse gráfico, com $y_0 \neq 0$, pertence a uma porção do gráfico que é gráfico de uma função, e mais de uma função derivável. Especificamente, se $y_0 > 0$, então (x_0, y_0) pertence ao gráfico da função

$$y = f_1(x) = \sqrt{1 - x^2}, \tag{8}$$

e se $y_0 < 0$, então (x_0, y_0) pertence ao gráfico da função

$$y = f_2(x) = -\sqrt{1 - x^2}. \tag{9}$$

Analogamente, o gráfico de (6) pode se constituir dos gráficos de uma ou mais funções diferenciáveis $y = f(x)$ (Fig. 19.21, à direita).

A seguir salientamos que a função $z = F(x, y)$ tem o valor constante c sobre o gráfico de qualquer função $y = f(x)$,

$$z = F[x, f(x)] = c.$$

Como habitualmente, supomos que $F(x, y)$ tenha derivadas parciais contínuas; logo podemos escrever

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0,$$

ou, de modo equivalente,

$$\frac{dz}{dx} = F_x(x, y) + F_y(x, y)\frac{dy}{dx} = 0. \tag{10}$$

O termo médio aqui é exatamente o cálculo da regra da cadeia de dz/dx, $z = F(x, y)$ e y função de x; o resultado é zero, pois z é constante. Se $F_y(x, y) \neq 0$, a equação (10) pode ser resolvida para dy/dx,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}. \tag{11}$$

Utilizando a linguagem da Seção 3.4 (Volume I); toda função diferenciável $y = f(x)$ com a propriedade de que

$$F[x, f(x)] = c$$

é uma *função implícita* definida por (6); (11) fornece uma fórmula geral para o cálculo da derivada de tal função.

Se aplicamos a fórmula (11) à equação (7), onde $F(x, y) = x^2 + y^2$, obtemos

$$F_x = 2x \qquad \text{e} \qquad F_y = 2y, \quad \text{logo} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{x}{y}, \qquad y \neq 0. \tag{12}$$

Sabemos, nesse caso, a partir de (8) e (9), que (7) determina realmente duas funções implícitas $y = f(x)$. Logo os cálculos (12) são legítimos e se aplicam a ambas as funções, contanto que evitemos os pontos em que $y = 0$. Entretanto, suponhamos que, em vez de (7), tenhamos uma da equações

$$x^2 + y^2 = -1 \qquad \text{ou} \qquad x^2 + y^2 = 0. \tag{13}$$

Efetuando cálculos sem pensar, podemos escrever os cálculos (12) exatamente como antes e "encontrar" dy/dx. A dificuldade é óbvia: como o gráfico de (13) é ou vazio ou consiste em um único ponto, não existe função implícita $y = f(x)$, e esses cálculos nada mais são que uma espécie de ventriloquismo matemático, que parece dizer alguma coisa mas na verdade não diz absolutamente nada.

A fim de evitarmos cometer tais contra-sensos, é necessário ter um conhecimento definido de que existem funções implícitas. Este é o propósito do

---

Teorema da Função Implícita *Suponha que $F(x, y)$ tenha derivadas parciais contínuas em toda uma vizinhança de um ponto (x_0, y_0) e que $F(x_0, y_0) = c$ e $F_y(x_0, y_0) \neq 0$. Então existe um intervalo em torno de x_0 com a propriedade de que existe exatamente uma função diferenciável $y = f(x)$ definida em I tal que $y_0 = f(x_0)$ e*

$$F[x, f(x)] = c.$$

Além disso, a derivada dessa função é dada pela fórmula

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y},$$

e é portanto contínua.

Deve ser entendido que esse teorema é uma afirmação puramente teórica de que a função implícita especificada $y = f(x)$ de fato existe e não tem relevância o aspecto de se poder ou não encontrar uma fórmula simples para essa função. A demonstração do teorema é dada no Apêndice B.9.

Exemplo 1 Consideramos uma vez mais a equação já mencionada

$$F(x, y) = x^2y^5 - 2xy + 1 = 0. \tag{3}$$

É claro que o ponto (1, 1) pertence ao gráfico, logo o gráfico é não-vazio. Como $F_x = 2xy^5 - 2y$ e $F_y = 5x^2y^4 - 2x$, nosso teorema garante que a equação (3) determina uma função implícita $y = f(x)$ em torno de qualquer ponto do gráfico em que $F_y = 5x^2y^4 - 2x \neq 0$, por exemplo, do ponto (1, 1). É instrutivo escrever a equação (10) para esse caso,

$$(2xy^5 - 2y) + (5x^2y^4 - 2x)\frac{dy}{dx} = 0, \tag{14}$$

e comparar o resultado com (4), onde a derivação implícita foi realizada pelo método antigo. A equação (14) conduz evidentemente a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y - 2xy^5}{5x^2y^4 - 2x},$$

como antes.

A simplicidade desse método é ainda mais claramente visível quando há três variáveis na equação dada.

Assim suponha que uma equação $F(x, y, z) = c$ defina uma certa função implícita $z = f(x, y)$. Determinemos $\partial z/\partial x$ em termos da função $F(x, y, z)$. As equações

$$w = F(x, y, z),$$

$$x = x, \qquad y = y, \qquad z = f(x, y),$$

dão w como uma função composta de x e y. Além disso,

$$w = F[x, y, f(x, y)] = c.$$

Logo, derivando-se essa equação em relação a x, a regra da cadeia implica

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0.$$

Obtemos, portanto,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z}, \tag{15}$$

e essa fórmula é válida sempre que $\partial F/\partial z \neq 0$. Exatamente da mesma maneira, obtemos também

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial z}. \tag{16}$$

Como os estudantes certamente já devem ter percebido, existe também um Teorema da Função Implícita que cobre essa situação. Resumidamente ele diz que se $\partial F/\partial z \neq 0$ num ponto (x_0, y_0, z_0) sobre uma superfície $F(x, y, z) = c$, então numa vizinhança desse ponto a superfície define uma única função implícita $z = f(x, y)$ tal que $z_0 = f(x_0, y_0)$ e, além disso, as derivadas parciais dessa função são dadas por (15) e (16).

Exemplo 2 É fácil verificar que o ponto $(1, 2, -1)$ pertence ao gráfico da equação

$$x^2z + yz^5 + 2xy^3 = 13, \tag{17}$$

logo esse gráfico é não-vazio. Se essa equação define uma função implícita $z = f(x, y)$ numa vizinhança desse ponto, podemos calcular $\partial z/\partial x$ por derivação implícita da maneira antiga. Isto significa que derivamos (17) implicitamente em relação a x, pensando em y como constante, o que dá

$$x^2\frac{\partial z}{\partial x} + 2xz + y\cdot 5z^4\frac{\partial z}{\partial x} + 2y^3 = 0,$$

logo

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2xz + 2y^3}{x^2 + 5yz^4}.$$

Esse procedimento não é satisfatório, pois não sabemos de início se tal função $z = f(x, y)$ realmente existe: afinal, (17) é uma equação do quinto grau em z. É insatisfatório também porque na derivação implícita cada uma das três variáveis pode ser tratada de maneira diferente, e é bem fácil se perder de vista o que está ocorrendo. O que acabamos de apresentar fornece um método muito melhor. Temos

$$F(x, y, z) = x^2z + yz^5 + 2xy^3,$$

logo

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2xz + 2y^3 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial F}{\partial z} = x^2 + 5yz^4.$$

É fácil vermos que $\partial F/\partial z = 11 \neq 0$ em $(1, 2, -1)$, logo o Teorema da Função Implícita garante que $z = f(x, y)$ existe. Além disso, por (15) temos

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z} = -\frac{2xz + 2y^3}{x^2 + 5yz^4},$$

o que evita a complicada derivação implícita.

Observação A versão bidimensional do Teorema da Função Implícita permite-nos completar uma parte de algo inacabado. Nos capítulos anteriores deste livro demos bastante atenção ao problema importante de determinar a função inversa de uma dada função $g(y) = x$; em outras palavras, ao problema de se resolver a equação

$$F(x, y) = g(y) - x = 0 \tag{18}$$

na variável y. Especificamente, este é o caminho pelo qual as funções familiares $y = \ln x$, $y =$ arc sen x e $y =$ arc tg x foram definidas. Cada uma dessas funções inversas foi estudada *ad hoc*, mas de maneira perfeitamente legítima. Estamos agora em posição de esboçar a inferência geral de que quando $g(y)$ tem derivada contínua e $\partial F/\partial y = g'(y) \neq 0$, então (18) pode, de fato, ser resolvida para y, $y = f(x)$. Podemos afirmar também que essa função tem derivada contínua dada por

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y} = -\frac{-1}{g'(y)} = \frac{1}{dx/dy}.$$

Isto completa a linha de pensamento descrita brevemente na Observação 2 da Seção 9.5 (Volume I).

Problemas

Nos Problemas 1 a 6, use a fórmula (1) para calcular dy/dx.

1. $y^2 - 3x^2 - 1 = 0$.
2. $x^6 + 2y^4 = 1$.
3. $x \operatorname{sen} y = x + y$.
4. $\operatorname{sen} y + \operatorname{tg} y = x^2 + x^3$.
5. $e^{xy} = 2xy^2$.
6. $e^x \operatorname{sen} y = e^y \cos x$.

Nos Problemas 7 a 10, use as fórmulas (15) e (16) para calcular $\partial z/\partial x$ e $\partial z/\partial y$.

7. $\ln z = z + 2y - 3x$.
8. $\operatorname{arc\,tg}^{-1} x + \operatorname{arc\,tg}^{-1} y + \operatorname{arc\,tg}^{-1} z = 9$.
9. $z = xy \operatorname{sen} xz$.
10. $\operatorname{sen} xy + \operatorname{sen} yz + \operatorname{sen} xz = 1$.

11. Use as fórmulas (15) e (16) para determinar o valor máximo de z sobre o elipsóide $2x^2 + 3y^2 + z^2 + yz - xz = 1$.

12. O *folium* de Descartes (Problema 16 da Seção 17.1) tem como equação $x^3 + y^3 = 3axy$. Use a fórmula (11) para determinar o ponto mais alto do laço.

13. Se $F(x, y)$ tem segundas derivadas parciais contínuas e a equação $F(x, y) = c$ define $y = f(x)$ como função duas vezes diferenciável, mostre que, se $F_y \neq 0$.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^2}{F_y^3}.$$

14. Calcule d^2y/dx^2 usando o Problema 13 para os casos

(a) $x^4y^5 = 1$; (b) $e^y = x + y$.

CAPÍTULO

20

INTEGRAIS MÚLTIPLAS

20.1 VOLUMES COMO INTEGRAIS ITERADAS

Uma função contínua $f(x, y)$ de duas variáveis pode ser integrada sobre uma região plana R do mesmo modo que uma função contínua de uma variável pode ser integrada sobre um intervalo. O resultado é um número chamado *integral dupla* de $f(x, y)$ sobre R e é denotado por

$$\iint_R f(x, y)\, dA \qquad \text{ou} \qquad \iint_R f(x, y)\, dx\, dy.$$

Um conceito diferente mas intimamente relacionado é o de *integral iterada (ou repetida).* Discutiremos integrais iteradas nesta seção e, na próxima seção, retornaremos ao tópico das integrais duplas e explicaremos o que elas são e como se relacionam com as integrais iteradas.

Na Seção 7.3 discutimos o "método das fatias móveis" para calcular volumes. Assim, se $A(x)$ é a área da seção de um sólido determinada por sua interseção com um plano perpendicular ao eixo x a uma distância x da origem, então a fórmula

$$V = \int_a^b A(x)\, dx \qquad (1)$$

fornece o volume do sólido entre os planos $x = a$ e $x = b$. A essência dessa fórmula está na idéia de que

$$dV = A(x)\, dx$$

é o volume de uma fatia do sólido de espessura dx. O volume total (1) é então determinado somando (ou integrando) esses elementos de volume quando nossa fatia típica percorre o sólido, ou seja, quando x cresce de a a b.

Entretanto, se a própria seção tem fronteiras curvilíneas – como acontece em muitos casos –, a determinação de $A(x)$ também requer integração. Por exemplo, a seção mostrada na Fig. 20.1 estende-se do plano $xyz = 0$ até a superfície curva $z = f(x, y)$. Considerando x arbitrário mas momentaneamente fixo entre a e b, vemos que a área desta seção é

$$A(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\, dy, \tag{2}$$

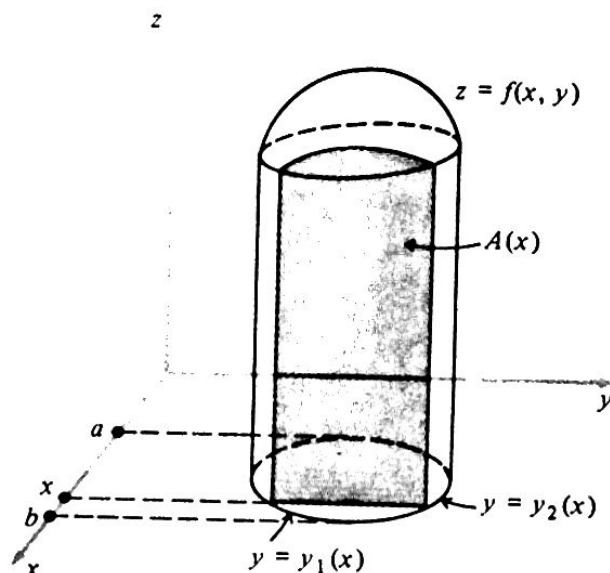



Figura 20.1

onde $y = y_1(x)$ e $y = y_2(x)$ são as equações das curvas que limitam a base à esquerda e à direita. Para calcular o volume total V, inserimos agora (2) em (1) e obtemos a *integral iterada*

$$V = \int_a^b \left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\, dy \right] dx. \tag{3}$$

Os estudantes devem notar particularmente que em (3) integramos primeiro $f(x, y)$ com relação a y, mantendo x fixo. Os limites de integração dependem desse valor fixo mas arbitrário de x; logo, o valor resultante da integral interna também. A integral interna é exatamente a função $A(x)$ dada por (2), que então integramos com relação a x de a a b para obter a integral iterada (3). Em suma, iniciamos com uma função positiva $f(x, y)$ de duas variáveis; integramos em y primeiro, o que dá uma função apenas de x; e depois integramos em x, o que dá um número – o volume do sólido.

Por outro lado, em alguns casos, pode ser mais conveniente cortar o sólido por um plano perpendicular ao eixo y e formar a integral iterada em ordem inversa, integrando em x primeiro e depois em y,

$$V = \int_c^d \left[\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)\, dx \right] dy. \tag{4}$$

Estas duas possíveis ordens de integração são sugeridas na Fig. 20.2, onde está

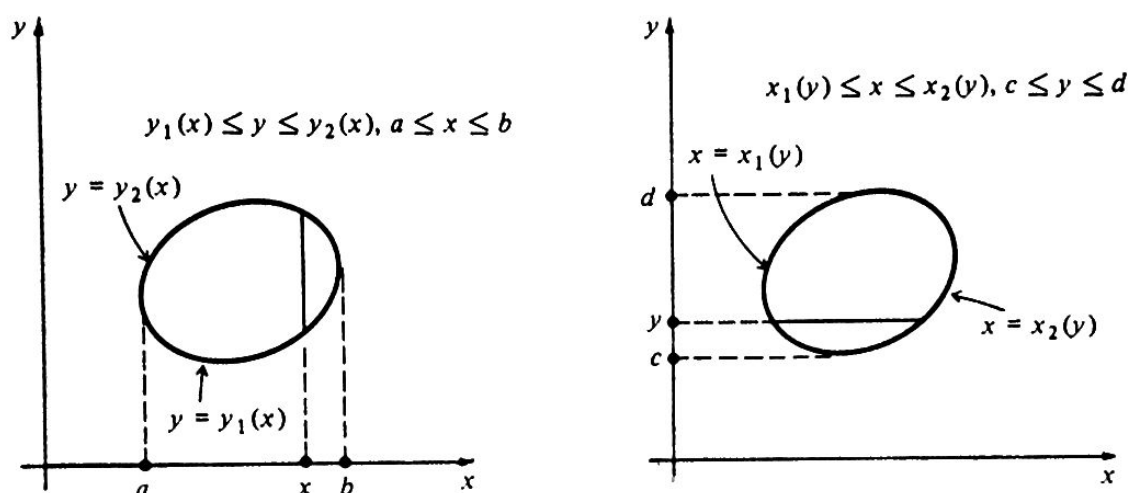



Figura 20.2

representada a base do sólido; (3) está à esquerda e (4) à direita. As integrais iteradas (3) e (4) são usualmente escritas sem colchetes,

$$\int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx \qquad \text{e} \qquad \int_c^d \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)\, dx\, dy;$$

No entanto, podemos sempre conservar os colchetes se desejarmos clareza adicional. A ordem em que as integrações são efetuadas (primeiro em relação a y e depois em relação a x ou vice-versa) é determinada pela ordem em que as diferenciais dx e dy são escritas nessas integrais iteradas: *nós sempre trabalhamos de dentro para fora.*

Exemplo 1 Use uma integral iterada para calcular o volume do tetraedro limitado pelos planos coordenados e pelo plano $x + y + z = 1$.

Solução A seção no plano x = constante é o triângulo mostrado na Fig. 20.3 com a base estendendo-se de $y = 0$ à reta $y = 1 - x$. Sua área é

$$A(x) = \int_0^{1-x} z\, dy = \int_0^{1-x} (1 - x - y)\, dy.$$

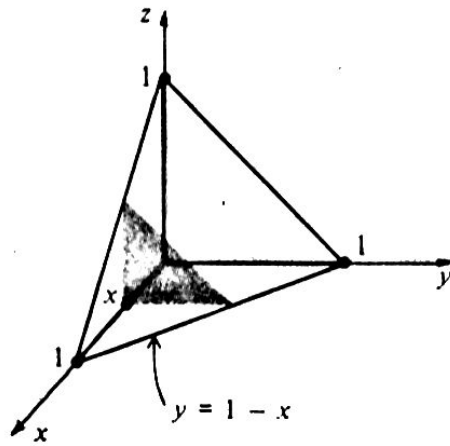



Figura 20.3.

Calculamos agora o volume desejado, integrando essa área de $x = 0$ a $x = 1$,

$$V = \int_0^1 \int_0^{1-x} (1 - x - y)\, dy\, dx = \int_0^1 \left[y - xy - \frac{1}{2} y^2 \right]_0^{1-x} dx$$
$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - x + \frac{1}{2} x^2 \right) dx = \frac{1}{6}.$$

A exatidão desse resultado pode ser verificada por Geometria Elementar, sabendo-se que o volume de qualquer tetraedro é um terço da área da base vezes a altura.

Exemplo 2 Determine a região do plano xy sobre a qual a integral iterada

$$\int_{-1}^{2} \int_{x^2}^{4} f(x, y)\, dy\, dx$$

é calculada.

Solução Na integral interna, com x fixo entre -1 e 2, y varia da curva $y = x^2$ até a reta $y = 4$ (veja a Fig. 20.4).

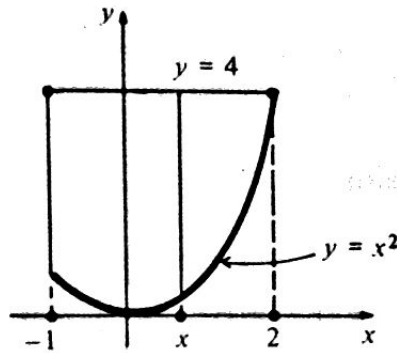



Figura 20.4.

Na segunda integração x cresce de -1 a 2. A região é a mostrada na figura e está limitada pela curva $y = x^2$ e as retas $y = 4$ e $x = -1$. Os estudantes devem notar em particular que determinamos a região pelo exame dos limites de integração.

Exemplo 3 A integral iterada

$$\int_0^1 \int_{x^2}^{x} 2y\, dy\, dx \tag{5}$$

refere-se a uma certa região do plano xy. Escreva uma integral equivalente com a ordem de integração trocada e calcule ambas as integrais.

Solução Vemos que a integral dada se estende sobre a região mostrada na Fig. 20.5, entre as curvas $y = x^2$ e $y = x$, onde $0 \leqslant x \leqslant 1$.

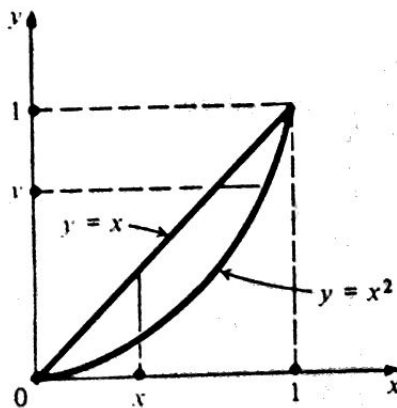



Figura 20.5.

Invertendo-se a ordem de integração, y é mantido fixo entre $y = 0$ e $y = 1$ e x cresce de $x = y$ a $x = y^{1/2}$. A integral pedida é então

$$\int_0^1 \int_y^{y^{1/2}} 2y\,dx\,dy = \int_0^1 [2xy]_y^{y^{1/2}}\,dy = \int_0^1 (2y^{3/2} - 2y^2)\,dy = \frac{2}{15}.$$

A integral dada (5) tem o mesmo valor,

$$\int_0^1 \int_{x^2}^{x} 2y\,dy\,dx = \int_0^1 [y^2]_{x^2}^{x}\,dx = \int_0^1 (x^2 - x^4)\,dx = \frac{2}{15},$$

pois ambas as integrais dão o volume de um certo sólido, e este volume deve ser o mesmo, não importa como seja calculado. Em problemas computacionais dessa natureza, estamos naturalmente livres para usar quaisquer métodos de integração que desejarmos, conhecidos de nossa experiência passada: substituição trigonométrica, integração por partes etc.

Problemas

Determine as regiões sobre as quais as integrais iteradas nos Problemas 1 e 2 são calculadas

1. $\int_0^1 \int_0^y f(x, y)\,dx\,dy.$

2. $\int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} f(x, y)\,dy\,dx.$

Calcule cada uma das integrais iteradas nos Problemas de 3 a 14. Esboce também a região R sobre a qual a integral é calculada.

3. $\int_0^1 \int_{x^2}^{x} (2x + 2y)\,dy\,dx.$

4. $\int_0^1 \int_0^1 xy^2\,dy\,dx.$

5. $\int_0^4 \int_0^y 3\sqrt{y^2 + 9}\,dx\,dy.$

6. $\int_1^2 \int_{y^2}^{y^3} dx\,dy.$

7. $\int_0^{\pi/2} \int_0^{\cos x} y\,dy\,dx.$

8. $\int_1^{e^3} \int_0^{1/y} e^{xy}\,dx\,dy.$

9. $\int_1^3 \int_0^{\ln y} ye^x\,dx\,dy.$

10. $\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} y\,dx\,dy.$

11. $\int_0^{\pi} \int_0^x x \cos y\,dy\,dx.$

12. $\int_0^{\pi} \int_0^{\operatorname{sen} x} y^2\,dy\,dx.$

13. $\int_1^2 \int_x^{2x} \frac{dy\,dx}{(x + y)^2}.$

14. $\int_0^{\pi} \int_0^{\pi - y} \operatorname{sen}(x + y)\,dx\,dy.$

Nos Problemas de 15 a 18 escreva uma integral iterada equivalente com a ordem de integração invertida.

15. $\displaystyle\int_0^1 \int_y^1 f(x, y)\, dx\, dy.$

16. $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{\sqrt{2-2x^2}} f(x, y)\, dy\, dx.$

17. $\displaystyle\int_1^2 \int_{e^y}^{e^2} f(x, y)\, dx\, dy.$

18. $\displaystyle\int_{-2}^2 \int_{1-\sqrt{2-x}}^{\frac{1}{2}x} f(x, y)\, dy\, dx.$

Nos Problemas de 19 a 24 escreva uma integral iterada equivalente com a ordem de integração invertida e calcule ambas as integrais.

19. $\displaystyle\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 2x^3\, dx\, dy.$

20. $\displaystyle\int_0^2 \int_0^{4-x^2} 2xy\, dy\, dx.$

21. $\displaystyle\int_0^2 \int_0^1 (5 - 2x - y)\, dy\, dx.$

22. $\displaystyle\int_1^{e^3} \int_{\ln y}^3 dx\, dy.$

23. $\displaystyle\int_{-5}^4 \int_{2-\sqrt{4-y}}^{\frac{1}{2}(y+2)} dx\, dy.$

24. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{4-2x^2}}^{\sqrt{4-2x^2}} x\, dy\, dx.$

Nos Problemas de 25 a 28 use integrais iteradas para calcular os volumes das regiões dadas do espaço. Esboce cada região.

25. A região do primeiro octante limitada pelos planos coordenados e pelo plano

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

onde a, b e c são números positivos.

26. A região do primeiro octante limitada pelo plano $x + y = 1$ e pelo cilindro $z = 1 - x^2$.

28. A região do primeiro octante limitada pela superfície $z = 4 - x - y^2$.

29. Use qualquer método para calcular o volume da região limitada pela superfície $x^{2/3} + y^{2/3} + z^{2/3} = a^{2/3}$.

20.2 INTEGRAIS DUPLAS E INTEGRAIS ITERADAS

A integral dupla de uma função de duas variáveis é o análogo bidimensional da integral definida de uma função de uma variável. É conveniente aqui chamar esse último tipo de integral de *integral simples*, em contraste com o termo *integral dupla.*

Como sabemos, o valor de uma integral simples $\int_a^b f(x)\,dx$ é determinado pela função $f(x)$ e pelo intervalo $[a, b]$. No caso de uma integral dupla, o intervalo $[a, b]$ é substituído por uma região R do plano xy, e a integral dupla de $f(x, y)$ sobre R é denotada pelo símbolo

$$\iint_R f(x, y)\,dA. \tag{1}$$

A razão para a notação dA será explicada a seguir.

Recordamos que na Seção 6.4 uma integral simples foi definida como o limite de certas somas. Definimos agora a integral dupla (1) da mesma maneira.

Considere uma função contínua $f(x, y)$ definida sobre uma região R do plano xy. É necessário admitir que R seja *limitada,* no sentido de poder ser englobada por um retângulo suficientemente grande, e que não cresce infinitamente em nenhuma direção; diz-se, em caso contrário, exatamente como no caso de uma integral simples, onde ou a ou b era infinito, integral dupla *imprópria.*

Começamos recobrindo R com um sistema de retas paralelas aos eixos (Fig. 20.6), permitindo-se que as distâncias entre retas paralelas consecutivas sejam iguais ou diferentes entre si.

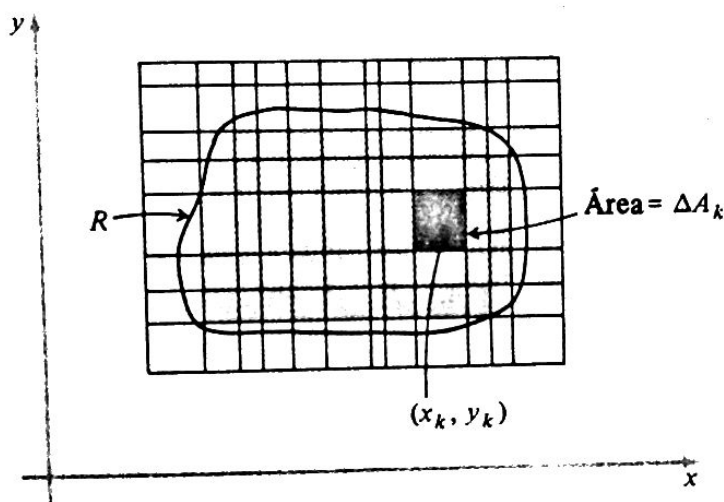



Figura 20.6.

Essas retas dividem o plano em muitos retângulos pequenos. Alguns retângulos estarão inteiramente ou parcialmente fora de R e esses nós ignoramos. Outros retângulos estarão inteiramente contidos em R, e se há n desses ao todo – admitimos que haja pelo menos um –, então os numeramos de alguma maneira de 1 a n, denotando por ΔA_k a área do k-ésimo retângulo. Escolhemos agora um ponto arbitrário (x_k, y_k) do k-ésimo retângulo e formamos a soma

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\,\Delta A_k. \tag{2}$$

Finalmente, suponhamos que muito mais retas paralelas sejam acrescentadas para produzir uma rede que divida os retângulos dados em retângulos menores e consideremos a soma (2) correspondente a essa partição mais fina do plano. Se essas somas tenderem a um único limite quando n tende a infinito e a diagonal máxima dos retângulos (isto é, a maior diagonal de todos os retângulos) tende a zero – independentemente da escolha das retas divisoras e dos pontos (x_k, y_k) formados nos retângulos –, então a integral dupla (1) é definida como sendo esse limite:

$$\iint_R f(x, y)\,dA = \lim \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\,\Delta A_k. \tag{3}$$

Até agora, parece que a definição (3) difere muito pouco da correspondente definição de integral simples. Entretanto, há certas dificuldades técnicas em duas dimensões que não apareciam em uma dimensão. Por exemplo, regiões planas podem ser muito mais complicadas que intervalos $[a, b]$. No entanto, a existência de integrais duplas pode ser rigorosamente provada sob hipóteses suficientemente genéricas para todas as finalidades práticas. Em particular, é suficiente admitir que as regiões que consideramos contenham suas fronteiras e que essas sejam constituídas de um número finito de curvas lisas.

Não pretendemos um tratamento teórico cuidadoso de integrais duplas. Este é um assunto difícil e é melhor deixá-lo para cursos avançados*.

Preferimos enfatizar o significado intuitivo das integrais duplas e concentrar nossa atenção em suas aplicações geométricas e físicas.

Como ilustração dessa abordagem, suponhamos que $z = f(x, y)$ seja a equação de uma superfície do espaço xyz acima da região R, de modo que $f(x, y) > 0$ em R (Fig. 20.7).

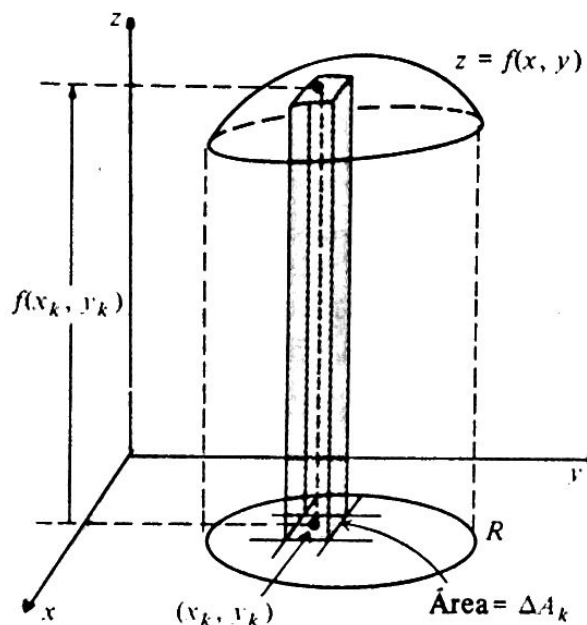



Figura 20.7.

Nesse caso $f(x_k, y_k)\,\Delta a_k$ é aproximadamente o volume (altura vezes a área da base) da coluna fina da figura; a soma (2) é a soma de vários desses volumes e é portanto uma aproximação do volume total do sólido sob a superfície; o limite (3), que é a integral dupla

$$\iint_R f(x, y)\, dA, \tag{1}$$

dá o volume exato desse sólido**.

É claro que se $f(x, y)$ tiver um valor constante, digamos $f(x, y) = c$, então

$$\iint_R f(x, y)\, dA = cA,$$

* Mesmo nesse nível, é necessário um curso de cálculo avançado do tipo tradicional. Por exemplo, veja Philip Franklin, *A Treatise on Advanced Calculus* (Wiley, 1940); ou Angus E. Taylor, *Advanced Calculus* (Ginn, 1955).

** A integral dupla (1) é realmente o volume de uma *região* do espaço tridimensional, mas parece mais natural falar-se do volume de um *sólido.*

onde A é a área da região R. Em particular, se $f(x, y) = 1$, temos

$$\iint_R dA = A.$$

Salientamos também que na definição (3) não há exigência de que $f(x, y)$ deva ser positiva. Se $f(x, y)$ assume valores tanto positivos como negativos, então a integral dupla representa um *volume algébrico* em vez de um volume geométrico; ou seja, o volume entre a superfície $z = f(x, y)$ e o plano xy conta positivamente quando $f(x, y) > 0$ e negativamente quando $f(x, y) < 0$.

Como a área de um retângulo com lados paralelos aos eixos pode ser escrita como $\Delta A = \Delta x \, \Delta y$, é razoável usar

$$\iint_R f(x, y)\, dx\, dy \tag{4}$$

como notação alternativa para a integral dupla (1). Dessa forma, a integral dupla (1) é sempre igual a uma integral iterada convenientemente escolhida. Essa igualdade, com freqüência, leva os estudantes a pensarem que integrais duplas são essencialmente o mesmo que integrais iteradas, mas elas não o são. Abaixo, falaremos mais sobre a distinção entre esses dois tipos de integrais.

Uma região R chama-se *verticalmente simples* se ela puder ser descrita por desigualdades da forma

$$a \leq x \leq b, \qquad y_1(x) \leq y \leq y_2(x), \tag{5}$$

onde $y = y_1(x)$ e $y = y_2(x)$ são funções contínuas em $[a, b]$. Uma região dessa natureza é mostrada na Fig. 20.8.

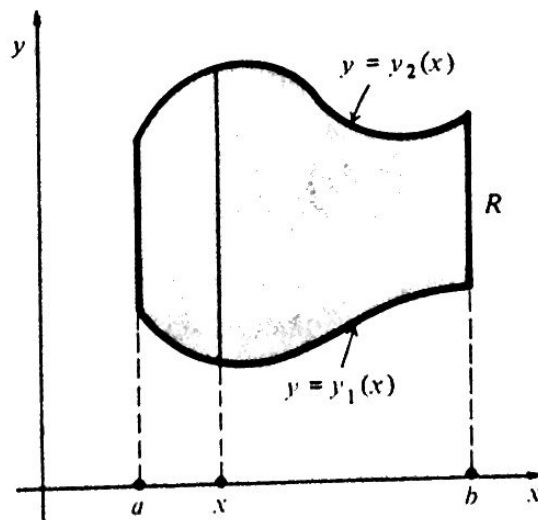



Figura 20.8.

Analogamente, na região R chama-se *horizontalmente simples* se ela puder ser descrita por desigualdades da forma

$$c \leq y \leq d, \qquad x_1(y) \leq x \leq x_2(y), \tag{6}$$

onde $x = x_1(y)$ e $x = x_2(y)$ são funções contínuas em $[c, d]$. A região da Fig.20.9 tem essa propriedade.

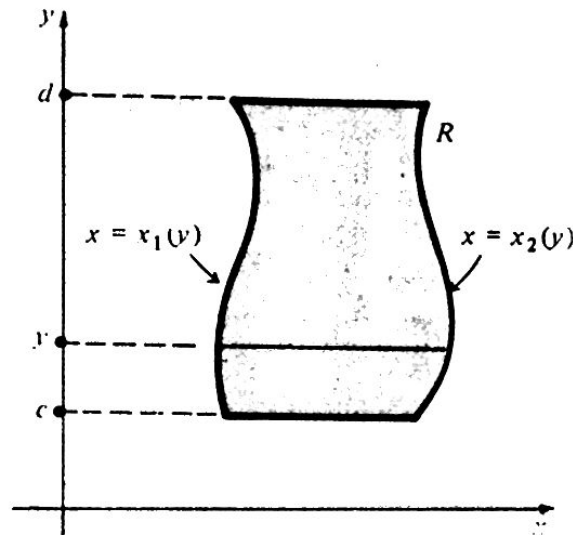



Figura 20.9.

Os fatos básicos sobre o uso de integrais iteradas para computar integrais duplas são os seguintes: *Se R for a região verticalmente simples dada por (5), então*

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx; \tag{7}$$

se R for a região horizontalmente simples dada por (6), então

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_c^d \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)\, dx\, dy. \tag{8}$$

Além de seu valor prático evidente para o cálculo de integrais duplas, essas equações servem para esclarecer a distinção conceitual entre integrais duplas e integrais iteradas. Uma integral dupla é um número associado a uma função $f(x, y)$ e a uma região R; esse número existe e tem significado independentemente do método particular usado para calculá-lo. Por outro lado, uma integral iterada é uma integral dupla *acrescida de um procedimento computacional embutido.* Assim, toda integral iterada é uma integral dupla, mas não o contrário.

Exemplo 1 Calcule a integral dupla $\iint_R 2xy\ dA$ de dois modos diferentes. R é a região limitada entre a parábola $x = y^2$ e a reta $y = x$.

Solução *É essencial esboçar a região de integração antes de tentar calcular uma integral dupla.* Nesse caso, a região está mostrada na Fig. 20.10.

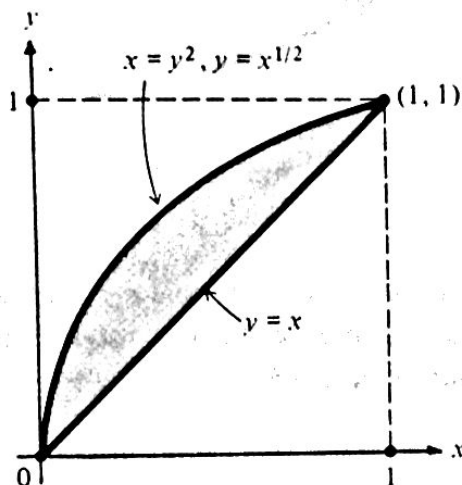



Figura 20.10.

É claro que R é verticalmente simples com $a = 0$, $b = 1$, $y^1(x) = x$, $y_2(x) = x^{1/2}$. Logo, por (7),

$$\iint_R 2xy\ dA = \int_0^1 \int_x^{x^{1/2}} 2xy\ dy\ dx = \int_0^1 [xy^2]_x^{x^{1/2}}\ dx$$
$$= \int_0^1 (x^2 - x^3)\ dx = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

A região R é também horizontalmente simples com $c = 0$, $d = 1$, $x_1(y) = y^2$, $x_2(y) = y$. Logo, por (8),

$$\iint_R 2xy\ dA = \int_0^1 \int_{y^2}^{y} 2xy\ dx\ dy = \int_0^1 [x^2y]_{y^2}^{y}\ dy$$
$$= \int_0^1 (y^3 - y^5)\ dy = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}.$$

Exemplo 2 Calcule $\iint_R (1 + 2x)\ dA$, onde R é a região limitada por $x = y^2$ e $x - y = 2$.

Solução Essa região está mostrada na Fig. 20.11

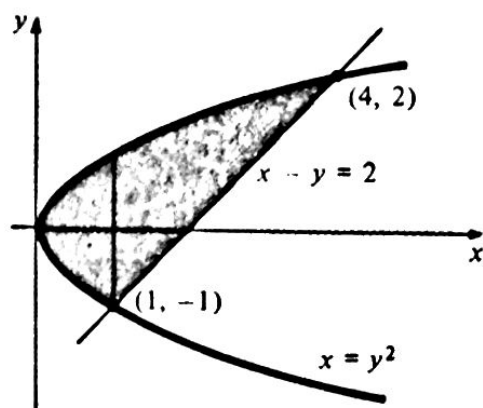



Figura 20.11

A fim de integrar primeiro em relação a y e depois em relação a x, precisamos calcular duas integrais separadas, uma à esquerda da reta $x = 1$ e a outra à direita, pois os limites da integração em y são diferentes nessas duas partes da região:

$$\iint_R (1 + 2x)\, dA = \int_0^1 \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} (1 + 2x)\, dy\, dx + \int_1^4 \int_{x-2}^{\sqrt{x}} (1 + 2x)\, dy\, dx.$$

A outra ordem é mais fácil. Temos

$$\iint_R (1 + 2x)\, dA = \int_{-1}^2 \int_{y^2}^{y+2} (1 + 2x)\, dx\, dy = \int_{-1}^2 [x + x^2]_{y^2}^{y+2}\, dy$$
$$= \int_{-1}^2 (6 + 5y - y^4)\, dy = \frac{189}{10}.$$

O Exemplo 2 mostra que mesmo quando a região é tanto vertical como horizontalmente simples, pode ser mais fácil integrar numa ordem que na outra, e nós, naturalmente, preferimos o caminho mais fácil. Às vezes, a escolha da ordem de integração é determinada pela natureza do integrando $f(x, y)$, pois pode ser difícil – ou mesmo impossível – calcular uma integral numa ordem, mas pode ser fácil fazê-lo *se a ordem de integração for invertida.*

Exemplo 3 Calcule

$$\int_0^1 \int_{2y}^2 4e^{x^2}\, dx\, dy.$$

Solução Não podemos integrar nessa ordem, pois $\int e^{x^2}\,dx$ não é uma função elementar. Por isso tentamos a outra ordem. Isto requer que esbocemos a região R, examinando os limites da integral iterada dada. R é mostrada na Fig. 20.12 e em outra ordem de integração a integral dupla em questão tem o valor

$$\iint_R 4e^{x^2}\,dA = \int_0^2 \int_0^{\frac{1}{2}x} 4e^{x^2}\,dy\,dx = \int_0^2 \left[4ye^{x^2}\right]_0^{\frac{1}{2}x} dx$$
$$= \int_0^2 2xe^{x^2}\,dx = e^{x^2}\Big]_0^2 = e^4 - 1.$$

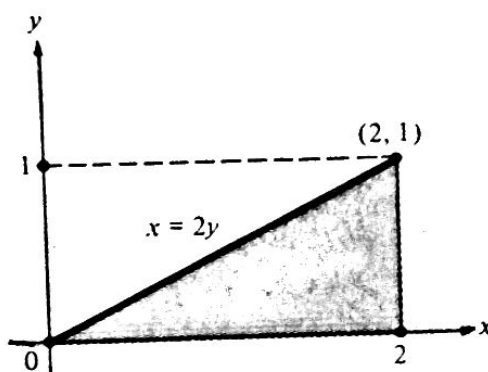



Figura 20.12.

Problemas

Nos Problemas de 1 a 6, use integrais duplas para calcular as áreas das regiões limitadas pelas curvas e retas dadas.

1. A parábola $x = y^2$ e a reta $y = x - 2$.

2. A parábola $y = x - x^2$ e a reta $x + y = 0$.

3. Os eixos e a reta $2x + y = 2a$ $(a > 0)$.

4. O eixo y, a reta $y = 3x$ e a reta $y = 6$.

5. O eixo x, a curva $y = e^{-x}$ e as retas $x = 0, x = a$ $(a > 0)$.

6. As parábolas $y = x^2$ e $y = 2x - x^2$.

Nos Problemas de 7 a 10 calcule os volumes acima do plano xy limitados pelas superfícies dadas.

7. O parabolóide $z = x^2 + y^2$ e os planos $x = \pm 1, y = \pm 1$.

8. O cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e o plano $x + y + z = 2$.

9. O cilindro $y = 4 - x^2$ e os planos $y = 3x$, $z = x + 4$.

10. O cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ e o parabolóide $az = x^2 + y^2$.

11. Calcule o volume do sólido limitado pelos planos coordenados, pelos planos $x = 2$ e $y = 5$ e pela superfície $2z = xy$.

12. Calcule o volume do sólido do primeiro octante limitado pelo cilindro $4y = x^2$ e pelos planos $x = 0$, $z = 0$, $y = 4$ e $x - y + 2z = 2$.

Nos Problemas de 13 a 16 estabeleça uma integral dupla cujo valor seja o volume enunciado; expresse essa integral dupla de duas maneiras como integral iterada e calcule uma delas.

13. O volume sob o plano $z = 2y$ e acima da região do primeiro quadrante limitada por $y = 0$, $x = 2, x^2 + y^2 = 16$.

14. O volume sob o plano $z = x + y$ e acima da região do primeiro quadrante no interior da elipse $9x^2 + 4y^2 = 36$.

15. O volume sob o cilindro $x = z^2$ e acima da região do plano xy limitada por $x = 0$ e $y^2 + 9x = 9$.

16. O volume do primeiro octante limitado pelo cilindro $z = 4 - y^2$ e os planos $x = 0, y = 0$, $z = 0, 3x + 4y = 12$.

17. Calcule o valor de $\iint_R xd$ sendo R a parte do primeiro quadrante da coroa entre as circunferências $x^2 + y^2 = a^2$ e $x^2 + y^2 = b^2$, $a < b$. Faça isso de dois modos, correspondentes às duas possíveis ordens de integração.

18. Calcule a integral dupla do Exemplo 2 na outra ordem, requerendo duas integrais iteradas separadas.

20.3 APLICAÇÕES FÍSICAS DAS INTEGRAIS DUPLAS

Vimos que a integral dupla

$$\iint_R f(x, y)\, dA \qquad (1)$$

dá o volume de um certo sólido se $f(x, y) \geqslant 0$. Essa integral tem muitas outras interpretações úteis que surgem para escolhas especiais da função $f(x, y)$. Antes de discutirmos essa questão, será conveniente retornar ao modo de pensar a integração, discutido e extensamente ilustrado no Capítulo 7 (Volume I).

A definição de (1) usando limite de somas, dada na Seção 20.2, é necessária do ponto de vista da lógica e legitimidade matemática. No entanto, para se trabalhar com aplicações é melhor pensarmos no volume dado por (1) como sendo composto de infinitas colunas estreitas, como sugerido na Fig. 20.13*a*. Uma coluna típica se eleva sobre um *elemento de área dA*, retangular, infinitamente pequeno, cujos lados são dx e dy, de modo que

$$dA = dx\, dy = dy\, dx. \qquad (2)$$

A altura dessa coluna é $f(x, y)$, logo seu volume é

$$dV = f(x, y)\, dA.$$

O volume total V é agora obtido somando-se – ou integrando-se – todos esses elementos de volume infinitamente pequenos,

$$V = \iint dV = \iint_R f(x, y)\, dA. \qquad (3)$$

Compreendemos que a integral dupla completa (1) é produzida, permitindo que dA varra de qualquer maneira toda a região R. Nas partes (b) e (c) da Fig. 20.13, indicamos os dois modos de calcular (3) como integral iterada; em (b), permitimos primeiro que dA se mova através de R ao longo de uma faixa horizontal estreita, o que corresponde a integrar primeiro em x e depois em y; e em (c), permitimos que dA primeiro se mova por meio de R ao longo de uma faixa vertical estreita, integrando primeiro em y e depois em x.

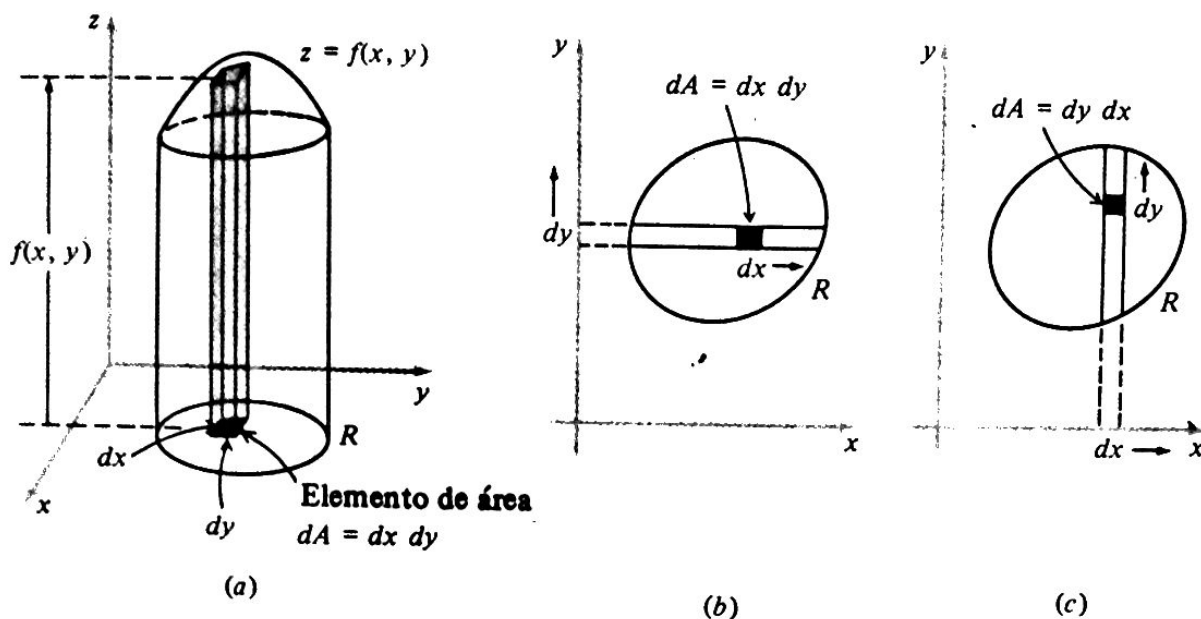



Figura 20.13 Duas ordens de integração.

Como sugerido pela fórmula (2), a integral dupla (3) pode ser escrita em uma das formas.

$$\iint_R f(x, y)\, dx\, dy \qquad \text{ou} \qquad \iint_R f(x, y)\, dy\, dx,$$

dependendo de qual integral iterada desejamos considerar; para aplicar essas idéias a um problema particular, tudo que resta é inserir limites de integração adequados e efetuar os cálculos.

Essa descrição do significado intuitivo da integral dupla (1) expressa a essência da abordagem de Leibniz à integração: para calcular o todo de uma quantidade, imagine-a judiciosamente dividida num grande número de pedaços pequenos e depois adicione todos esses pedaços. Este é o tema unificador das aplicações seguintes e também de muitos desenvolvimentos no decorrer deste capítulo. Novamente aqui, como já aconteceu antes com freqüência, a soberba notação de Leibniz faz quase tudo por nós.

No Capítulo 11 (Volume I) discutimos os conceitos de momento, centro de massa e momento de inércia de uma placa fina de material homogêneo ocupando uma dada região R do plano xy. A palavra "homogêneo" significa que a densidade δ do material (= massa por unidade de área) é considerada constante, ou seja, tem o mesmo valor em todo ponto $P = (x, y)$ de R. Estamos agora em posição de admitir que δ seja uma função de x e y, $\delta = \delta(x, y)$, de modo que placas finas com densidade variável possam ser colocadas ao alcance de nossos métodos.

I. Massa

Se $\delta = \delta(x, y)$ é a densidade de nossa lâmina, então $\delta(x, y)dA$ é a massa do elemento de área dA, e a massa total da lâmina é

$$M = \iint_R \delta(x, y)\, dA. \tag{4}$$

II. Momento

O momento do elemento de massa $\delta(x, y)dA$ em relação ao eixo x é essa massa multiplicada pelo "Braço da alavanca", ou seja, $y\,\delta(x, y)dA$, e o momento total da lâmina em relação ao eixo x é

$$M_x = \iint_R y\delta(x, y)\, dA. \tag{5}$$

Veja a Fig. 20.14. Analogamente, o momento total em relação ao eixo y é

$$M_y = \iint_R x\delta(x, y)\, dA. \tag{6}$$

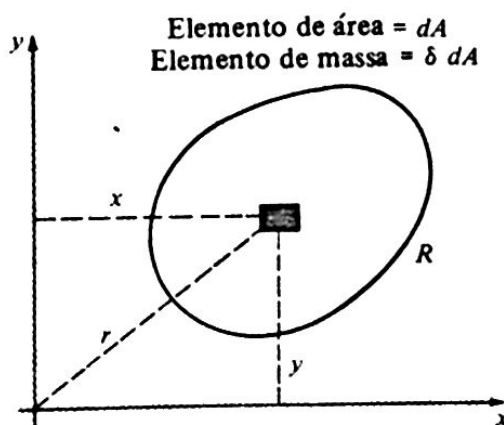



Figura 20.14.

III Centro de Massa

É o ponto $(\bar{x}, \bar{y})$ cujas coordenadas são definidas por

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\iint_R x\delta(x, y)\, dA}{\iint_R \delta(x, y)\, dA} \tag{7}$$

e

$$\bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\iint_R y\delta(x, y)\, dA}{\iint_R \delta(x, y)\, dA}. \tag{8}$$

Fisicamente é o ponto em que a massa total da lâmina poderia estar concentrada sem alterar seu momento em relação a qualquer dos eixos. Quando a densidade δ é constante, ou seja quando a massa da lâmina está uniformemente distribuída, os δ podem ser retirados para fora das integrais em (7) e (8) e cancelados. Nesse caso, o centro de massa é o centro geométrico da região R e, por essa razão, é usualmente chamado de *centróide*.

IV Momento de Inércia

Quando o quadrado da distância do braço da alavanca é utilizado em vez de sua potência primeira [como em (5) e (6)], temos o momento de inércia da lâmina em relação ao eixo correspondente. Assim, o momento de inércia I_x em relação ao eixo x é definido por

$$I_x = \iint_R y^2\delta(x, y)\, dA.$$

Analogamente, o momento de inércia I_y em relação ao eixo y é

$$I_y = \iint_R x^2\delta(x, y)\, dA. \tag{10}$$

É também de interesse o momento de inércia da lâmina em relação ao eixo z. Ele é, com freqüência, denominado *momento de inércia polar* e é definido por

$$I_z = \iint_R r^2\delta(x, y)\, dA, \tag{11}$$

onde $r^2 = x^2 + y^2$. Como foi explicado na Seção 11.4 (Volume I), o momento de inércia de um corpo em relação a um eixo é sua capacidade de resistir à aceleração angular em torno desse eixo; essa grandeza exerce, no movimento de rotação, o mesmo papel que o exercido pela massa no movimento linear.

Os estudantes devem notar explicitamente que em cada uma das fórmulas (4), (5), (6), (9), (10), (11) obtivemos a grandeza total em discussão por adição — ou integração — de suas partes "infinitesimais" associadas ao elemento de área dA, quando dA varre toda a região R.

Exemplo Uma lâmina de material com densidade variável ocupa o quadrado R cujos vértices são $(0, 0)$, $(a, 0)$, (a, a), $(0, a)$. A densidade num ponto $P = (x, y)$ é o produto das distâncias de P aos eixos: $\delta = xy$. Calcule a massa da lâmina, seu centro de massa e seu momento de inércia em relação ao eixo x.

Solução Um esboço da situação pode ser visto na Fig. 20.15.

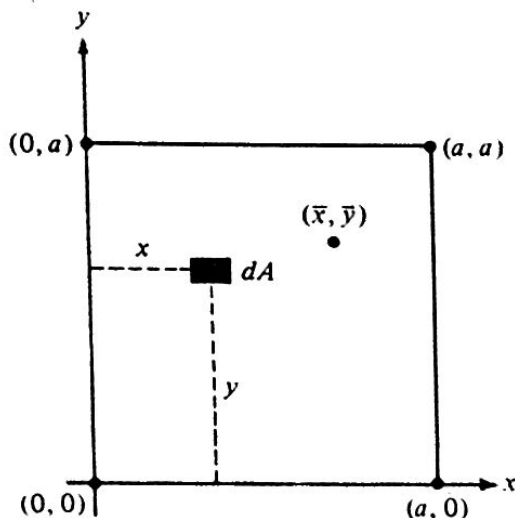



Figura 20.15.

Temos

$$M = \iint_R \delta\, dA = \int_0^a \int_0^a xy\, dy\, dx = \int_0^a \left[\frac{1}{2} xy^2\right]_0^a dx = \frac{1}{2} a^2 \int_0^a x\, dx = \frac{1}{4} a^4.$$

A coordenada x do centro de massa é

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{4}{a^4} \iint_R x\delta\, dA = \frac{4}{a^4} \int_0^a \int_0^a x^2 y\, dy\, dx = \frac{4}{a^4} \int_0^a \left[\frac{1}{2}x^2y^2\right]_0^a dx = \frac{2}{a^2} \int_0^a x^2\, dx = \frac{2}{3} a,$$

e, por razões de simetria, temos $\bar{x} = \bar{y} = \dfrac{2}{3} a$. O momento de inércia desejado é

$$I_x = \iint_R y^2\delta\, dA = \int_0^a \int_0^a xy^3\, dy\, dx = \int_0^a \left[\frac{1}{4} xy^4\right]_0^a dx = \frac{1}{4} a^4 \int_0^a x\, dx = \frac{1}{8} a^6.$$

É costume expressar o momento de inércia de um corpo em relação a um eixo em termos de sua massa total M. Neste caso teremos

$$I_x = \tfrac{1}{2} M a^2.$$

Observação 1 Enfatizamos que os símbolos dA, dx e dy na fórmula (2) *não* designam diferenciais no sentido discutido na Seção 19.4. Em vez disso, eles são auxiliares meramente notacionais que nos permitem escrever as integrais duplas apropriadas diretamente, sem ter de voltar repetidamente à definição dessas integrais como limite de somas.

Observação 2 Uma aplicação surpreendente das idéias expostas é dada no Apêndice A.14, onde a fórmula de Euler

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

é obtida por cálculo de determinada integral dupla.

Problemas

Nos Problemas de 1 a 8 calcule a massa total M e o centro de massa $(\bar{x}, \bar{y})$ da lâmina de material que fica na região dada R e que tem densidade dada δ. Sempre que possível, use simetria para simplificar os cálculos.

1. R é o quadrado com vértices $(0, 0), (a, 0), (a, a), (0, a)$; $\delta = x + y$.
2. R é a região do primeiro quadrante limitada pelos eixos e pela circunferência $x^2 + y^2 = 1$; $\delta = xy$.
3. R é a região limitada pela parábola $x = y^2$ e pela reta $x = 4$; $\delta = x$.
4. R é a região limitada pelos eixos e pela reta $x + y = a$; $\delta = x^2 + y^2$.
5. R é a região limitada por $x = 0$ e pela metade direita da circunferência $x^2 + y^2 = a^2$; $\delta = x$.
6. R é a região limitada pela parábola $y = x^2$ e pela reta $y = x$; $\delta = \sqrt{x}$.
7. R é a região entre $y = \operatorname{sen} x$ e o eixo x de $x = 0$ a $x = \pi$; $\delta = x$.
8. R é a região limitada pela parábola $y = x^2$ e pela reta $y = x + 2$; $\delta = x^2$.
9. Calcule o momento de inércia I_x da placa quadrada considerada no texto levando em conta a densidade δ constante.
10. Mostre que $I_z = I_x + I_y$. Use essa propriedade e o resultado do Problema 9 para calcular o momento de inércia de um cubo uniforme (densidade constante) com aresta a e massa M em relação a uma de suas arestas.

11. Sendo a densidade δ constante, calcule o momento de inércia I_x da lâmina triangular limitada pela reta $x + y = a$ e os eixos $x = 0$, $y = 0$.

12. Resolva o Problema 11 para a placa triangular limitada pelas retas $x + y = a, x = a, y = a$.

13. Resolva o Problema 11 para o caso em que a densidade é $\delta = xy$.

14. Calcule o momento de inércia polar I_z da placa circular limitada por $x^2 + y^2 = a^2$ para o caso em que a densidade δ é constante.

20.4 INTEGRAIS DUPLAS EM COORDENADAS POLARES

É com freqüência mais conveniente descrever as fronteiras de uma região utilizando as coordenadas polares r, θ em vez das coordenadas cartesianas x, y. Nessas circunstâncias podemos usualmente economizar trabalho expressando uma integral dupla

$$\iint_R f(x, y)\, dA \tag{1}$$

em termos de coordenadas polares. O integrando é fácil de se transformar usando as equações $x = r\cos\theta, y = r \operatorname{sen}\theta$ escrevendo $f(x, y)$ como função de r e de θ,

$$f(x, y) = f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta).$$

Por exemplo, se $f(x, y) = x^2 + y^2$, teremos $(r\cos\theta)^2 + (r\operatorname{sen}\theta)^2 = r^2(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta) = r^2$. Mas o que fazemos com o elemento de área dA?

A resposta a essa questão é sugerida na Fig. 20.16.

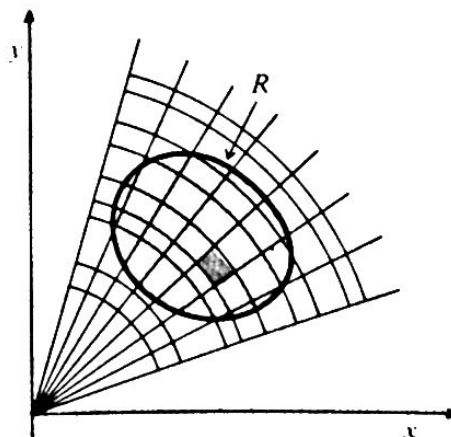



Figura 20.16

Recordemos que o elemento de área em coordenadas cartesianas

$$dA = dx\,dy$$

nos faz lembrar dos pequenos retângulos com lados paralelos aos eixos usados para definir a integral dupla (1) na Seção 20.2. Ao trabalhar com coordenadas polares, é natural subdividirmos o plano de outra forma, com uma série de círculos com centros na origem e com uma série de raios passando pela origem. Esses círculos e raios formam muitas células que parecem retângulos, como está mostrado na parte sombreada da figura. Podemos agora dar uma definição equivalente da integral dupla (1) como um processo de limite de somas que utiliza esses pequenos "retângulos polares". Entretanto, omitimos os detalhes e usamos a Fig. 20.16 apenas para sugerir a linha de raciocínio que seguiremos, a qual passamos a explicar.

O elemento de área $dA = dx\,dy$ em coordenadas cartesianas é a área do pequeno retângulo formado por um acréscimo dx em x e um acréscimo dy em y (Fig. 20.17*a*).

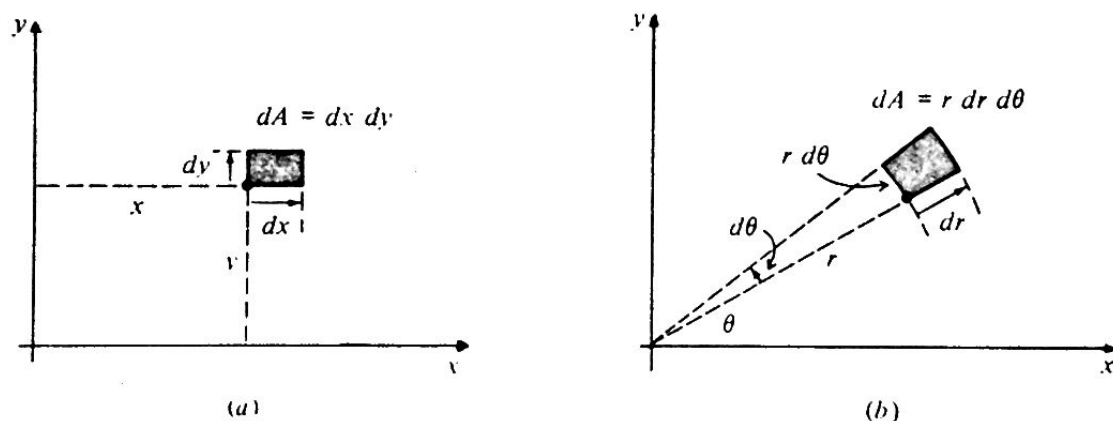



Figura 20.17 O elemento polar de área.

A Fig. 20.16 sugere a abordagem a ser utilizada com coordenadas polares: se r passa para $r + dr$ e θ passa para $\theta + d\theta$ (Fig. 20.17*b*), forma-se um pequeno retângulo polar cujos lados são dr, a variação em r, e $r\,d\theta$*.

A área do pequeno retângulo polar é, então, aproximadamente,

$$dA = (dr)(r\,d\theta) = r\,dr\,d\theta. \tag{2}$$

Esta é a fórmula básica desta seção. Ela dá o elemento de área em coordenadas polares e permite-nos escrever a integral dupla (1) na forma polar como

$$\iint_R f(x, y)\,dA = \iint_R f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)\,r\,dr\,d\theta. \tag{3}$$

---

* O segundo lado desse retângulo polar é um pequeno arco de circunferência de raio r com ângulo central $d\theta$; seu comprimento é dado pela fórmula $s = r\,d\theta$, *pois o ângulo é medido em radianos.*

Muitas regiões R que tratamos são *radialmente simples*, no sentido de que elas podem ser descritas por desigualdades da forma

$$\alpha \leq \theta \leq \beta, \qquad r_1(\theta) \leq r \leq r_2(\theta).$$

A Fig. 20.18 mostra uma região dessa natureza e sugere também como a figura pode ser usada para escrever a integral dupla (3) como integral iterada.

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_\alpha^\beta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta)\, r\, dr\, d\theta.$$

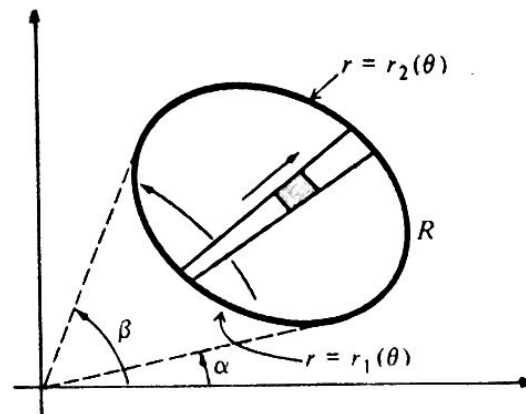



Figura 20.18

Aqui nós integramos primeiro em r e depois em θ, trabalhando de dentro para fora, como sempre. Visualizamos o elemento de área dA como movendo-se primeiro na direção de R ao longo da faixa radial indicada, desde a curva interna $r = r_1(\theta)$ até a curva externa $r = r_2(\theta)$. A faixa resultante é então rodada de $\theta = \alpha$ a $\theta = \beta$ a fim de varrer toda a região R. Integrais iteradas podem ser calculadas em outra ordem, mas raramente usadas.

Exemplo 1 Calcule a área da região R englobada pela cardióide $r = a\,(1 + \cos \theta)$.

Solução A cardióide é mostrada na Fig. 20.19. Calculamos a área integrando o elemento de área $dA = r\, dr\, d\theta$ na região

$$A = \iint_R dA = \iint_R r\, dr\, d\theta.$$

Para θ fixo, fazemos r crescer de $r = 0$ a $r = a(1 + \cos \theta)$. Como usual, exploramos toda simetria presente. Assim, a seguir, fazemos com que θ cresça de 0 a π e obtemos a área total multiplicando por 2,

$$A = 2\int_0^{\pi}\int_0^{a(1+\cos\theta)} r\,dr\,d\theta = 2\int_0^{\pi}\left[\frac{1}{2}r^2\right]_0^{a(1+\cos\theta)} d\theta$$

$$= 2\int_0^{\pi}\frac{1}{2}a^2(1+\cos\theta)^2\,d\theta = a^2\int_0^{\pi}(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)\,d\theta$$

$$= a^2\int_0^{\pi}\left(1+2\cos\theta+\frac{1}{2}[1+\cos 2\theta]\right)d\theta$$

$$= a^2\left[\theta + 2\,\text{sen}\,\theta + \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\,\text{sen}\,2\theta\right]_0^{\pi} = \frac{3}{2}\pi a^2.$$

Esse problema também pode ser resolvido pelo método da Seção 16.5, o que faria com que começássemos pela terceira integral de nosso cálculo. Entretanto, nosso método tem muita flexibilidade. Ele nos possibilita, por exemplo, calcular o centróide da região R, considerando-a como uma lâmina de material de densidade constante $\delta = 1$. É claro, por simetria, que $\bar{y} = 0$; calculamos $\bar{x}$ escrevendo

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{2}{3\pi a^2}\iint_R x\,dA.$$

Insistimos que os estudantes completem os detalhes desse cálculo no Problema 25.

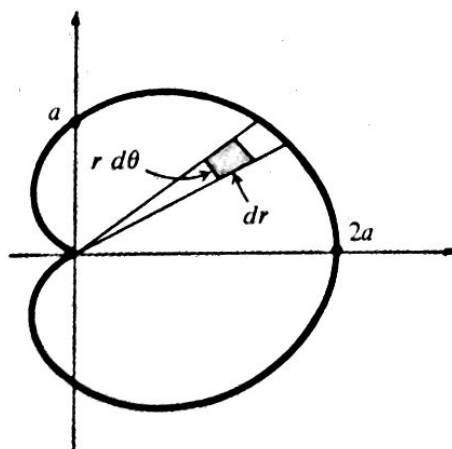



Figura 20.19

Exemplo 2 Deduza a fórmula do volume de uma esfera de raio a utilizando os métodos que aprendemos.

Solução Se a esfera tem centro na origem, sua equação é $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ou $r^2 + z^2 = a^2$ e a equação do hemisfério superior é $z = \sqrt{a^2 - r^2}$. Por simetria, calculamos o volume no primeiro octante (Fig. 20.20) e multiplicamos por 8. A região R sobre a qual integramos está definida por $0 \leq \theta \leq \pi/2$ e $0 \leq r \leq a$, logo

$$V = 8 \iint_R z\, dA = 8 \int_0^{\pi/2} \int_0^a \sqrt{a^2 - r^2}\, r\, dr\, d\theta$$

$$= 8 \int_0^{\pi/2} \int_0^a -\frac{1}{2} (a^2 - r^2)^{1/2} (-2r\, dr)\, d\theta$$

$$= -4 \int_0^{\pi/2} \left[\frac{2}{3} (a^2 - r^2)^{3/2} \right]_0^a d\theta$$

$$= -4 \int_0^{\pi/2} \left(-\frac{2}{3} a^3 \right) d\theta = \frac{4}{3} \pi a^3.$$

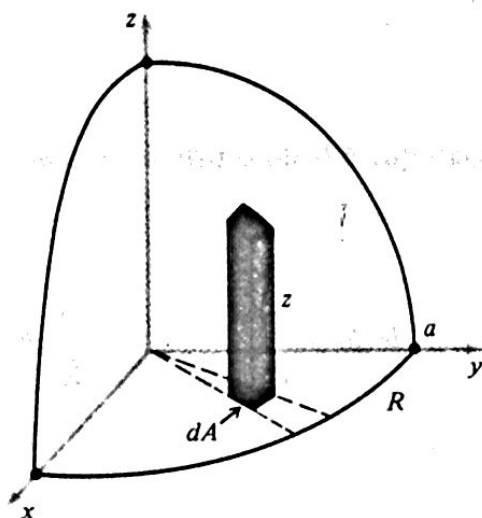



Figura 20.20

Os estudantes devem notar, em particular, como a presença de r na integral interna faz esse cálculo funcionar de modo suave.

Exemplo 3 A integral imprópria

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx$$

é importante na teoria da probabilidade e em outras partes da Matemática. Calcularemos seu valor com um artifício inteligente que usa uma integral dupla imprópria em coordenadas polares. Escrevemos

$$I = \int_0^\infty e^{-y^2}\, dy.$$

Como não importa a letra que utilizemos para variável de integração, temos

$$I^2 = \left(\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx\right)\left(\int_0^\infty e^{-y^2}\,dy\right).$$

Colocando o primeiro fator para dentro do segundo sinal de integração, podemos escrever a expressão acima na forma

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx\right) e^{-y^2}\,dy = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-x^2} e^{-y^2}\,dx\right) dy \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy. \end{aligned}$$

Essa integral dupla se dá em região que é todo o primeiro quadrante do plano xy. Em coordenadas polares, temos

$$I^2 = \int_0^{\pi/2} \int_0^\infty e^{-r^2}\, r\,dr\,d\theta = \int_0^{\pi/2} \left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^\infty d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}\,d\theta = \frac{\pi}{4},$$

logo

$$I = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

ou

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}. \tag{4}$$

Essa fórmula é particularmente notável, pois sabe-se que a integral indefinida

$$\int e^{-x^2}\,dx$$

é impossível de ser expressa como função elementar *.

---

* Existe uma história famosa envolvendo Lord Kelvin, físico escocês do século XIX. Certa ocasião, Kelvin perguntou à classe: "Vocês sabem o que é um matemático?" Ele foi ao quadro-negro e escreveu

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi},$$

que é equivalente a (4). "Um matemático", continuou, "é uma pessoa para quem isto é tão óbvio quanto o fato de dois mais dois ser quatro é para vocês". Na verdade, essa fórmula não é óbvia nem para o autor nem para qualquer dos matemáticos que ele conhece. Poder-se-ia concluir que Kelvin estava se exibindo e tentando desmoralizar sua classe.

Problemas

Nos Problemas de 1 a 13 use integrais duplas em coordenadas polares para calcular as áreas das regiões indicadas.

1. O círculo limitado pela circunferência $r = a$.

2. O círculo limitado pela circunferência $r = 2a \cos \theta$.

3. A região comum aos círculos limitados por $r = a$ e $r = 2a \cos \theta$.

4. Um laço de $r = a \cos 2\theta$.

5. O laço direito da lemniscata $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$.

6. A região interior à curva $r = 2 + \operatorname{sen} 3\theta$.

7. A região interior à lemniscata $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$ e exterior à circunferência $r = a$.

8. A região interior a $r = \operatorname{tg} \theta$ e entre $\theta = 0$ e $\theta = \pi/4$.

9. A região interior à cardióide $r = a(1 + \cos \theta)$ e exterior à circunferência $r = a$.

10. A região interior à circunferência $r = a$ e exterior à cardióide $r = a(1 + \cos \theta)$.

11. A região interior à cardióide $r = 2a(1 + \cos \theta)$ e exterior à circunferência $r = 3a$.

12. A região entre $r = \pi/4$ e $r = \pi/2$, entre $r = \theta$ e $r = \frac{1}{2}\theta\ (\theta \geq 0)$.

13. A região interior à cardióide $r = 1 + \cos \theta$ e à direita da reta $x = \frac{3}{4}$.

14. Sendo R a região limitada pelas retas $y = x, y = 0, x = 1$, calcule a integral dupla

$$\iint_R \frac{dx\, dy}{(1 + x^2 + y^2)^{3/2}}$$

usando coordenadas polares.

15. Calcule a integral

$$\int_0^{2a} \int_0^{\sqrt{2ax - x^2}} (x^2 + y^2)\, dy\, dx$$

usando coordenadas polares.

Nos problemas de 16 a 22 escreva a integral dada na forma

$$\int_{\alpha}^{\beta}\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} z\, r\, dr\, d\theta.$$

16. $\displaystyle\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}} z\,dy\,dx.$

17. $\displaystyle\int_0^3\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} z\,dy\,dx.$

18. $\displaystyle\int_{-1}^0\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} z\,dx\,dy.$

19. $\displaystyle\int_0^1\int_{x^2}^{x} z\,dy\,dx.$

20. $\displaystyle\int_0^4\int_0^{\sqrt{4-(x-2)^2}} z\,dy\,dx.$

21. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}/2}\int_y^{\sqrt{1-y^2}} z\,dx\,dy.$

22. $\displaystyle\int_0^2\int_0^{\sqrt{2y-y^2}} z\,dx\,dy.$

23. Faz-se um buraco cilíndrico de raio b passando pelo centro de uma esfera de raio a.

 (a) Calcule o volume do buraco. Observe que essa fórmula dá o volume da esfera quando $b = a$.

 (b) Calcule o volume do sólido em forma de anel que restou. Expresse esse volume em termos da altura h do anel. Observe o fato notável de que esse volume depende apenas de h e não do raio a da esfera ou do raio b do buraco.

24. Calcule o centróide da região englobada pelo laço de $r = a \cos 2\theta$ que está no primeiro e no quarto quadrantes.

25. Calcule o centróide da região englobada pela cardióide $r = a(1 + \cos\theta)$.

26. Calcule o centróide da região englobada pelo laço direito da lemniscata $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$.

27. Calcule o centróide do disco semicircular $x^2 + y^2 \leq a^2$, $y \geq 0$.

28. Calcule o volume do cone sólido $0 \leq z \leq h(a - r)/a$.

29. Calcule o volume do sólido sob o cone $z = 2a - r$, cuja base é limitada pela cardióide $r = a(1 + \cos\theta)$.

30. Calcule o volume cortado da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$ pelo cilindro $x^2 + y^2 = 2ax$.

31. Para o sólido limitado pelo plano xy, pelo cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ e pelo parabolóide $z = b(x^2 + y^2)$ com $b > 0$, calcule (a) o volume, (b) o centróide.

32. Calcule o momento de inércia I_z da placa circular limitada por $r = a$ considerando a densidade δ constante. (Compare esse cálculo muito fácil com o trabalho necessário para resolver o mesmo problema usando coordenadas retangulares, no Problema 14 da Seção 20.3.)

33. Calcule o momento polar de inércia I_z de uma placa fina de densidade constante δ que tem a forma do círculo $r = 2a \cos \theta$.

34. Resolva o Problema 33 para uma placa que tem a forma da cardióide $r = a(1 + \cos \theta)$.

35. Uma placa fina é limitada pela circunferência $r = a$ e tem densidade $\delta = a^2/(a^2 + r^2)$. Calcule sua massa M e o momento polar de inércia I_z.

36. O centro de uma circunferência de raio $2a$ está sobre uma circunferência de raio a. Calcule o centróide da região entre as duas circunferências.

37. Uma placa fina de densidade constante δ tem a forma de um setor circular de raio a e ângulo central 2α. Calcule o momento de inércia em relação à bissetriz do ângulo.

38. Calcule o centróide do setor circular descrito no Problema 37. Obtenha o resultado do Problema 27 como caso particular desse.

39. Use o fato de que $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ para mostrar que

(a) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-2x^2}\,dx = \frac{1}{4}\sqrt{2\pi}$;

(b) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-3x^2}\,dx = \frac{1}{6}\sqrt{3\pi}$;

(c) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-4x^2}\,dx = \frac{1}{4}\sqrt{\pi}$;

(d) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{e^{-\tan^2 x}}{\cos^2 x}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$;

(e) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{\pi}$;

(f) $\displaystyle\int_0^\infty x^2 e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{4}\sqrt{\pi}$;

(g) $\displaystyle\int_0^\infty \sqrt{x}\, e^{-x}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$;

(h) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{-\ln x}} = \sqrt{\pi}$;

(i) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{-\ln x}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

40. Use o método do Exemplo 3 para calcular

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{dx\,dy}{(1 + x^2 + y^2)^2}.$$

41. Há uma pequena dificuldade com o cálculo de I^2 no Exemplo 3, pois não discutimos integrais duplas impróprias. Neste problema, esboçamos uma abordagem um pouco menos nobre da fórmula (4). Na Fig. 20.21 mostramos um quadrante de um círculo de raio a, que está no interior de um quadrado de lado a que, por sua vez, está dentro de um quadrante de um círculo de raio $\sqrt{2}\,a$. Denote essas regiões por R_1, R_2, R_3.

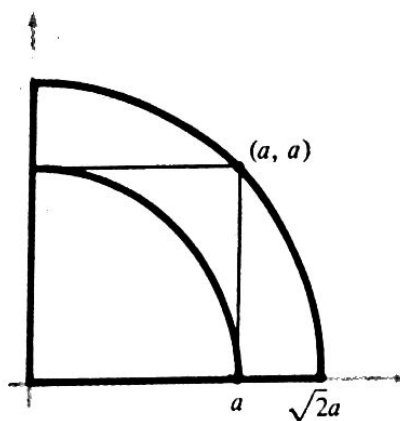



Figura 20.21

(a) Mostre que

$$\iint\limits_{R_1} e^{-r^2}\,dA = \frac{\pi}{4}(1 - e^{-a^2})$$

e

$$\iint\limits_{R_3} e^{-r^2}\,dA = \frac{\pi}{4}(1 - e^{-2a^2}).$$

(b) Mostre que

$$\iint\limits_{R_2} e^{-r^2}\,dA = \int_0^a \int_0^a e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \left(\int_0^a e^{-x^2}\,dx\right)^2.$$

(c) Use (a) e (b) para mostrar que

$$\frac{\pi}{4}(1 - e^{-a^2}) < \left(\int_0^a e^{-x^2}\, dx\right)^2 < \frac{\pi}{4}(1 - e^{-2a^2}).$$

(d) Use (c) para concluir que

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

20.5 INTEGRAIS TRIPLAS

A definição de integral tripla segue o mesmo padrão de idéias usado para definir integral dupla na Seção 20.2. Vamos nos limitar portanto a uma breve explanação.

Uma integral tripla envolve uma função $f(x, y, z)$ definida em uma região tridimensional R. Dividimos R em muitas caixas retangulares pequenas (e partes de caixas) por planos paralelos aos planos coordenados e denotamos o volume da k-ésima caixa que fica inteiramente contida em R por ΔV_k. A seguir, calculamos o valor da função num ponto (x_k, y_k, z_k) da k-ésima caixa e formamos o produto $f(x_k, y_k, z_k)\Delta V_k$. Finalmente, formamos a soma desses produtos sobre todas as caixas contidas em R,

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\, \Delta V_k.$$

A integral tripla de $f(x, y, z)$ sobre R é agora definida como o limite dessas somas quando n tende a infinito e a diagonal máxima das caixas (ou seja, a maior diagonal de qualquer das caixas) tende a zero,

$$\iiint_R f(x, y, z)\, dV = \lim \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\, \Delta V_k. \tag{1}$$

As vezes usamos a notação alternativa

$$\iiint_R f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz, \tag{2}$$

sem implicação quanto à ordem de integração. Chega-se a essa notação uma vez que o volume de uma caixa com faces paralelas aos planos coordenados pode ser escrito como $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$, e daí temos a fórmula do elemento de volume

$$dV = dx\,dy\,dz. \tag{3}$$

A Fig. 20.22 sugere o modo em que a integral tripla pode ser formada diretamente a partir da função $f(x, y, z)$ e do elemento de volume dV, na forma explicada nas duas seções anteriores: multiplicamos dV por $f(x, y, z)$ e integramos (ou somamos) as quantidades $f(x, y, z)\,dV$ quando o elemento de volume dV varre toda a região R. Como antes, esse modo de pensar é meramente uma abreviação do complexo processo de limite de somas, que constitui a definição precisa da integral tripla.

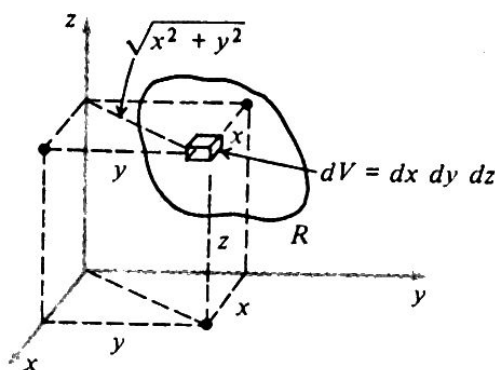



Figura 20.22.

O principal aspecto teórico é que a integral tripla (1) ou (2) existe se $f(x, y, z)$ for contínua e se a fronteira de R for razoavelmente bem comportada. Não nos deteremos nesse assunto. O principal aspecto prático é que as integrais triplas podem, com freqüência, ser calculadas como integrais iteradas.

Antes de discutir integrais triplas iteradas, estenderemos rapidamente as idéias da Seção 20.3 ao presente contexto. Primeiro, se a região R for encarada como um corpo sólido de densidade variável $\delta = \delta(x, y, z)$ [= massa por unidade de volume], então δdV é o elemento de massa – isto é, a massa contida no elemento de volume – e a massa total é

$$M = \iiint_R \delta dV.$$

Considerações análogas levam a fórmulas para os momentos em relação aos diferentes planos coordenados, denotados por M_{yz}, M_{xz} e M_{xy}; conduzem também a fórmulas para os momentos de inércia em relação aos diferentes eixos, denotados por I_x, I_y e I_z. Essas fórmulas (veja a Fig. 20.22) são

$$M_{yz} = \iiint_R x\,\delta dV, \qquad M_{xz} = \iiint_R y\,\delta dV, \qquad M_{xy} = \iiint_R z\,\delta dV;$$

e

$$I_x = \iiint_R (y^2 + z^2)\,\delta dV, \qquad I_y = \iiint_R (x^2 + z^2)\,\delta dV,$$

$$I_z = \iiint_R (x^2 + y^2)\,\delta dV.$$

As equações

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{M}, \qquad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{M}, \qquad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{M}$$

definem, de forma similar à que foi vista, o centro de massa do corpo ou o centróide se δ for constante.

De forma idêntica à que fizemos com integrais duplas, nós usualmente calculamos integrais triplas por iteração. Por exemplo, sendo R descrita por desigualdades da forma

$$a \leq x \leq b, \qquad y_1(x) \leq y \leq y_2(x), \qquad z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y),$$

(Fig. 20.23), então

$$\iiint_R f(x, y, z)\, dV = \int_a^b \left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz \right) dy \right] dx.$$

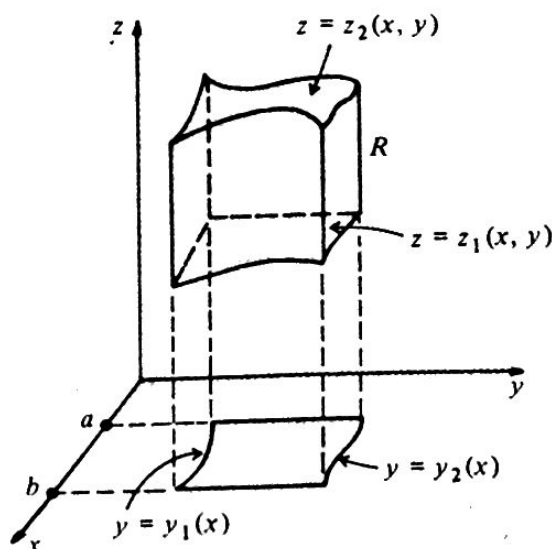



Figura 20.23

Usualmente omitimos os parênteses e colchetes e escrevemos o segundo membro dessa igualdade na forma

$$\int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx.$$

Como sempre, integramos de dentro para fora, integrando primeiro em relação a z, depois em relação a y e finalmente em relação a x. Outras ordens de integração são, muitas vezes, possíveis. A ordem que escolhemos em qualquer problema específico deve ser acompanhada de uma pequena precaução. Nossa preferência deve obedecer a critérios que levem a cálculos fáceis, evitando-se, sempre que possível, caminhos que conduzam a cálculos muito trabalhosos.

Exemplo 1 Calcule o centróide do tetraedro limitado pelos planos coordenados e pelo plano $x + y + z = 1$.

Solução Podemos tratar o tetraedro (Fig. 20.24) como um sólido de densidade $\delta = 1$; assim a massa será igual ao volume.

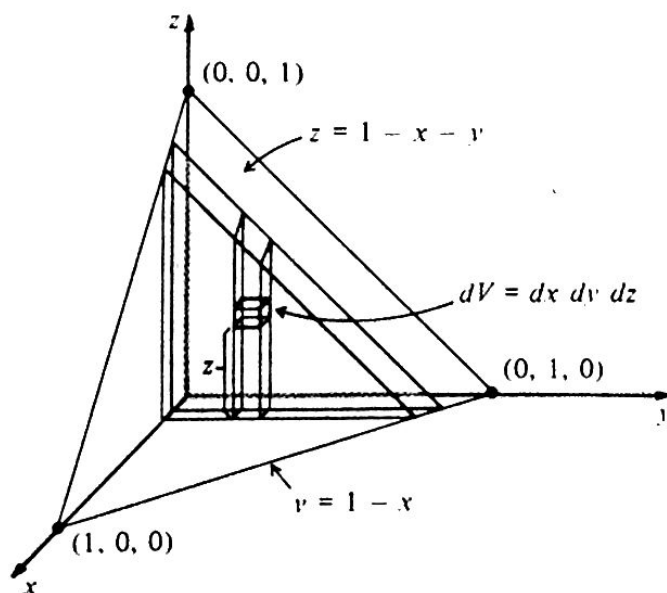



Figura 20.24

Por considerações de geometria, o volume do tetraedro é $V = \dfrac{1}{6}$ e $\bar{z}$ é definido por

$$\bar{z} = \frac{1}{V} \iiint_R z\, dV.$$

Integrando-se primeiro em z, depois em y e finalmente em x, devemos escrever

$$\bar{z} = \frac{1}{V} \iiint_R z\, dz\, dy\, dx,$$

onde deverão estar inseridos os limites adequados de integração. Para calcular os limites de z, usamos a equação do plano oblíquo e imaginamos que o elemento de volume mostrado na figura – de forma semelhante a um elevador em seu poço – move-se para cima a partir de $z = 0$ até $z = 1 - x - y$. A seguir, a coluna resultante gera uma fatia ao se mover por meio do sólido da esquerda para direita, de $y = 0$ a $y = 1 - x$. E, finalmente, para completar o volume, a fatia move-se através do sólido de trás para frente, de $x = 0$ a $x = 1$. Assim

$$\begin{aligned}
\bar{z} &= \frac{1}{\frac{1}{6}} \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} z\, dz\, dy\, dx = 6 \int_0^1 \int_0^{1-x} \left[\frac{1}{2} z^2\right]_0^{1-x-y} dy\, dx \\
&= 3 \int_0^1 \int_0^{1-x} (1 - x - y)^2\, dy\, dx = 3 \int_0^1 \left[-\frac{1}{3}(1 - x - y)^3\right]_0^{1-x} dx \\
&= \int_0^1 (1 - x)^3\, dx = -\frac{1}{4}(1 - x)^4\Big]_0^1 = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Em virtude da simetria da situação, vemos que o centróide é o ponto $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$. Poderíamos ter determinado $\bar{z}$ integrando em qualquer outra ordem, por exemplo, primeiro em x, depois em y e finalmente em z,

$$\bar{z} = \frac{1}{\frac{1}{6}} \int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^{1-y-z} z\, dx\, dy\, dz,$$

onde os limites de integração foram determinados como anteriormente, examinando-se a figura. Os estudantes devem verificar que essa integral conduz ao mesmo resultado.

Exemplo 2 Use integral tripla para calcular o volume da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Solução O volume total é 8 vezes o volume do primeiro octante; logo, integrando-se na ordem z y, x (veja a Fig. 20.25) temos

$$\begin{aligned}
V &= 8 \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} dz\, dy\, dx \\
&= 8 \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\, dy\, dx.
\end{aligned}$$

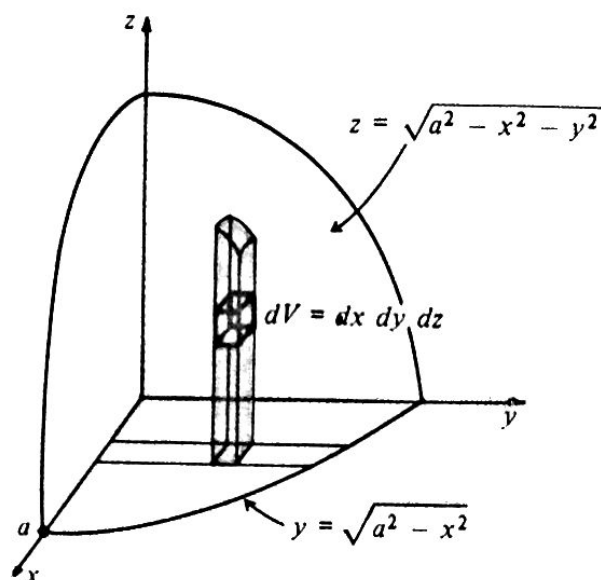



Figura 20.25

Para calcular a integral interna usamos o método da substituição trigonométrica $y = A$ sen θ, $dy = A \cos\theta\, d\theta$ obtendo a fórmula auxiliar

$$\int_0^A \sqrt{A^2 - y^2}\, dy = A^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\, d\theta = \frac{1}{2} A^2 \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2\theta)\, d\theta$$
$$= \frac{1}{2} A^2 \left[\theta + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\theta\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{4} \pi A^2.$$

Sabendo-se que $A = \sqrt{a^2 - x^2}$, (4) se transforma em

$$V = 8 \int_0^a \frac{1}{4} \pi(a^2 - x^2)\, dx = 2\pi \left[a^2 x - \frac{1}{3} x^3\right]_0^a = \frac{4}{3} \pi a^3,$$

e o cálculo está completo. Naturalmente, esse resultado é muito familiar, e já o obtivemos por vários métodos diferentes. Nosso propósito aqui foi o de fornecer uma ilustração da técnica de integração tripla.

Problemas

Nos Problemas de 1 a 10 calcule a integral iterada dada

1. $\int_0^1 \int_0^{x^2} \int_0^{xy^3} 18x^3y^2z \, dz \, dy \, dx.$

2. $\int_0^1 \int_{y^2}^1 \int_0^{1-x} x \, dz \, dx \, dy.$

3. $\int_0^a \int_0^b \int_0^c \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} \, dz \, dy \, dx.$

4. $\int_0^1 \int_0^{1-y} \int_0^{x^2+y^2} y \, dz \, dx \, dy.$

5. $\int_0^2 \int_0^\pi \int_0^{\ln 4} x^3 \cos \frac{y}{2} e^z \, dz \, dy \, dx.$

6. $\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{2-x} xyz \, dz \, dy \, dx.$

7. $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-z^2}} \int_{y^2+z^2-4}^{4-y^2-z^2} dx \, dy \, dz.$

8. $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{3}z} \int_0^{\sqrt{3(y^2+z^2)}} xyz\sqrt{x^2+y^2+z^2} \, dx \, dy \, dz.$

9. $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} \int_0^{4-x^2-y^2} y \, dz \, dx \, dy.$

10. $\int_0^1 \int_1^{2y} \int_0^x (x+2z) \, dz \, dx \, dy.$

11. Mude a ordem de integração colocando limites adequados à direita:

$$\int_0^a \int_0^x \int_0^y f(x, y, z) \, dz \, dy \, dx = \iiint f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz.$$

12. Calcule ambas as integrais do Problema 11 sendo $f(x, y, z) = 1$.

13. Calcule ambas as integrais do Problema 11 sendo $f(x, y, z) = x$.

14. Calcule ambas as integrais do Problema 11 sendo $f(x, y, z) = yz$.

15. Troque a ordem de integração colocando limites adequados à direita:

$$\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{0}^{1-x^2-y^2} f(x, y, z)\,dz\,dy\,dx = \iiint f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz.$$

16. Idem para

$$\int_{0}^{6}\int_{0}^{6-x}\int_{0}^{6-x-y} f(x, y, z)\,dz\,dy\,dx = \iiint f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz.$$

Nos Problemas de 17 a 24 use integração tripla para calcular o volume das regiões dadas.

17. A região do primeiro octante limitada pelo cilindro $x = 4 - y^2$ e os planos $y = z$, $x = 0$, $z = 0$.

18. A região acima do plano xy limitada pelas superfícies $z^2 = 16y$, $z^2 = y$, $y = x$, $y = 4$ e $x = 0$.

19. A região limitada pelos parabolóides $z = x^2 + 9y^2$ e $z = 18 - x^2 - 9y^2$.

20. A região limitada pelos parabolóides $z = 8 - x^2 - y^2$ e $z = x^2 + 3y^2$.

21. A região limitada pelo elipsóide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

22. A região limitada pelo cilindro $z = 4 - y^2$ *e* pelo parabolóide $z = x^2 + 3y^2$.

23. O tetraedro limitado pelos planos coordenados e pelo plano

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

onde a, b, c são números positivos.

24. A região limitada pelo cilindro $x^2 + y^2 = 4x$, pelo plano xy e pelo parabolóide $4z = x^2 + y^2$.

25. A densidade de um cubo é proporcional ao quadrado da distância a um vértice. Mostre que a massa do cubo é a mesma que se obteria caso a densidade fosse constante e igual à densidade original em um vértice adjacente ao primeiro.

26. Sendo a densidade $\delta = xy$, determine o momento, em relação ao plano xy, da parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant a^2$ que fica no primeiro octante.

27. O cubo limitado pelos planos coordenados e pelos planos $x = a$, $y = a$, $z = a$ tem densidade $\delta = cz$, onde c é uma constante. Determine seu momento de inércia I_z em relação ao eixo z.

28. Mostre que

$$\int_0^a \int_0^b \int_0^c \cos(x + y + z)\, dz\, dy\, dx = 8 \operatorname{sen} \frac{a}{2} \operatorname{sen} \frac{b}{2} \operatorname{sen} \frac{c}{2} \cos \frac{a + b + c}{2}.$$

29. Mostre que a "esfera" quadridimensional $x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = a^2$ tem volume

$$V = 16 \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \int_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2-z^2}} du\, dz\, dy\, dx = \frac{1}{2}\pi^2 a^4.$$

Sugestão: observe que a integral tripla interna é o volume do primeiro octante de uma esfera tridimensional de raio $\sqrt{a^2 - x^2}$.

30. Use o resultado do Problema 29 para calcular o volume da "esfera" $x^2 + y^2 + z^2 + u^2 + v2 = a^2$, de dimensão 5.

20.6 COORDENADAS CILÍNDRICAS

Se um sólido tem simetria axial é – isto é, simetria em relação a uma reta do espaço –, com freqüência, mais conveniente fazer coincidir seu eixo de simetria com o eixo z e utilizar coordenadas cilíndricas r, θ, z (Fig. 20.26) para o cálculo de integrais triplas.

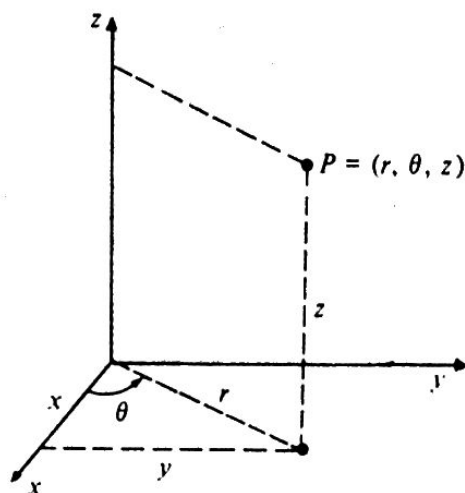



Figura 20.26 Coordenadas cilíndricas

Em vez do elemento de volume em coordenadas cartesianas,

$$dV = dx\, dy\, dz,$$

usamos o elemento de volume em coordenadas cilíndricas,

$$dV = r\, dr\, d\theta\, dz. \tag{1}$$

É fácil compreender essa fórmula, começando num ponto (r, θ, z) e dando às coordenadas pequenos incrementos dr, $d\theta$, dz. Esses incrementos preenchem uma pequena célula do espaço, que é aproximadamente uma caixa retangular com arestas $rd\theta$, dr e dz (Fig. 20.27) e dV, dado por (1), é simplesmente o produto dessas arestas.

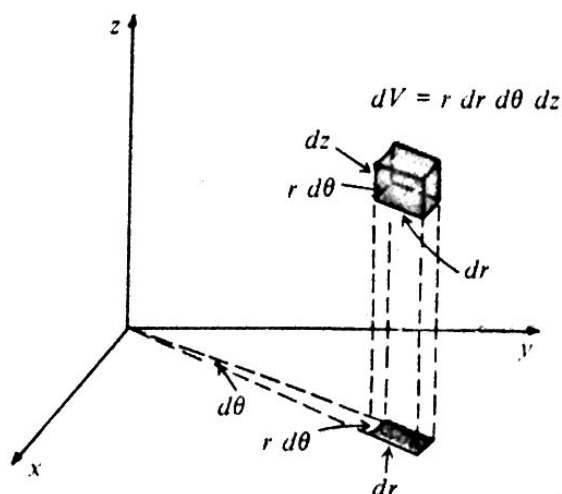



Figura 20.27 O elemento cilíndrico de volume.

As integrais triplas têm agora a forma

$$\iiint_R f(x, y, z)\, dV = \iiint_R f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta, z)\, r\, dr\, d\theta\, dz.$$

Podemos muitas vezes calcular tal integral escrevendo-a como integral iterada, da maneira ilustrada nos exemplos seguintes.

Exemplo 1 Use integral tripla em coordenadas cilíndricas para calcular o momento de inércia de um cilindro sólido uniforme de altura h, raio da base a e massa M, em relação a seu eixo.

Solução Coloque o cilindro na posição mostrada na Fig. 20.28.

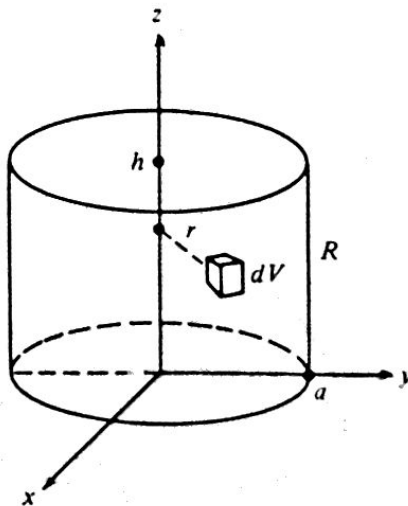



Figura 20.28

A palavra "uniforme" nesse contexto significa que a densidade δ é constante. A massa contida em dV é $\delta\, dV$, e o momento de inércia dessa massa em relação ao eixo z é $r^2\,\delta\, dV$. O momento de inércia total do cilindro em relação a seu eixo é portanto

$$\begin{aligned}\iiint_R r^2\,\delta dV &= \iiint_R r^2\,\delta\, r\, dr\, d\theta\, dz \\ &= \delta \int_0^{2\pi}\int_0^a\int_0^h r^3\, dz\, dr\, d\theta \\ &= \delta h \int_0^{2\pi}\int_0^a r^3\, dr\, d\theta = \delta h\cdot\frac{1}{4}a^4\int_0^{2\pi} d\theta \\ &= \delta\cdot\frac{1}{2}\pi a^4 h = \frac{1}{2}Ma^2,\end{aligned}$$

pois $M = \delta \cdot \pi a^2 h$. O fato de que os limites de integração são todos constantes é conseqüência da circunstância de que as coordenadas cilíndricas são perfeitamente adequadas para a solução deste problema.

Exemplo 2 Use uma integral tripla em coordenadas cilíndricas para calcular o volume da esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

Solução A equação cilíndrica da esfera é $r^2 + z^2 = a^2$; logo, a equação do hemisfério superior é $z = \sqrt{a^2 - r^2}$. Multiplicamos o volume acima do plano xy por 2 e calculamos esse volume integrando na ordem z, r, θ, como sugerido na Fig. 20.29:

$$V = 2\int_0^{2\pi}\int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2-r^2}} r\,dz\,dr\,d\theta = 2\int_0^{2\pi}\int_0^a r\sqrt{a^2-r^2}\,dr\,d\theta$$

$$= 2\int_0^{2\pi}\left[-\frac{1}{3}(a^2-r^2)^{3/2}\right]_0^a d\theta = 2\int_0^{2\pi}\frac{1}{3}a^3\,d\theta = \frac{4}{3}\pi a^3.$$

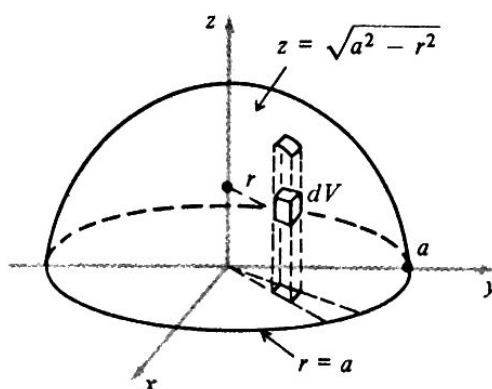



Figura 20.29

Naturalmente obtivemos o mesmo resultado que obtivéramos no Exemplo 2 da Seção 20.5, mas o cálculo que realizamos agora foi muito mais fácil, pois as coordenadas cilíndricas são melhores que as coordenadas cartesianas para se trabalhar com esferas.

Exemplo 3 Calcule o momento de inércia de uma esfera sólida uniforme de raio a e massa M em relação a um diâmetro.

Solução Podemos admitir que nossa esfera presente ocupa a região limitada pela esfera $r^2 + z^2 = a^2$ do Exemplo 2. Se a densidade constante for denotada por δ, então o momento de inércia em relação ao eixo z é

$$I_z = 2\int_0^{2\pi}\int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2-r^2}} r^2\cdot\delta r\,dz\,dr\,d\theta = 2\delta\int_0^{2\pi}\int_0^a r^3\sqrt{a^2-r^2}\,dr\,d\theta$$

$$= \delta\cdot 4\pi\int_0^a r^3\sqrt{a^2-r^2}\,dr.$$

(Na última etapa integramos fora da ordem indicada com o propósito de liquidarmos a integral em θ, que é simples e concentrarmos nossa atenção na integral em r que é mais difícil. Os estudantes se acostumarão com esse modo de encurtar o caminho.) Para calcular essa integral, usamos a substituição $r = a\,\text{sen}\,\phi$, $dr = a\cos\phi\,d\phi$ escrevendo

$$\int r^3\sqrt{a^2-r^2}\,dr = a^5\int \text{sen}^3\phi\cos^2\phi\,d\phi$$

$$= a^5\int(\cos^2\phi - \cos^4\phi)\,\text{sen}\,\phi\,d\phi$$

$$= a^5\left(\frac{1}{5}\cos^5\phi - \frac{1}{3}\cos^3\phi\right).$$

Assim obteremos

$$I_z = \delta\cdot 4\pi a^5\left[\frac{1}{5}\cos^5\phi - \frac{1}{3}\cos^3\phi\right]_0^{\pi/2} = \delta\cdot\frac{8}{15}\pi a^5 = \frac{2}{5}Ma^2,$$

pois $M = \delta\cdot\frac{4}{3}\pi a^3$.

Problemas

Use coordenadas cilíndricas para resolver os seguintes problemas.

1. Calcule o volume do sólido limitado pelo parabolóide $z = 1 - x^2 - y^2$ e abaixo do plano xy.

2. Calcule a massa do sólido do Problema 1 considerando a densidade
   (a) proporcional à distância ao plano $\delta = cz$;
   (b) proporcional à distância ao eixo $\delta = cr$;
   (c) proporcional ao quadrado da distância da origem, $\delta = c(r^2 + z^2)$.

3. Um cone sólido uniforme de altura h e raio de base a repousa sobre o plano xy com seu vértice sobre o semi-eixo positivo dos z. Calcule seu centro de massa.

4. Se a massa do cone do problema anterior for M, calcule seu momento de inércia I_z em relação ao eixo z:
   (a) integrando primeiro em relação a z:
   (b) integrando primeiro em relação a r.

5. Um buraco cilíndrico de raio b é furado através do centro de uma esfera sólida uniforme de raio a. Denotando com o símbolo δ a densidade, calcule a massa do sólido em forma de anel que resta após a retirada do cilindro e também seu momento de inércia em relação ao eixo do buraco. Observe que esse resultado generaliza o resultado do Exemplo 3.

6. Corta-se uma cunha de um cilindro sólido uniforme de raio a por um plano tangente à base e inclinado de um ângulo de 45º em relação à base. Calcule seu momento de inércia em relação ao eixo do cilindro.

7. Um cone sólido uniforme tem altura h, raio de base a e massa M. Calcule seu momento de inércia em relação a um eixo que passa pelo vértice e é paralelo à base. Sugestão: suponha que o cone tem seu vértice na origem, seu eixo no eixo z e calcule I_x.

8. Um cone sólido uniforme tem altura h, raio de base a e massa M. Calcule seu momento de inércia em relação a um diâmetro da base. Sugestão: suponha que o cone tem sua base no plano xy, seu eixo no eixo z e calcule I_x.

9. Um hemisfério sólido uniforme é limitado acima pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ e abaixo pelo plano xy. Calcule seu centro de massa. (O resultado desse problema é um Teorema de Arquimedes.)

10. Calcule a massa de um sólido cilíndrico de altura h e raio de base a sabendo-se que a densidade num ponto é proporcional à distância desse ponto ao eixo do cilindro.

11. Um buraco cilíndrico de raio a é furado através do centro de uma esfera sólida de raio $2a$. Calcule o volume do buraco.

12. Calcule o volume da região limitada acima pelo plano $z = 2x$ e abaixo pelo parabolóide $z = x^2 + y^2$.

13. Calcule o volume do sólido limitado acima pelo plano $z = x$ e abaixo pelo parabolóide $z = x^2 + y^2$.

14. Calcule a massa do sólido do Problema 13 sabendo-se que a densidade em cada ponto é proporcional ao quadrado da distância do eixo z.

15. Calcule o volume da região limitada acima pelo plano $z = x + y$, abaixo pelo plano xy e nos lados pelo cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ e pelos planos $x = a$, $y = a$.

16. Calcule o volume da região limitada acima pelo parabolóide $z = x^2 + y^2$, abaixo pelo plano xy e lateralmente pelo hiperbolóide

$$x^2 + y^2 = 1 + \frac{z^2}{4}.$$

17. Calcule o volume da região limitada acima e abaixo pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$ e pelo cilindro $(x - a)^2 + y^2 = a^2$.

18. A região do Problema 17 é preenchida com matéria de densidade constante $\delta = 1$. Calcule o momento de inércia desse sólido em relação ao eixo z.

19. Calcule o momento de inércia de um cilindro sólido uniforme de raio a e massa M, em relação a uma geratriz. Sugestão: coloque o cilindro de modo a que uma geratriz coincida com o eixo z.

20. Calcule o volume da região limitada acima pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2a^2$ e abaixo pelo parabolóide $az = x^2 + y^2$.

21. Calcule o momento de inércia de uma esfera sólida uniforme de raio a e massa M, em relação a uma reta tangente. Sugestão: coloque o centro da esfera na origem e considere a reta tangente a interseção dos planos $x = a$, $y = 0$.

22. Calcule o volume da região no interior do cilindro $r = a \operatorname{sen} \theta$ limitada acima pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ e abaixo pela metade superior do elipsóide $x^2/a^2 + y^2/a^2 + z^2/b^2 = 1$ $(b < a)$.

23. Calcule o volume da região limitada acima pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ e abaixo pelo cone $z = r \operatorname{cotg} \alpha$. Use esse resultado para calcular o volume de um hemisfério de raio a.

24. Calcule o volume do segmento esférico de altura h retirado de uma esfera de raio a por um plano a uma distância $a - h$ do centro.

20.7 COORDENADAS ESFÉRICAS. ATRAÇÃO GRAVITACIONAL

Como vimos, as coordenadas cilíndricas ajudam-nos a tratar de problemas nos quais ocorre simetria em relação a uma reta. Para enfrentar situações onde ocorre simetria em relação a um ponto, como no caso de uma esfera sólida cuja densidade num ponto é proporcional à distância desse ponto ao centro, o instrumento adequado são as coordenadas esféricas. Já tivemos contato com coordenadas esféricas ρ, ϕ, θ (Fig. 20.30) na Seção 18.7. Colocaremos agora essas coordenadas a serviço do cálculo de certas integrais triplas.

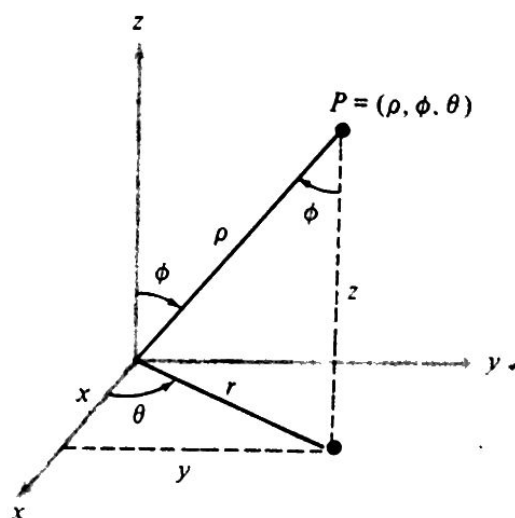



Figura 20.30 Coordenadas esféricas.

A fim de expressar uma integral tripla

$$\iiint_R f(x, y, z)\, dV$$

em coordenadas esféricas, devemos escrever x, y, z em função de p, ϕ, θ. Isto é fácil de fazer, bastando observar a Fig. 20.30:

$$\begin{aligned} z &= \rho \cos \phi, \\ r &= \rho \operatorname{sen} \phi, \\ x &= \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta, \\ y &= \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta. \end{aligned}$$

Devemos agora descobrir uma fórmula para o elemento de volume dV em termos de ρ, ϕ, θ. Para isso, comecemos num ponto $P = (\rho, \phi, \theta)$ acrescentando pequenos incrementos $d\rho$, $d\phi$, $d\theta$ a suas coordenadas esféricas. Como vemos na Fig. 20.31, o deslocamento de P na direção ρ tem extensão $d\rho$; na direção ϕ tem extensão $\rho d\phi$; e na direção θ tem extensão ρ sen $\phi d\theta$.

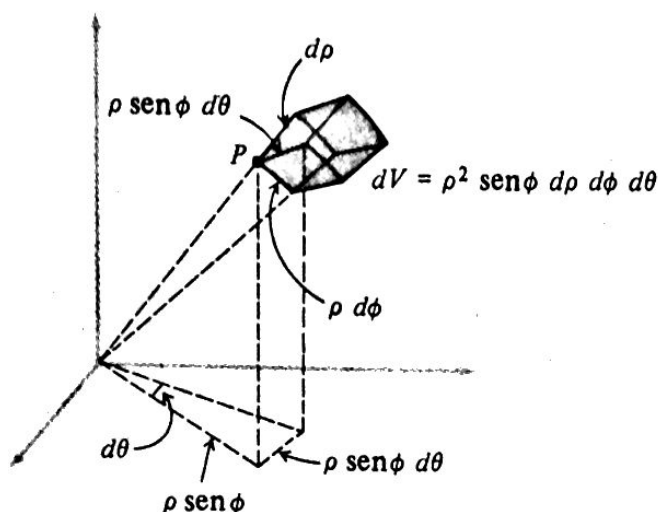



Figura 20.31 O elemento esférico de volume.

Essas três medidas são as arestas da "caixa esférica" mostrada na figura; o volume dessa caixa é portanto $(d\rho)(\rho d\phi)(\rho \text{ sen } \phi \, d\theta)$. Assim

$$dV = \rho^2 \text{ sen } \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta.$$

Para calcular uma integral tripla em coordenadas esféricas escrevemos então

$$\iiint_R f(x, y, z)\, dV = \iiint_R f(\rho \text{ sen } \phi \cos \theta, \rho \text{ sen } \phi \text{ sen } \theta, \rho \cos \phi)\, \rho^2 \text{ sen } \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta.$$

Em qualquer problema concreto, tentamos realizar a expressão acima como uma integral iterada de tal modo que dV varra a região R de modo conveniente. Na maioria dos casos, a natureza da região R sugere uma ordem apropriada de integração, juntamente com os correspondentes limites de integração.

Exemplo 1 Use integral tripla em coordenadas esféricas para calcular o volume da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Solução A equação dessa esfera em coordenadas esféricas é $\rho = a$. Calculamos a integral

$$V = \iiint_R dV = \iiint_R \rho^2 \text{ sen } \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

integrando na ordem ρ, ϕ, θ. A primeira integração quando cresce de 0 a a, integra o elemento de volume dV dando o volume da "cavilha" (Fig. 20.32); a segunda quando ϕ cresce de 0 a π, integra o volume dessa "cavilha" dando o volume da cunha na figura; e a terceira quando θ cresce de 0 a 2π, integra o volume dessa cunha em torno do eixo z dando o volume da esfera inteira. O cálculo concreto é

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a} \rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$
$$= \left[\int_0^{a} \rho^2 \, d\rho\right]\left[\int_0^{\pi} \operatorname{sen}\phi \, d\phi\right]\left[\int_0^{2\pi} d\theta\right]$$
$$= \frac{1}{3} a^3 \cdot 2 \cdot 2\pi = \frac{4}{3}\pi a^3,$$

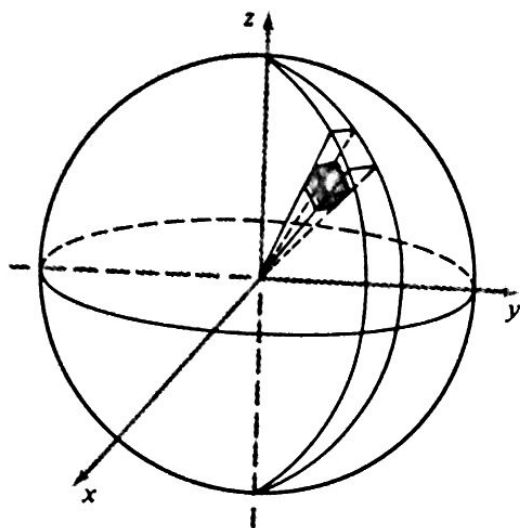



Figura 20.32

como era esperado. Esse problema é perfeitamente adequado para o uso de coordenadas esféricas, como fica evidente pela simplicidade desse cálculo comparado com os efetuados nos correspondentes exemplos das Seções 20.5 e 20.6

Exemplo 2 Calcule o centróide da região limitada pela esfera $\rho = a$ e pelo cone $\phi = \alpha$.

Solução Essa região (Fig. 20.33) tem a forma de um cone cheio de sorvete. Seu volume é

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^{\alpha}\int_0^{a} \rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$
$$= \frac{1}{3} a^3 \cdot 2\pi \int_0^{\alpha} \operatorname{sen}\phi \, d\phi$$
$$= \frac{2}{3}\pi a^3(1 - \cos\alpha).$$

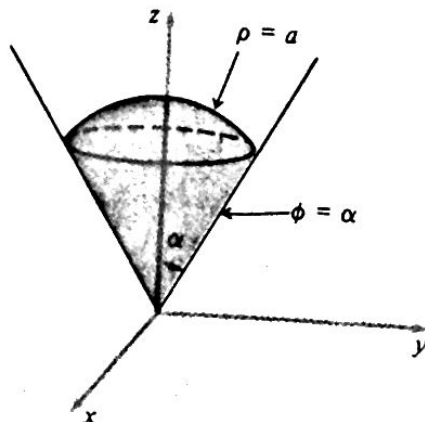



Figura 20.33

Para conferir a fórmula vemos que ela fornece o resultado $\frac{4}{3}\pi a^3$ para o volume da esfera, ou seja, quando $\alpha = \pi$. Agora vejamos o centróide. É claro, por razões de simetria, que $\bar{x} = \bar{y} = 0$. Para calcular $\bar{z}$, devemos primeiro calcular o momento da região em relação ao plano xy.

$$M_{xy} = \iiint_R z\, dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{\alpha} \int_0^{a} (\rho \cos \phi)\, \rho^2 \operatorname{sen} \phi \, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\pi a^4 \int_0^{\alpha} \operatorname{sen} \phi \cos \phi \, d\phi$$

$$= \frac{1}{4}\pi a^4 \operatorname{sen}^2 \alpha.$$

Finalmente temos

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{V} = \frac{3}{2\pi a^3(1 - \cos \alpha)} \cdot \frac{1}{4}\pi a^4 \operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{3}{8} a(1 + \cos \alpha).$$

No caso em que $\alpha = \pi/2$, obteremos $\bar{z} = \frac{3}{8}a$, que é o resultado do Problema 9 da Seção 20.6.

Em nosso próximo exemplo, discutiremos uma idéia que possui implicações importantes em diversos ramos da Física.

Exemplo 3 *A atração gravitacional de uma concha esférica fina.* Suponhamos que uma quantidade de matéria de massa total M seja uniformemente distribuída sobre a superfície de uma esfera de raio a centrada na origem (Fig. 20.34).

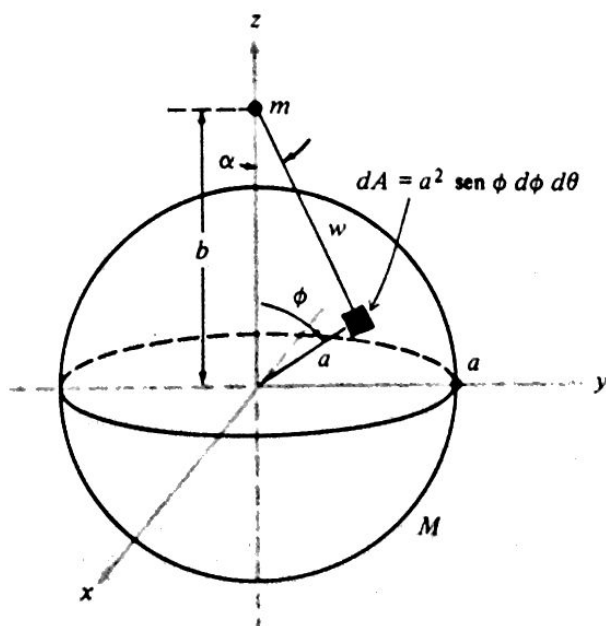



Figura 20.34.

Mostre que a força gravitacional F exercida por essa concha esférica fina sobre uma partícula de massa m localizada num ponto $(0, 0, b)$ $(b > a)$ tem o mesmo valor que obteríamos se considerássemos a massa total da concha concentrada em seu centro. Ou seja, mostre que

$$|\mathbf{F}| = G\frac{Mm}{b^2}, \tag{1}$$

onde G é a constante de gravitação.

Solução Por razões de simetria, é claro que o vetor $\mathbf{F}$ está orientado para baixo, de modo que $\mathbf{F} = F_z\mathbf{k}$, onde F_z é negativo. O elemento de área sobre a superfície da esfera (Fig.20.31) é

$$dA = a^2 \operatorname{sen}\phi \, d\phi \, d\theta; \tag{2}$$

e como a massa por unidade de área sobre a superfície é $M/4\pi a^2$, a massa de dA é

$$dM = \frac{M}{4\pi} \operatorname{sen}\phi \, d\phi \, d\theta.$$

A Lei de Gravitação de Newton diz que a força que esse elemento de massa exerce sobre m (veja a Fig. 20.34) tem módulo

$$G\frac{dM \cdot m}{w^2} = \frac{GMm}{4\pi w^2} \operatorname{sen}\phi \, d\phi \, d\theta,$$

e componente vertical

$$G\frac{dM \cdot m}{w^2} \cos\alpha = \frac{GMm}{4\pi w^2} \cos\alpha \operatorname{sen}\phi \, d\phi \, d\theta.$$

Determinemos agora o módulo de força total que a concha exerce sobre m, integrando essa expressão sobre a superfície da esfera

$$\begin{aligned} |\mathbf{F}| &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{GMm}{4\pi w^2} \cos\alpha \operatorname{sen}\phi \, d\phi \, d\theta \\ &= \frac{GMm}{2} \int_0^{\pi} \frac{1}{w^2} \cos\alpha \operatorname{sen}\phi \, d\phi. \end{aligned} \tag{3}$$

Para calcularmos essa integral, mudamos a variável de integração de ϕ para w e integramos de $w = b - a$ a $w = b + a$ (veja a figura). A razão dessa estratégia se tornará clara na seqüência. Para realizarmos a necessária transformação da integral em (3), usamos primeiro a Lei dos co-senos escrevendo

$$w^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \phi. \tag{4}$$

Logo

$$2w\, dw = 2ab \operatorname{sen}\phi\, d\phi$$

ou

$$\operatorname{sen} \phi\, d\phi = \frac{w\, dw}{ab}. \tag{5}$$

Para expressar $\cos \alpha$ como função de w, usamos a relação

$$w \cos \alpha + a \cos \phi = b$$

ou

$$\cos \alpha = \frac{b - a \cos \phi}{w}.$$

Aplicando (4), chegamos a

$$\cos \alpha = \frac{b - [(a^2 + b^2 - w^2)/2b]}{w} = \frac{b^2 - a^2 + w^2}{2bw}. \tag{6}$$

Substituindo-se (5) e (6) em (3), obtemos

$$\begin{aligned} |\mathbf{F}| &= \frac{GMm}{2} \int_{b-a}^{b+a} \frac{1}{w^2} \left(\frac{b^2 - a^2 + w^2}{2bw} \right) \frac{w\, dw}{ab} \\ &= \frac{GMm}{4ab^2} \int_{b-a}^{b+a} \left(\frac{b^2 - a^2}{w^2} + 1 \right) dw. \end{aligned} \tag{7}$$

O valor da integral é

$$\left[-\frac{(b^2 - a^2)}{w} + w \right]_{b-a}^{b+a} = [-(b - a) + (b + a) + (b + a) - (b - a)] = 4a.$$

Logo (7) se torna

$$|\mathbf{F}| = \frac{GMm}{4ab^2} \cdot 4a = G\frac{Mm}{b^2},$$

e com isso a prova de (1) está terminada.

A conclusão a que chegamos no exemplo conduz a um dos grandes teoremas de Newton da astronomia matemática: *sob a ação da Lei da Gravitação, uma esfera sólida atrai uma partícula no espaço exterior como se sua massa estivesse concentrada em seu centro.* A esfera pode ser encarada constituída de um grande número de conchas esféricas finas concêntricas, como as camadas de uma cebola, e cada concha exerce tal atração. Na realidade, nossa discussão prova ainda mais, ou seja, prova que a mesma afirmação vale para uma esfera sólida de densidade variável, supondo que a densidade dependa apenas da distância ao centro. O Teorema de Newton mostra que, ao se computar a atração gravitacional mútua de vários corpos do sistema solar, como o Sol, a Terra e a Lua, é legítimo substituir esses corpos enormes por massas pontuais — isto é, por partículas de mesma massa total — localizadas em seus centros. Alguns historiadores da Ciência acreditam que Newton atrasou 20 anos a publicação de sua teoria do sistema solar até conseguir provar esse teorema.

Problemas

Use coordenadas esféricas para resolver os problemas seguintes.

1. Supondo-se a região do Exemplo 2 preenchida com matéria de densidade constante δ, calcule o momento de inércia do sólido resultante em relação ao eixo z. Use o resultado para mostrar que o momento de inércia de uma esfera sólida uniforme de raio a e massa M em relação a um diâmetro é $\frac{2}{3} Ma^2$.

2. No Exemplo 2, $\bar{z} \to \frac{3}{4} a$ quando $\alpha \to 0$. Explique a afirmação tendo em vista que a região se aproxima de um segmento de reta quando $\alpha \to 0$ e o centróide de um segmento é seu ponto médio.

3. Calcule o volume do toro $\rho = 2a \operatorname{sen} \phi$ (Fig. 18.41).

4. Supondo-se $0 < b < a$ e $0 < \alpha < \pi$, calcule o volume da região limitada pelas esferas concêntricas $\rho = b$, $\rho = a$ e pelo cone $\phi = \alpha$.

5. Calcule o centróide da concha hemisférica. $0 < b \leq \rho \leq a, z \geq 0$.

6. Calcule o momento de inércia em relação ao eixo z da concha do Problema 5 supondo tratar-se de um sólido de densidade constante δ.

7. Uma cunha é retirada de uma esfera sólida de raio a, formada por dois planos que se interceptam sobre um diâmetro. Sendo α o ângulo entre esses planos, calcule o volume da cunha.

8. Calcule a massa de uma esfera sólida de raio a supondo-se a densidade em cada ponto igual à distância do ponto à superfície.

9. Use integral tripla (em coordenadas esféricas) para verificar que o volume de um cone de altura h e raio da base r é $\frac{1}{3}\pi r^2 h$.

10. Sendo a densidade de uma esfera sólida de raio a proporcional à distância de onde é medida ao centro, $\delta = c\rho$, mostre que sua massa é $c\pi a^4$.

11. Seja n uma constante não-negativa e considere uma esfera sólida de raio a centrada na origem, cuja densidade é proporcional à n-ésima potência da distância de onde é medida ao centro, $\delta = c\rho^n$.

    (a) Calcule o momento de inércia dessa esfera em relação ao eixo z.

    (b) Mostre como o resultado obtido em (a) conduz à conclusão de que o momento de inércia, em relação a um diâmetro, de uma esfera sólida uniforme de raio a e massa M é $\frac{2}{3} Ma^2$.

12. No Problema 11, permita que o expoente n seja negativo e determine qual restrição deve ser imposta a n na condição de que a massa da esfera seja finita. Sugestão: calcule a massa entre esferas concêntricas $\rho = b$ e $\rho = a$, $0 < b < a$ e depois faça $b \to 0$.

13. Esboce a região limitada pela superfície $\rho = a(1 - \cos\phi)$ e calcule seu volume.

14. Calcule a massa de uma esfera sólida de raio a centrada na origem supondo-se a densidade num ponto P igual ao produto das distâncias de P à origem e ao eixo z.

15. Considere uma esfera sólida de raio a centrada na origem com densidade variável $\delta = \delta(\rho, \phi, \theta)$.

    (a) Estabeleça uma integral iterada para a massa M com as integrações na ordem θ, ϕ, ρ.

    (b) Simplifique a integral de (a) o máximo possível para o caso particular em que a densidade é função apenas de ρ, digamos $\delta(\rho, \phi, \theta) = f(\rho)$.

    (c) Mostre que a fórmula em (b) pode ser obtida diretamente pelo uso de conchas esféricas, sem a utilização de integral iterada.

16. Aplique a fórmula (2) para calcular a área da calota polar sobre uma esfera de raio a definida para $0 \leqslant \phi \leqslant \alpha$ e use esse resultado para calcular a área de superfície total da esfera.

17. No Exemplo 3 admita que a partícula m esteja no interior da concha esférica, $b < a$, mostre que nesse caso a integral (7) tem valor zero. Isto prova o fato notável que uma concha material esférica fina uniforme não exerce força gravitacional sobre qualquer corpo localizado no interior de sua cavidade. Além disso, esta conclusão também vale para qualquer concha esférica não-fina em que determinada matéria de densidade variável preenche o espaço entre as duas esferas concêntricas, supondo-se que a densidade dependa apenas da distância a seu centro comum.

18. Admita que a Terra seja esférica com densidade constante e imagine que um pequeno túnel seja cavado através do centro. Desprezando o efeito da remoção dessa matéria, mostre que a atração gravitacional da Terra sobre uma partícula no túnel é *diretamente* proporcional à distância da partícula ao centro da Terra. Essa afirmação é necessariamente verdadeira caso a densidade seja variável, mas dependente apenas da distância ao centro?

19. Admita que a região discutida no Exemplo 2 seja preenchida com matéria de densidade constante δ e determine a atração gravitacional que ela exerce sobre uma partícula de massa m colocada na origem.

20. Retirando-se o topo arredondado do sólido do Problema 19, ficando um cone de altura $h = a \cos \alpha$, qual será agora a atração gravitacional que exerce sobre uma partícula de massa m colocada na origem?

21. Admita que determinada matéria de densidade superficial constante δ = (massa por unidade de área) seja espalhada sobre todo o plano xy e que uma partícula de massa m seja colocada no ponto $(0, 0, b)$ sobre o eixo z. Mostre que a atração gravitacional exercida pela massa plana sobre a partícula é dada pela seguinte integral imprópria em coordenadas polares

$$\iint_R \frac{GM\delta b}{(r^2 + b^2)^{3/2}}\, r\, dr\, d\theta,$$

onde R é todo o plano xy. Calcule essa integral inicialmente para um círculo de raio a centrado na origem e depois fazendo $a \to \infty$. Observe o fato notável de que o valor dessa integral não depende de b, o que significa que a força de atração do plano infinito sobre a partícula é independente da distância dela ao plano.

20.8. ÁREAS DE SUPERFÍCIES CURVAS

Na Seção 7.6 discutimos o problema de calcular a área de uma superfície de revolução. Consideraremos agora o problema de calcular áreas de superfícies mais gerais, especificamente daquelas que têm equações da forma

$$z = f(x, y),$$

sendo ambas as derivadas parciais $f_x(x, y)$ e $f_y(x, y)$ funções contínuas.

O método que descreveremos se baseia na idéia simples de que, se dois planos se interceptam num ângulo γ (Fig. 20.35), todas as áreas de um plano são multiplicadas por $\cos\gamma$ quando projetadas sobre o outro,

$$A = S\cos\gamma.$$

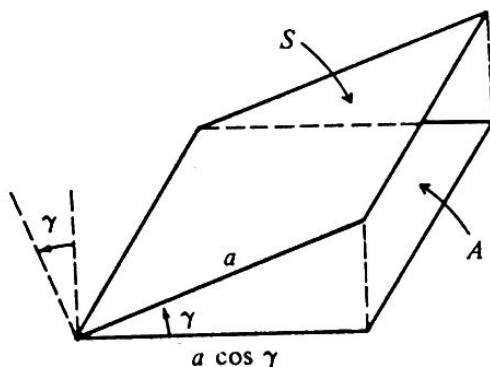



Figura 20.35

Isto é evidentemente verdadeiro para a área de um retângulo que possui um lado paralelo à reta de interseção dos planos e estende-se para outras regiões por um processo de passagem ao limite. Da mesma maneira, projetamos um elemento de área dS da superfície dada $z = f(x, y)$ sobre um elemento de área dA no plano xy (Fig. 20.36).

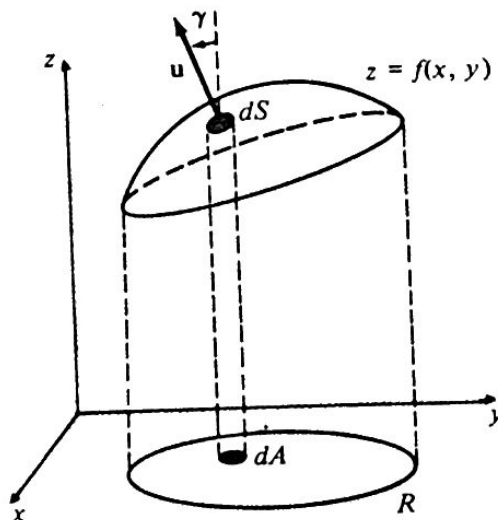



Figura 20.36.

Temos

$$dA = dS \cos \gamma,$$

onde γ é o ângulo entre a reta vertical e a normal à superfície que aponta para cima. Essa equação leva a

$$dS = \frac{dA}{\cos \gamma},$$

logo a área total da superfície é dada pela fórmula

$$S = \iint dS = \iint_R \frac{dA}{\cos \gamma}, \tag{1}$$

onde R é a região do plano xy sob a parte da superfície $z = f(x, y)$ cuja área desejamos calcular. O elemento de área dA na Fig. 20.36 é desenhado sem qualquer forma especial, pois a integral dupla (1) é, às vezes, usada com coordenadas cartesianas e, às vezes, com coordenadas polares.

A fim de tornar (1) um instrumento prático de cálculos concretos, precisamos de uma fórmula para determinar cos γ. Descobrimos essa fórmula recordando que o vetor $f_x\mathbf{i} + f_y\mathbf{j} - \mathbf{k}$ é normal à superfície, como vimos na Seção 19.3. Esse vetor normal particular aponta para baixo, pois sua componente k é negativa. Invertendo-se o sentido e dividindo o vetor pelo comprimento, obteremos o vetor

$$\mathbf{u} = \frac{-f_x\mathbf{i} - f_y\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}},$$

que é normal unitário apontando para cima e portanto cos γ é sua componente k

$$\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}}.$$

Assim escrevemos (1) na forma

$$S = \iint_R \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}\, dA, \tag{2}$$

que é a fórmula fundamental desta seção.

Exemplo 1 Calcule a área da metade superior da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ (Fig. 20.37).

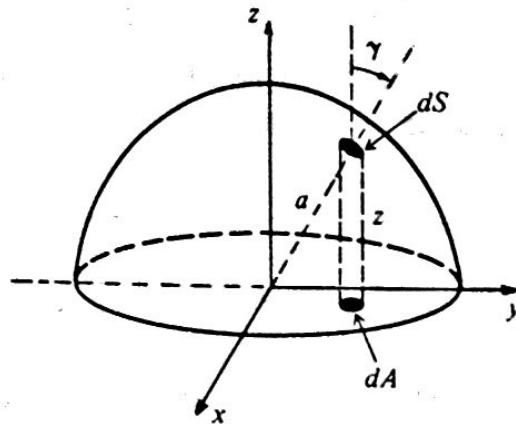



Figura 20.37

Solução O hemisfério superior é representado pela equação $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$. Assim temos

$$f_x = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}},$$

e uma fórmula análoga para f_y. O integrando em (2) é portanto

$$\left[\frac{x^2}{a^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{a^2 - x^2 - y^2} + 1\right]^{1/2} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}},$$

logo a área do hemisfério é

$$S = \iint_R \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\, dA, \tag{3}$$

onde R é a região do plano xy limitada pelo círculo $x^2 + y^2 = a^2$.

Vale a pena notar que, nesse particular, a figura revela diretamente que $\cos \gamma = z/a$, logo o integrando em (1) é

$$\frac{1}{\cos \gamma} = \frac{a}{z} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$$

e a integral (3) pode ser escrita imediatamente, sem cálculo. Calculamos agora a integral (3) introduzindo coordenadas polares

$$S = a\int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{r\,dr\,d\theta}{\sqrt{a^2-r^2}} = a\int_0^{2\pi}\left[-\sqrt{a^2-r^2}\right]_0^a d\theta = a^2\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi a^2.$$

Esse resultado está de acordo com a fórmula de Arquimedes da Geometria Elementar, que afirma que a área da superfície de uma esfera de raio a é $4\pi a^2$.

Exemplo 2 Calcule a área do parabolóide $z = x^2 + y^2$ no interior da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 6$.

Solução A fronteira da região-base R é a projeção sobre o plano xy da curva de interseção das duas superfícies (Fig. 20.38).

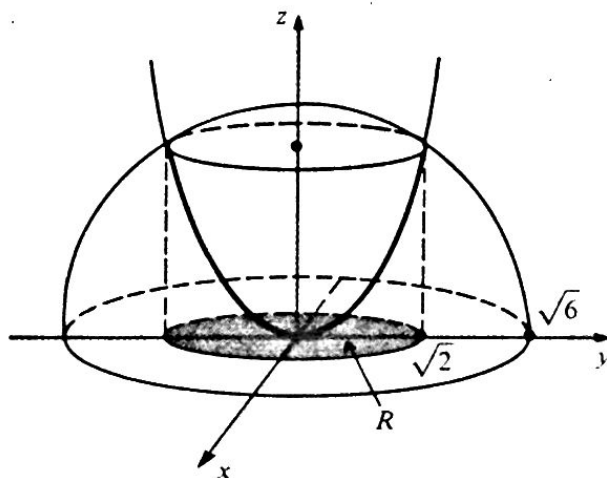



Figura 20.38.

É mais fácil trabalhar escrevendo as superfícies em coordenadas cilíndricas $z = r^2$ e $r^2 + z^2 = 6$. Eliminando-se z descobrimos que a fronteira de R é a circunferência $r^2 = 2$ ou $r = \sqrt{2}$. Nesse caso, temos $f(x, y) = x^2 + y^2$, logo $f_x = 2x$ e $f_y = 2y$ e, portanto, a área de superfície desejada é

$$S = \iint_R \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}\, dA.$$

Novamente efetuamos o cálculo usando coordenadas polares obtendo

$$S = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{4r^2+1}\, r\, dr\, d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{12}(4r^2+1)^{3/2} \right]_0^{\sqrt{2}} d\theta$$
$$= 2\pi \cdot \frac{1}{12}(27-1) = \frac{13}{3}\pi.$$

As fórmulas (1) e (2) são as fórmulas-padrão de cálculo para calcularmos concretamente áreas de superfícies específicas. Elas funcionam bem, e esperamos que pareçam razoáveis para os estudantes. Apesar disso, a *teoria* de áreas de superfícies é muito difícil, particularmente o problema de se dar uma definição totalmente satisfatória do próprio conceito. Esse problema ocupou a atenção dos matemáticos por quase cem anos, prosseguindo até hoje pesquisas sobre esses assuntos. Qualquer pessoa que deseje compreender a natureza das dificuldades deve estudar o clássico exemplo de H. A. Schwarz (1890), que abalou o mundo matemático da época. O exemplo de Schwarz é o de uma superfície simples e familiar cuja área pode ser computada de diversas maneiras igualmente razoáveis que, entretanto, conduzem a resultados brutalmente diferentes*.

Problemas

Resolva os Problemas de 1 a 6 usando as idéias desta seção, mas sem integração.

1. Calcule a área do triângulo cortado do plano $x + 2y + 2z = 6$ pelos planos coordenados.

2. Calcule a área acima do plano xy da superfície do cone $z^2 = x^2 + y^2$ cortada pelo cilindro $x^2 + y^2 = 2ax$.

3. Calcule a área da figura cortada do plano $x + y + z = 7$ pelo cilindro $x^2 + y^2 = a^2$.

4. Calcule a área da figura cortada do plano $z = by$ pelo cilindro $x^2 + y^2 = a^2$.

5. Calcule a área da superfície do cone $z^2 = x^2 + y^2$ que está entre o plano xy e o plano $2z + y = 3$. Sugestão: qual é a área de uma elipse?

6. No Problema 5 calcule a área da elipse em que o plano intercepta o cone.

---

* Esse exemplo está descrito em várias obras. Veja, por exemplo, p. 204 de D. Widder, *Advanced Calculus*, 2ª ed. (Prentice-Hall, 1961).

7. Calcule a área da superfície da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ que está acima do plano xy e dentro do cilindro $x^2 + y^2 = ax$.

8. No Problema 7 calcule a área da superfície do cilindro acima do plano xy que está dentro da esfera. Sugestão: calcule $\int h\,ds$, onde h é a altura do cilindro e ds é o elemento de comprimento de arco no plano xy.

9. Calcule a área da superfície cortada do parabolóide $z = x^2 + y^2$ pelo plano $z = 1$.

10. Calcule a área da parte da superfície $z^2 = 2xy$ que está acima do plano xy e é limitada pelos planos $x = 0, x = 2$ e $y = 0, y = 1$.

11. Calcule a área cortada da superfície de sela $az = x^2 - y^2$ pelo cilindro $x^2 + y^2 = a^2$.

12. Calcule a área da superfície da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2a^2$ que está dentro da metade superior do cone $z^2 = x^2 + y^2$.

13. Sendo uma região qualquer do plano xy, mostre que a área da superfície do parabolóide $z = ax^2 + by^2$ que está acima de R é igual à área da parte da superfície de sela $z = ax^2 - by^2$ que está acima (ou abaixo) de R. Mostre que essa afirmação é também verdadeira para os pares de superfícies $z = x^2 + y^2$, $z = 2xy$ e $z = \ln(x^2 + y^2)$, $z = 2 \text{ arc tg}^{-1} x/y$.

14. Calcule a área da superfície do parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$ que está acima do plano xy.

15. Calcule a área da superfície do cilindro $z = 1 - x^3$ cortada pelos planos $y = 0, z = 0$ e $y = ax, a > 0$.

16. Calcule a área da superfície do cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ cortada pelo cilindro $y^2/a^2 + z^2/b^2 = 1$.

17. Calcule a área da superfície do cilindro $x^2 + z^2 = a^2$ que está no primeiro octante e entre os planos $y = 3x$ e $y = 5x$.

18. Calcule a área da superfície do cilindro $y^2 + z^2 = a^2$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = a^2$.

19. O cilindro $r^2 = 4 \cos 2\theta$ intercepta o plano xy numa lemniscata. Calcule a área da superfície do parabolóide $4z = x^2 + y^2$ que está dentro do cilindro.

20. Na Seção 7.6 usamos a fórmula

$$S = \int_a^b 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

para calcular a área da superfície de revolução obtida pela rotação da curva $y = f(x)$ em torno do eixo x. Mostre que esse novo método é consistente com o anterior, deduzindo essa fórmula de (2). Sugestão: a equação da superfície de revolução é $y^2 + z^2 = f(x)^2$.

21. *Triângulo esférico* é uma figura sobre a superfície de uma esfera limitada por arcos de três grandes círculos (Fig.20.39). Sendo a o raio da esfera, então a *fórmula de Legendre** para a área de tal triângulo é

$$S = a^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi),$$

onde α, β, γ são os ângulos entre os lados. (A quantidade $\alpha + \beta + \gamma - \pi$ chama-se *excedente esférico* do triângulo.) Assim, sobre uma dada esfera a área de um triângulo depende apenas de seus ângulos. Prove a fórmula de Legendre, segundo os seguintes passos.

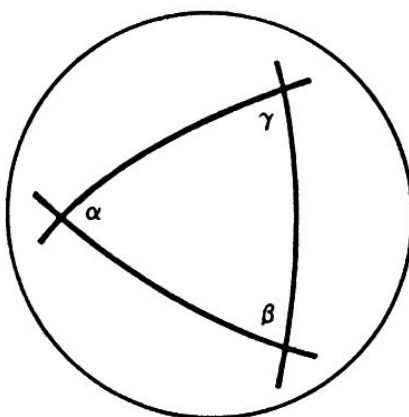



Figura 20.39 Um triângulo esférico.

(a) No triângulo especial cortado da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ pelos planos $y = 0$, $y = x$ tg α, $z = x$ tg μ, mostre que os ângulos entre os lados são α, $\pi/2$ e β, onde $\cos\beta = \text{sen}\,\alpha$ sen μ. Sugestão: use vetores.

(b) Mostre que as projeções dos lados do triângulo retângulo de (a) sobre o plano xy são $\theta = 0$, $\theta = \alpha$ e $r = a/\sqrt{1 + \text{tg}\, 2\mu \cos\theta}$ e que a área desse triângulo é

$$S = a^2 \int_0^\alpha \left[1 - \frac{\text{sen}\,\mu \cos\theta}{\sqrt{1 - \text{sen}^2 \mu\, \text{sen}^2 \theta}}\right] d\theta.$$

* A. M. Legendre (1752-1833) foi um matemático francês muito capacitado que teve a má sorte de ver a maior parte da obra de sua vida ficar obsoleta pelas descobertas de matemáticos mais jovens e mais brilhantes. A despeito disso, ele conservou seu espírito amigável e generoso.

(c) Realize a integração em (b) e mostre que a área do triângulo retângulo é

$$a^2\left(\alpha + \beta - \frac{\pi}{2}\right).$$

(d) Complete a prova da fórmula de Legendre dividindo um triângulo arbitrário em dois triângulos retângulos e usando (c). Aplique a fórmula de Legendre para mostrar que a área da esfera é $4\pi a^2$. Sugestão: divida a superfície em triângulos convenientes.

20.9 (OPCIONAL) MUDANÇA DE VARIÁVEIS EM INTEGRAIS MÚLTIPLAS. JACOBIANOS

Nossos instrumentos básicos para integrar em coordenadas polares, cilíndricas e esféricas são as fórmulas

$$dA = r\,dr\,d\theta, \qquad dV = r\,dr\,d\theta\,dz, \qquad \text{e} \qquad dV = \rho^2 \operatorname{sen}\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta, \tag{1}$$

para os elementos de área e volume nesses três sistemas de coordenadas. Entretanto, as justificativas que demos em seções anteriores deste capítulo foram puramente intuitivas e geométricas. Nosso objetivo nesta curta seção final é descrever uma base teórica mais ampla, com a qual essas fórmulas possam ser compreendidas como simples aspectos diferentes de uma única idéia.

O problema que consideramos agora é o seguinte: que acontece com uma integral múltipla

$$\iint_R \cdots \int f(x, y, \ldots)\,dx\,dy \cdots$$

se mudarmos as variáveis de $x, y, \ldots$ para $u, v, \ldots$?

Sabemos a resposta a essa questão no caso de uma única variável: se $f(x)$ é contínua e a função $x = x(u)$ tem uma derivada contínua, então

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f[x(u)]\,\frac{dx}{du}\,du, \tag{2}$$

onde $a = x(c)$ e $b = x(d)$. Como exemplo de aplicação dessa fórmula, salientamos que a substituição trigonométrica $x = \text{sen}\,\theta$, $dx = \cos\theta\, d\theta$ permite-nos escrever

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^{\pi/2} \cos\theta \cdot \cos\theta\, d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)\,d\theta = \frac{\pi}{4}.$$

Os estudantes devem observar particularmente que a mudança de variável nesse cálculo foi acompanhada por uma correspondente mudança do intervalo de integração.

Nossa única experiência análoga para o caso de duas variáveis ocorreu em integrais duplas com a mudança de coordenadas cartesianas para coordenadas polares, utilizando as equações de transformação

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\,\text{sen}\,\theta. \tag{3}$$

Até o momento interpretamos essas equações como expressões das coordenadas cartesianas de um dado ponto em termos de suas coordenadas polares. Entretanto, elas podem ser também interpretadas como a definição de uma *transformação* ou *aplicação* que leva pontos (r, θ) do plano $r\theta$ a pontos (x, y) do plano xy. Ou seja, supondo-se dado um ponto (r, θ), as equações (3) determinam o ponto correspondente (x, y) (Fig. 20.40).

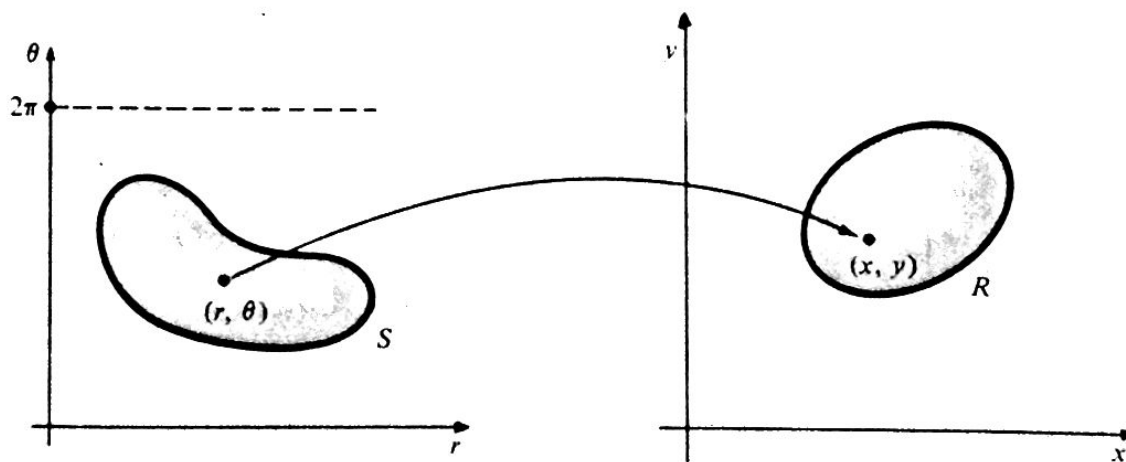



Figura 20.40.

Além disso, a fim de fazer com que essa correspondência seja um a um, é costume considerar os pontos (r, θ) que estejam na parte do plano $r\theta$ especificada pelas desigualdades $0 \leqslant r$, $0 \leqslant \theta < 2\pi$.

Desse ponto de vista, a fórmula de mudança de uma integral dupla para coordenadas polares [fórmula (3) da Seção 20.4] pode ser escrita como

$$\iint_R f(x, y)\,dx\,dy = \iint_S f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\theta)\,r\,dr\,d\theta. \tag{4}$$

Assim podemos substituir $x = r \cos\theta$ e $y = r \operatorname{sen}\theta$ na integral da esquerda, mas devemos então substituir $dx\, dy$ por $r\, dr\, d\theta$ e R pela corespondente região S do plano $r\theta$. Em nosso trabalho anterior, não fizemos menção da região S, mas, em vez disso – e equivalentemente –, mudamos os limites de integração nas integrais iteradas para descrever a mesma região R em termos de coordenadas polares.

A fórmula (4) é um caso particular de uma fórmula muito geral para mudar variáveis em integrais duplas. A demonstração detalhada está além do objetivo deste livro, mas pelo menos podemos enunciar o resultado. Primeiro, precisamos de uma definição. Considere um par de funções de duas variáveis.

$$x = x(u, v), \qquad y = y(u, v), \tag{5}$$

e admita que elas tenham derivadas parciais contínuas. O *jacobiano* dessas funções é o determinante definido por

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}{}^{*}. \tag{6}$$

Este é, muitas vezes, chamado "determinante funcional", pois é função das variáveis u e v. Como exemplo, vemos que o jacobiano da transformação de coordenadas polares (3) é

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r \operatorname{sen}^2\theta = r.$$

A fórmula geral da mudança de variáveis para integrais duplas pode ser agora enunciada como se segue: considerando-se (5) uma *transformação um a um de uma região S do plano uv em uma região R do plano xy e com jacobiano (6) positivo, então*

$$\iint_R f(x, y)\, dx\, dy = \iint_S f[x(u, v), y(u, v)] \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\, du\, dv. \tag{7}$$

---

* Determinantes dessa forma foram discutidos primeiramente pelo matemático alemão C. G. J. Jacobi (1804-1851). Ele realizou importante trabalho no âmbito da teoria das funções elípticas e aplicou suas descobertas de maneira surpreendente à teoria dos números. Criou também um tratamento novo e frutífero da dinâmica teórica. As equações de Hamilton-Jacobi fazem parte do equipamento-padrão de todo estudante de Física Matemática.

Como r é o jacobiano da transformação de coordenadas polares (3), é claro que (4) é um caso particular de (7). Além disso, podemos pensar em (7) como uma extensão bidimensional de (2), com a derivada dx/du sendo substituída pelo jacobiano $\partial(x, y)/\partial(u, v)$.

A fórmula (7), por sua vez, pode ser estendida a integrais triplas. Primeiro definimos o *jacobiano* da transformação

$$\begin{cases} x = x(u, v, w), \\ y = y(u, v, w), \\ z = z(u, v, w), \end{cases} \quad \text{por} \quad \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

Então, sob hipóteses análogas, temos a seguinte extensão de (7):

$$\iiint_R f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_S F(u, v, w) \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}\, du\, dv\, dw, \tag{8}$$

onde $F(u, v, w) = f[x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)]$. O principal a notar é que

$$dx\, dy\, dz \quad \text{foi substituído por} \quad \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}\, du\, dv\, dw.$$

Dois casos particulares importantes de (8) são o das *coordenadas cilíndricas*,

$$\iiint_R f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_S F(r, \theta, z)\, r\, dr\, d\theta\, dz,$$

onde $F(r, \theta, z) = f(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta, z)$ e o das *coordenadas esféricas*,

$$\iiint_R f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_S F(\rho, \phi, \theta)\, \rho^2 \operatorname{sen} \phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta,$$

onde $F(\rho, \phi, \theta) = f(\rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta, \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, \rho \cos \phi)$. Deixamos ao estudante a verificação da fórmula de coordenadas esféricas utilizando as equações de transformação

$$\begin{cases} x = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta, \\ y = \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, \\ z = \rho \cos \phi, \end{cases}$$

para calcular o jacobiano

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \phi, \theta)} = \begin{vmatrix} \operatorname{sen}\phi\cos\theta & \rho\cos\phi\cos\theta & -\rho\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta & \rho\cos\phi\operatorname{sen}\theta & \rho\operatorname{sen}\phi\cos\theta \\ \cos\phi & -\rho\operatorname{sen}\phi & 0 \end{vmatrix} = \rho^2\operatorname{sen}\phi.$$

Assim temos uma compreensão um pouco maior do que está por trás das fórmulas (1).

Resta ainda uma questão que enunciamos por simplicidade, apenas para o caso de duas variáveis: qual a razão subjacente da presença do jacobiano à direita da fórmula (7)? Daremos uma explanação intuitiva muito breve por meio de vetores. No plano uv as equações u = constante e v = constante determinam uma rede de retas paralelas aos eixos, enquanto no plano xy essas equações determinam uma rede de curvas que se interceptam. Um pequeno retângulo do plano uv com lados Δu e Δv corresponde a um pequeno paralelogramo do plano xy (Fig. 20.41) com lados que podem ser escritos em forma vetorial como

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u}\Delta u = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\mathbf{j}\right)\Delta u$$

e

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial v}\Delta v = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\mathbf{j}\right)\Delta v,$$

aproximadamente,

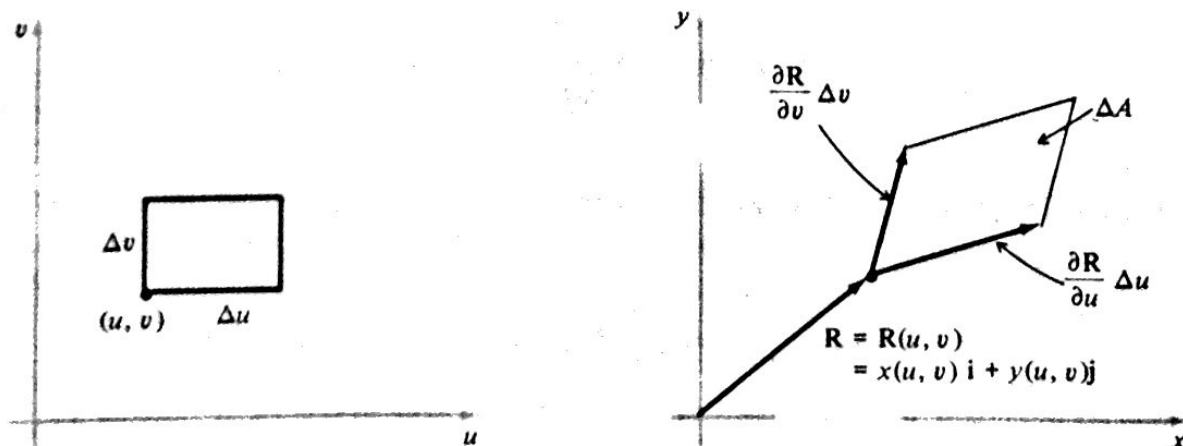



Figura 20.41

Ao calcular a integral do primeiro membro de (7) como um limite de somas, é natural abandonar as usuais células retangulares e, em vez disso, usar pequenos paralelogramos. Se denotamos por ΔA a área do paralelogramo da figura, então ΔA é igual à grandeza do produto vetorial dos dois vetores dados acima. Como esse produto vetorial é

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & 0 \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & 0 \end{vmatrix} \Delta u\, \Delta v = \left[\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \Delta u\, \Delta v\right] \mathbf{k},$$

temos

$$\Delta A = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \Delta u\, \Delta v.$$

Isto mostra que o jacobiano exerce papel de fator de ampliação local para áreas. Além disso, essas observações constituem-se um esboço de demonstração de (7), pois tudo que resta para estabelecer (7) é formar a integral do membro esquerdo como limite de somas e fazer uso de (9).

CAPÍTULO

21

INTEGRAIS DE LINHA E TEOREMA DE GREEN

21.1 INTEGRAIS DE LINHA NO PLANO

Este capítulo traz juntos num pacote unificado diversos tópicos de cálculo de muitas variáveis que são importantes para a Ciência Física e Engenharia, assim como para a própria Matemática. O ponto principal de nosso trabalho é o conceito de integral de linha, que fornece ainda uma outra maneira (em adição às integrais duplas e triplas) de estender a integração ordinária para dimensões superiores. As integrais de linha são utilizadas, por exemplo, para calcular o trabalho realizado por uma força variável ao mover uma partícula ao longo de um caminho de um ponto a outro. Em sua origem e aplicações, estas integrais são portanto associadas tanto à Física Matemática quanto à Matemática. O principal resultado deste capítulo (Teorema de Green) faz uso de derivadas parciais para estabelecer uma ligação entre integrais de linha e integrais duplas, e isto, por sua vez, permite-nos distinguir aqueles campos vetoriais que têm funções de energia potencial dos que não têm. Aqui, novamente, como foi freqüente em nosso trabalho anterior, a Matemática e a Física constituem uma estrutura só, sem emendas, em que nenhum dos componentes tem muito significado sem o outro.

Neste capítulo todo, assumimos que as funções em discussão têm todas as propriedades de continuidade e diferenciabilidade que são necessárias em qualquer situação dada.

Nosso primeiro problema é formular um conceito satisfatório de trabalho. Se deslocamos uma partícula ao longo de um caminho reto com uma força constante $\mathbf{F}$ (constante tanto em direção e sentido como em grandeza), então sabemos que o trabalho realizado por essa força é o produto da componente de $\mathbf{F}$, na direção e sentido do movimento, pela distância percorrida pela partícula. Convém utilizar o produto escalar para escrever isso na forma

$$W = \mathbf{F} \cdot \Delta\mathbf{R}, \tag{1}$$

onde $\Delta\mathbf{R}$ é o vetor que vai da posição inicial da partícula a sua posição final (Fig. 21.1).

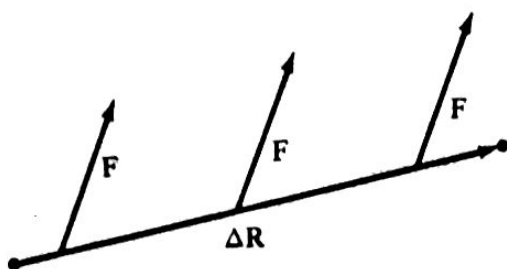



Figura 21.1

Agora suponha que a força F não seja constante, mas, em vez disso, seja uma função vetorial que varia de ponto a ponto em toda uma certa região do plano, digamos

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}. \tag{2}$$

Suponha ainda que essa força variável desloque uma partícula ao longo de uma curva lisa C do plano (Fig. 21.2), onde C tem equações paramétricas

$$x = x(t) \qquad \text{e} \qquad y = y(t), \qquad t_1 \leq t \leq t_2. \tag{3}$$

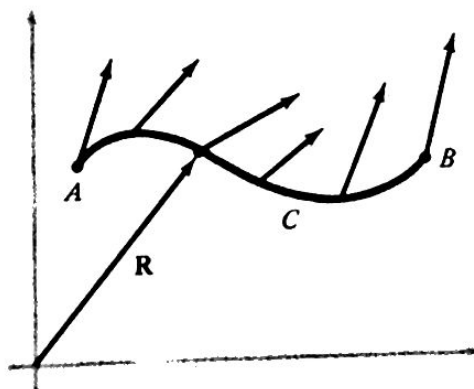



Figura 21.2

Qual o trabalho realizado por essa força quando o ponto de aplicação move-se ao longo da curva desde o ponto inicial A até o ponto final B?

Antes de responder a essa questão, observamos que a função a valores vetoriais (2) é usualmente chamada de *campo de forças*. De modo geral, um *campo vetorial* no plano é qualquer função a valores vetoriais que associa um vetor a cada ponto (x, y) de uma certa região plana R. Nesse contexto, uma função cujos valores são números (escalares) chama-se *campo escalar*. Por exemplo, a função $f(x, y) = x^2y^3$ é um campo escalar definido em todo o plano xy. Todo campo escalar $f(x, y)$ determina um correspondente campo vetorial

$$\nabla f(x, y) = \text{grad}\, f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}.$$

(Recorde-se que o símbolo ∇f é pronunciado "del f".) ∇f é denominado o *campo gradiente* de f; seu significado intuitivo foi descrito na Seção 19.5. Para a função dada anteriormente, temos de $\nabla f = 2xy^3\mathbf{i} + 3x^2y^3\mathbf{j}$. Alguns campos vetoriais são campos gradientes, mas a maioria não é. Veremos na próxima seção que os campos vetoriais que são também campos gradientes têm importância especial.

Retornaremos agora ao problema de calcular o trabalho realizado pela força variável

$$\mathbf{F} = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j} \tag{2}$$

ao longo da curva lisa C. Isto nos leva a uma nova espécie de integral chamada integral de linha e denotada por

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} \qquad \text{ou} \qquad \int_C M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy.$$

Iniciamos a definição aproximando a curva por um caminho poligonal (Fig.21.3).

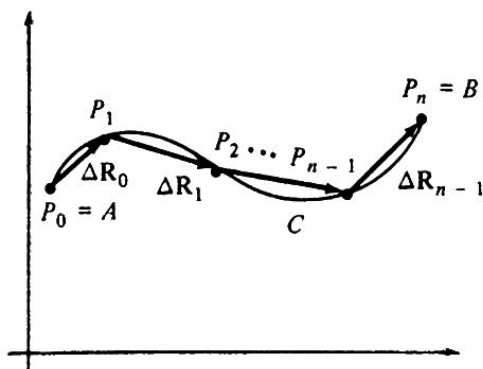



Figura 21.3

Isto é, escolha pontos $P_0 = A, P_1, P_2, ..., P_{n-1}, P_n = B$ de C nessa ordem, considere $\mathbf{R}_k$ o vetor posição de P_k e defina os n vetores incrementais mostrados na figura por $\Delta\mathbf{R}_k = \mathbf{R}_{k+1} - \mathbf{R}_k$, onde $k = 0, 1, ..., n-1$. Agora, denotando por $\mathbf{F}_k$ o valor da função vetorial $\mathbf{F}$ em P_k e formando a soma

$$\sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{F}_k \cdot \Delta\mathbf{R}_k, \tag{4}$$

teremos que a *integral de linha de* $\mathbf{F}$ *ao longo de* C é definida como sendo o limite de somas dessa forma e escrevemos

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} = \lim \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{F}_k \cdot \Delta\mathbf{R}_k. \tag{5}$$

Nesse limite supomos que os caminhos poligonais se aproximam cada vez mais da curva C no sentido de que o número de pontos de divisão aumenta e o comprimento máximo dos vetores incrementais tende a zero*.

A idéia por trás da definição (5) é que **F** (sendo contínua) é quase constante ao longo do pequeno segmento de caminho $\Delta\mathbf{R}_k$; logo, pela fórmula (1), vemos que $\mathbf{F}_k \cdot \Delta\mathbf{R}_k$ é aproximadamente o trabalho realizado por **F** ao longo da correspondente parte da curva e, portanto, a soma (4) é aproximadamente o trabalho realizado por **F** ao longo de toda a curva C. O limite (5) dá o valor exato desse trabalho.

Um modo intuitivo e rápido de construir a integral de linha (5) está ilustrado na Fig. 21.4.

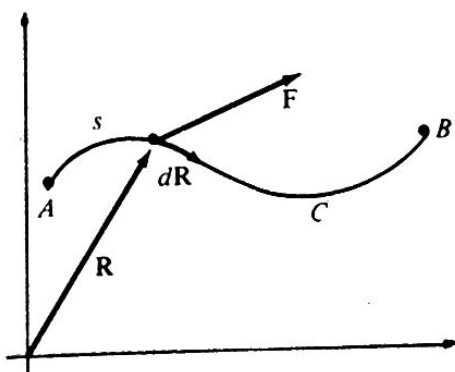



Figura 21.4

Sendo $d\mathbf{R}$ o elemento de deslocamento ao longo de C, o correspondente elemento de trabalho realizado por **F** é $dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$. O trabalho total é agora obtido integrando (ou somando) esses elementos de trabalho ao longo da curva C,

$$W = \int dW = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}. \tag{6}$$

Para compreensão adicional do significado dessa fórmula, pensamos no vetor posição **R** como função do comprimento de arco s medido a partir do ponto inicial A. Como sabemos que $d\mathbf{R}/ds$ é o vetor tangente unitário **T** (Seção 17.4), podemos escrever

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} = \int_C \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{R}}{ds}\, ds = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds. \tag{7}$$

* O termo *integral de linha* para o limite (5) é talvez infeliz, pois a curva C não precisa ser um segmento de reta. *Integral de curva* seria mais apropriado, mas a terminologia já está consagrada e não podemos mudá-la agora.

A integral de linha (6) pode portanto ser encarada como a integral da componente tangencial de **F** ao longo da curva C. Podemos ver, a partir de (7), que as integrais de linha incluem as integrais ordinárias como casos particulares, pois se a curva C está no eixo x entre $x=a$ e $x=b$, e se $\mathbf{F}=f(x)\mathbf{i}$, então (7) reduz-se a $\int_a^b f(x)\,dx$.

Se o vetor variável **F** é dado por $\mathbf{F}=M(x,y)\mathbf{i}+N(x,y)\mathbf{j}$, então como $\mathbf{R}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}$ e $d\mathbf{R}=dx\mathbf{i}+dy\mathbf{j}$, a fórmula para o cálculo do produto escalar de dois campos vetoriais implica

$$\mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}=M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy.$$

A integral de linha (6) pode portanto ser escrita na forma

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}=\int_C M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy.$$

A representação paramétrica $x=x(t)$ e $y=y(t)$, $t_1\leqslant t\leqslant t_2$, para a curva C permite-nos expressar tudo em termos de t,

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}=\int_C M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy \quad =\int_{t_1}^{t_2}\left[M(x,y)\frac{dx}{dt}+N(x,y)\frac{dy}{dt}\right]dt.$$

Esta é uma integral ordinária com t como a variável de integração e pode ser calculada da maneira usual.

Voltemos agora nossa atenção para o desenvolvimento de alguma prática no cálculo concreto de integrais de linha.

Exemplo 1 Calcular a integral de linha

$$I=\int_C x^2y\,dx+(x-2y)\,dy,$$

onde C é o segmento da parábola $y=x^2$ de $(0,0)$ a $(1,1)$ (Fig. 21.5).

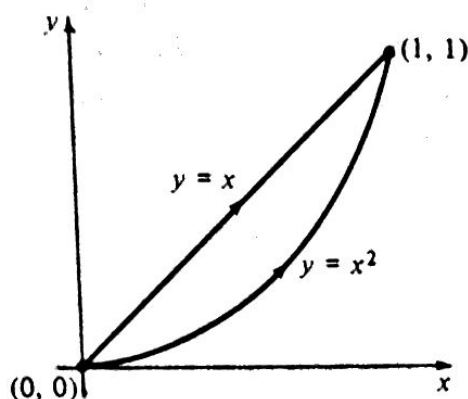



Figura 21.5

Solução Podemos parametrizar a curva da maneira que nos pareça mais conveniente. (Não é difícil mostrar que o valor da integral de linha não depende das equações paramétricas utilizadas, supondo que a orientação ou direção seja mantida.)

A representação paramétrica mais simples dessa curva é

$$x = t, \qquad y = t^2, \qquad \text{onde } 0 \leq t \leq 1.$$

Aqui temos $dx = dt$ e $dy = 2\,tdt$, logo a integral de linha é

$$I = \int_0^1 t^2 \cdot t^2\, dt + (t - 2t^2)2t\, dt$$

$$= \int_0^1 [t^4 + 2t^2 - 4t^3]\, dt = \left[\frac{1}{5}t^5 + \frac{2}{3}t^3 - t^4\right]_0^1 = -\frac{2}{15}.$$

Para ilustrar o fato de que o valor da integral de linha é independente da escolha do parâmetro, vamos utilizar a representação

$$x = \operatorname{sen} t, \qquad y = \operatorname{sen}^2 t, \quad \text{onde } 0 \leq t \leq \pi/2.$$

E agora temos $dx = \cos t\, dt$ e $dy = 2 \operatorname{sen} t \cos t\, dt$, logo

$$I = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 t \cdot \operatorname{sen}^2 t \cdot \cos t\, dt + (\operatorname{sen} t - 2 \operatorname{sen}^2 t)2 \operatorname{sen} t \cos t\, dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} [\operatorname{sen}^4 t + 2 \operatorname{sen}^2 t - 4 \operatorname{sen}^3 t] \cos t\, dt$$

$$= \left[\frac{1}{5}\operatorname{sen}^5 t + \frac{2}{3}\operatorname{sen}^3 t - \operatorname{sen}^4 t\right]_0^{\pi/2} = -\frac{2}{15},$$

como antes.

Toda curva C que usamos em integrais de linha é entendida como tendo um sentido de percurso de seu ponto inicial a seu ponto final. Embora o valor de uma integral de linha não dependa do parâmetro, ela *depende* do sentido de orientação. Se $-C$ denota a mesma curva percorrida no sentido oposto, então temos

$$\int_{-C} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R} = -\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R},$$

ou, o que é equivalente,

$$\int_{-C} M\,dx + N\,dy = -\int_C M\,dx + N\,dy.$$

Isto é, integrar no sentido oposto muda o sinal da integral. Isto pode ser visto imediatamente pela Fig. 21.3 e pela definição (5), pois os sentidos dos vetores incrementais $\Delta\mathbf{R}_k$ estão trocados.

Exemplo 2 Calcular a integral de linha

$$I = \int_C x^2y\,dx + (x-2y)\,dy,$$

onde C é o segmento de reta $y = x$ de $(0, 0)$ a $(1, 1)$.

Solução Este é o mesmo integrando do Exemplo 1, e os pontos inicial e final da curva são os mesmos, mas a curva é diferente (Fig. 21.5). Utilizando x como o parâmetro, as equações paramétricas são $x = x$ e $y = x$; temos $dx = dx$ e $dy = dx$, logo

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 x^2\cdot x\,dx + (x-2x)\,dx \\ &= \int_0^1 [x^3 - x]\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = -\frac{1}{4}, \end{aligned}$$

que é diferente do valor $-2/15$ obtido ao longo da trajetória parabólica do Exemplo 1.

A integral desse exemplo pode ser escrita como

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}, \qquad \text{onde } \mathbf{F} = x^2y\mathbf{i} + (x-2y)\mathbf{j}.$$

Encarando-se **F** como um campo de forças, o trabalho realizado por **F** ao mover uma partícula de (0, 0) a (1, 1) é diferente para as duas curvas dos Exemplos 1 e 2. Isto ilustra o fato de que, em geral, a integral de linha de um dado campo vetorial, de um dado ponto a outro, depende da escolha da curva e tem valores diferentes para curvas diferentes.

Se uma curva C é composta por um número finito de curvas lisas ligadas em cantos, então dizemos que C é uma *curva ou trajetória lisa por partes.* O valor de uma integral de linha ao longo de C é então definido como a soma de seus valores ao longo das partes lisas de C. Isto é ilustrado na primeira parte de nosso próximo exemplo.

Exemplo 1 Calcular a integral de linha

$$\int_C y\,dx + (x + 2y)\,dy$$

de (1, 0) a (0, 1), onde C é (a) a poligonal de (1, 0) a (1, 1) a (0, 1); (b) o arco de circunferência $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$; (c) o segmento de reta $y = 1 - x$. Veja a Fig. 21.6

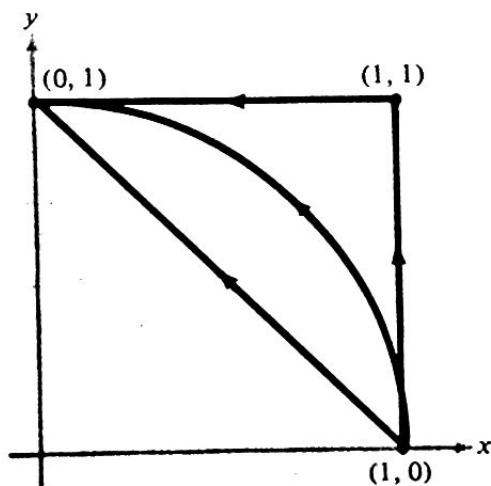



Figura 21.6

Solução (a) Ao longo do segmento de (1, 0) a (1, 1), temos $x = 1$ e $dx = 0$; e ao longo do segmento de (1, 1) e (0, 1), temos $y = 1$ e $dy = 0$. Como a integral de linha completa é a soma das integrais de linha ao longo de cada um dos segmentos temos

$$\int_C y\,dx + (x + 2y)\,dy = \int_0^1 (1 + 2y)\,dy + \int_1^0 dx$$
$$= \Big[y + y^2\Big]_0^1 + x\Big]_1^0 = 1.$$

(b) Aqui nós temos $x = \cos t$ e $y = \operatorname{sen} t$ para $0 \leqslant t \leqslant \pi/2$, logo $dx = -\operatorname{sen} t\, dt$ e $dy = \cos t\, dt$ e, portanto,

$$\begin{aligned}\int_C y\,dx + (x+2y)\,dy &= \int_0^{\pi/2} -\operatorname{sen}^2 t\,dt + (\cos t + 2\operatorname{sen} t)\cos t\,dt \\ &= \int_0^{\pi/2} (\cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t + 2\operatorname{sen} t\cos t)\,dt \\ &= \int_0^{\pi/2} (\cos 2t + 2\operatorname{sen} t\cdot\cos t)\,dt \\ &= \left[\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t + \operatorname{sen}^2 t\right]_0^{\pi/2} = 1.\end{aligned}$$

(c) Para integrar ao longo do segmento $y = 1 - x$, podemos usar x como o parâmetro, de modo que $dy = -dx$. Como x varia de 1 a 0 ao longo desse caminho, a integral é

$$\begin{aligned}\int_C y\,dx + (x+2y)\,dy &= \int_1^0 (1-x)\,dx + [x + 2(1-x)](-dx) \\ &= \int_1^0 (-1)\,dx = 1.\end{aligned}$$

Nesse exemplo todas as três integrais de linha têm o mesmo valor e poderíamos suspeitar que talvez, com esse integrando, teríamos o mesmo valor para *qualquer* caminho de (1, 0) a (0, 1). Na verdade é esse o caso, como veremos na Seção 21.2, onde investigamos as razões subjacentes do porquê algumas integrais de linha de um ponto a outro têm valores que são independentes do caminho de integração.

Muitas vezes será necessário considerar situações em que o caminho de integração C é uma curva *fechada*, o que significa que o ponto final B coincide com o ponto inicial A (Fig. 21.7).

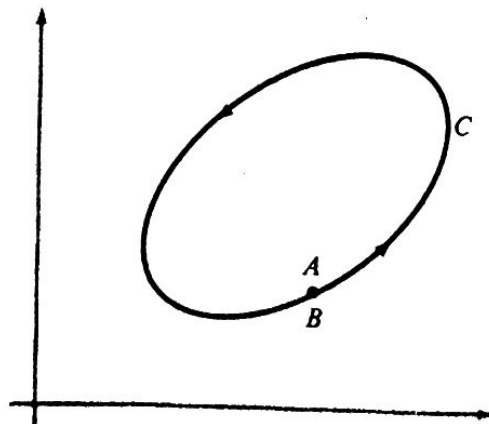



Figura 21.7

Para enfatizar, escreve-se nesse caso uma integral de linha usualmente com um pequeno círculo no sinal de integral, como em

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R} \qquad \text{ou} \qquad \oint_C M\,dx + N\,dy.$$

Exemplo 4 Calcular $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$, onde $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + 2x\mathbf{j}$ e C é a circunferência $x^2 + y^2 = 1$ descrita no sentido anti-horário de $A = (1, 0)$ até o mesmo ponto (Fig. 21.8).

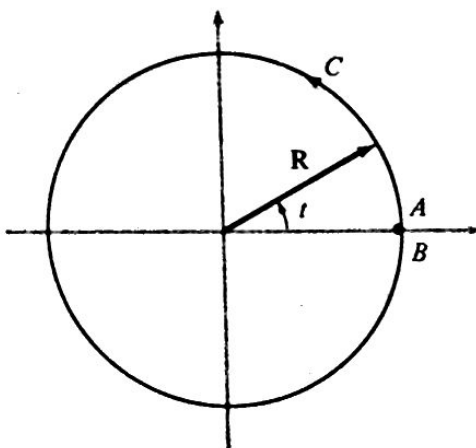



Figura 21.8

Solução Uma representação paramétrica simples é $x = \cos t$ e $y = \operatorname{sen} t$, onde a orientação anti-horária significa que t cresce de 0 a 2π. Como $\mathbf{R} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = \cos t\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\mathbf{j}$, temos

$$d\mathbf{R} = (-\operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j})\,dt,$$

e portanto

$$\begin{aligned}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{R} &= (\operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + 2\cos t\,\mathbf{j})\cdot(-\operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j})\,dt \\ &= (2\cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t)\,dt \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\cos 2t\right)dt,\end{aligned}$$

conforme fórmulas do arco metade. Segue-se agora que

$$\begin{aligned}\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R} &= \int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\cos 2t\right)dt \\ &= \left[\frac{1}{2}t + \frac{3}{4}\operatorname{sen} 2t\right]_0^{2\pi} = \pi.\end{aligned}$$

Problemas

1. Calcule a integral de linha $I = \int_C xy^2\,dx - (x+y)\,dy$, onde C é
   (a) o segmento de reta de $(0, 0)$ a $(1, 2)$;
   (b) a trajetória parabólica $y = 2x^2$ de $(0, 0)$ a $(1, 2)$;
   (c) a poligonal de $(0, 0)$ a $(1, 0)$ a $(1, 2)$.
   Esboce todos os caminhos.

2. Calcule a integral de linha $I = \int_C x^2y\,dx - xy^2\,dy$, onde C é a poligonal que une os pontos $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 1)$, nessa ordem.

3. Calcule $\int_C dx/y + dy/x$, onde C é a parte da hipérbole $xy = 4$ de $(1, 4)$ a $(4, 1)$.

4. Mostre que (a) $\int_C (x^2 - 2y)\,dx = -\frac{2}{3}$, (b) $\int_C 2xy^2\,dy = \frac{1}{2}$,
   e (c) $\int_C (x^2 - 2y)\,dx + 2xy^2\,dy = -\frac{1}{6}$, se C é o segmento de reta $y = x$, $0 \leqslant x \leqslant 1$.

5. Mostre que $\int_C (x^2 + 3xy)\,dx + (3x^2 - 2y^2)\,dy = -\frac{71}{12}$, se C é o segmento de parábola $x = t$, $y = t^2$ de $t = 1$ a $t = 2$.

6. Calcule $\int_C (dx + dy)/(x^2 + y^2)$, onde C é a metade superior da circunferência $x^2 + y^2 = a^2$ de $(a, 0)$ a $(-a, 0)$.

7. Calcule os valores da integral de linha $\int_C (x - y)\,dx + \sqrt{x}$ ao longo dos seguintes caminhos C de $(0, 0)$ a $(1, 1)$: (a) $x = t$, $y = t$; (b) $x = t$, $y = t^2$; (c) $x = t^2$, $y = t$; (d) $x = t$, $y = t^3$. Esboce todas as trajetórias.

8. Mostre que $\int_C (x^2 + y^2)\,dx = -\frac{2}{3}$, se C é a poligonal de $(0, 0)$ a $(1, 1)$ a $(0, 1)$.

9. Calcule $\int_C x\,dx + x^2\,dy$ de $(-1, 0)$ a $(1, 0)$
   (a) ao longo do eixo x;
   (b) ao longo da semicircunferência $y = \sqrt{1 - x^2}$;
   (c) ao longo da poligonal de $(-1, 0)$ a $(0, 1)$ a $(1, 1)$ a $(1, 0)$.
   Esboce todos os caminhos.

10. Calcule $\oint_C (3x + 4y)\,dx + (2x + 3y^2)$ onde C é a circunferência $x^2 + y^2 = 4$ percorrida no sentido anti-horário a partir de $(2, 0)$.

11. Calcule os valores da integral $\int_C 2xy\,dx + (x^2 + y^2)$ ao longo dos seguintes caminhos C de $(0, 0)$ a $(1, 1)$:
    (a) $y = x$; (b) $y = x^2$; (c) $x = y^2$; (d) $y = x^3$; (e) $x = y^3$; (f) a poligonal de $(0, 0)$ a $(1, 0)$ a $(1, 1)$.

    Esboce todos os caminhos.

12. Calcule os valores da integral de linha $\int_C x^2\,dx + y^2\,dy$ ao longo dos seguintes caminhos C de $(0, 1)$ a $(1, 0)$:
    (a) o arco circular $x = \cos t, y = \operatorname{sen} t$;
    (b) o segmento de reta;
    (c) o segmento da parábola $y = 1 - x^2$.

13. Sendo $\mathbf{F} = (y\mathbf{i} - x\mathbf{j})/(x^2 + y^2)$, calcule $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$ de $(-1, 0)$ a $(1, 0)$
    (a) ao longo da semicircunferência $y = \sqrt{1 - x^2}$;
    (b) ao longo da poligonal de $(-1, 0)$ a $(0, 1)$ a $(1, 1)$ a $(1, 0)$.

14. Calcule $\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}$ se $\mathbf{F} = (x + y)\mathbf{i} + (y^2 - x)\mathbf{j}$, onde C é a curva fechada que começa em $(1, 0)$, percorre a metade superior da circunferência unitária até $(-1, 0)$ e retorna a $(1, 0)$ pelo eixo x.

15. Calcule $\int_C y\sqrt{y}\,dx + x\sqrt{y}$ onde C é a parte da curva $x^2 = y^3$ de $(1, 1)$ a $(8, 4)$.

16. Se $\mathbf{F} = (2x + y)\mathbf{i} + (3x - 2y)\mathbf{j}$, calcule $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$ ao longo de
    (a) o segmento de reta de $(0, 0)$ a $(1, 1)$;
    (b) a parábola $y = x^2$ de $(0, 0)$ a $(1, 1)$;
    (c) $y = \operatorname{sen}(\pi/2)x$ de $(0, 0)$ a $(1, 1)$;
    (d) $x = y^n$ $(n > 0)$ de $(0, 0)$ a $(1, 1)$.

17. Mostre que $\oint_C (-y\,dx + x\,dy)/(x^2 + y^2) = 2\pi$, onde C é a circunferência $x^2 + y^2 = a^2$ percorrida no sentido anti-horário a partir de $(a, 0)$.

18. Sendo $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} + (y^2 + 1)\mathbf{j}$, calcule $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$, onde C é
    (a) o segmento de reta de $(0, 0)$ a $(1, 1)$;
    (b) a poligonal de $(0, 0)$ a $(1, 0)$ a $(1, 1)$;
    (c) a parábola $x = y$ de $(0, 0)$ a $(1, 1)$.

19. Calcule os valores de $\int_C y\,dx + x\,dy$ ao longo dos seguintes caminhos C de $(-a, 0)$ a $(a, 0)$:
    (a) a parte superior da circunferência $x^2 + y^2 = a^2$;
    (b) a poligonal de $(-a, 0)$ a $(-a, a)$ a (a, a) a $(a, 0)$;
    (c) o segmento de reta que liga esses pontos.

20. Calcule $\int_C xy^2\,dx + x^3y\,dy$, onde C é a poligonal que consiste nos segmentos de $(-1, -1)$ a $(2, -1)$ e de $(2, -1)$ a $(2, 4)$.

21. Uma partícula se move em torno do quadrado de $(0, 0)$ a $(1, 0)$ a $(1, 1)$ a $(0, 1)$ a $(0, 0)$ sob a ação do campo de forças $\mathbf{F} = (2x + y)\mathbf{i} + (x + 4y)\mathbf{j}$. Calcule o trabalho realizado.

22. Calcule $\oint_C 2xy\,dx + (x^2 + y^2)$ onde C é a fronteira da região semicircular $x^2 + y^2 \leqslant 1, y \geqslant 0$, descrita no sentido anti-horário.

21.2 INDEPENDÊNCIA DO CAMINHO. CAMPOS CONSERVATIVOS

No Exemplo 3 da Seção 21.1 calculamos a integral de linha

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R} \tag{1}$$

do campo vetorial

$$\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} + (x + 2y)\mathbf{j} \tag{2}$$

ao longo de cada um dos três caminhos diferentes de (1, 0) a (0, 1), mostrados na Fig. 21.9, e obtivemos o mesmo valor 1 para a integral ao longo de todos esses caminhos.

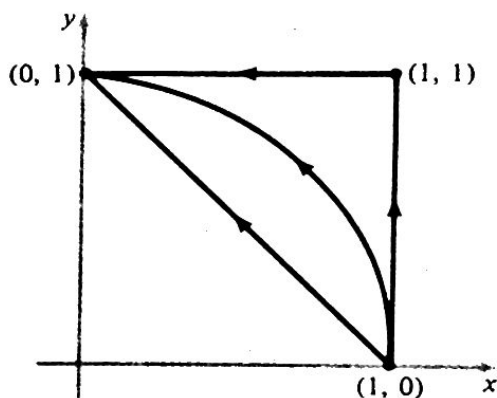



Figura 21.9

Esse resultado não é acidental. A razão subjacente está em que o campo vetorial (2) é o *gradiente de um campo escalar*, ou seja, da função

$$f(x, y) = xy + y^2, \tag{3}$$

pois é claro

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} = y\mathbf{i} + (x + 2y)\mathbf{j} = \mathbf{F}.$$

Para compreender o significado dessa afirmação, recorde da Seção 19.5 que no cálculo de muitas variáveis o gradiente exerce um papel análogo ao da derivada no cálculo de uma variável. O Teorema Fundamental do Cálculo (de uma variável) é expresso na forma

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a),$$

onde $f(x)$ é função de uma única variável. O resultado correspondente aqui é

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{R} = f(B) - f(A), \tag{4}$$

onde $f(x, y)$ é uma função de duas variáveis (um campo escalar) e A e B são os pontos inicial e final do caminho C. Por exemplo, como o campo vetorial (2) é o gradiente do campo escalar (3), isto é, $\mathbf{F} = \nabla f$, a fórmula (4) nos diz que o valor da integral de linha (1) ao longo de qualquer dos caminhos C mostrados na Fig. 21.9 é

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} = \int_C \nabla f \cdot d\mathbf{R} = f(0, 1) - f(1, 0) = 1 - 0 = 1,$$

sem cálculo.

A fórmula (4) chama-se *Teorema Fundamental do Cálculo para Integrais de Linha.* Podemos enunciar esse teorema mais precisamente como se segue:

Se um campo vetorial $\mathbf{F}$ *é o gradiente de algum campo escalar numa região* R, *de modo que* $\mathbf{F} = \nabla f$ *em* R *e se* C *é qualquer curva lisa por partes em* R *com pontos inicial e final* A *e* B, *então*

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} = f(B) - f(A). \tag{5}$$

Para provar isto, suponha que C seja lisa com equações paramétricas $x = x(t)$ e $y = y(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$. Então

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} = \int_C \nabla f \cdot d\mathbf{R} &= \int_a^b \left[\nabla f \cdot \frac{d\mathbf{R}}{dt}\right] dt \\
&= \int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right] dt \\
&= \int_a^b \frac{d}{dt} f[x(t), y(t)]\,dt \\
&= f[x(b), y(b)] - f[x(a), y(a)] \\
&= f(B) - f(A).
\end{aligned}$$

Os passos cruciais aqui dependem da regra da cadeia multivariável (Seção 19.6) e do Teorema Fundamental do Cálculo para uma variável. O argumento para curvas secionalmente lisas segue agora imediatamente aplicando-se (5) a cada parte lisa separadamente, somando e cancelando os valores da função nos cantos.

Esse teorema tem diversos níveis de importância. Iniciamos ilustrando sua utilidade para o cálculo de integrais de linha.

Exemplo 1 Calcule a integral de linha do campo vetorial $\mathbf{F} = y \cos xy\mathbf{i} + x \cos xy\mathbf{j}$ ao longo do caminho parabólico $y = x^2$ de $(0, 0)$ a $(1, 1)$.

Solução Para esse caminho, é natural utilizar x como o parâmetro, onde x varia de 0 a 1. Como $dy = 2x\,dx$, temos

$$\begin{aligned}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{R} &= y \cos xy\,dx + x \cos xy\,dy \\ &= x^2 \cos x^3\,dx + x \cos x^3\,2x\,dx \\ &= 3x^2 \cos x^3\,dx,\end{aligned}$$

logo

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R} = \int_0^1 3x^2 \cos x^3\,dx = \operatorname{sen} x^3\Big]_0^1 = \operatorname{sen} 1 - \operatorname{sen} 0 = \operatorname{sen} 1.$$

Esse cálculo direto da integral de linha é fácil de efetuar, mas um método mais fácil é agora disponível. O primeiro passo é observar que o campo vetorial $\mathbf{F}$ é o gradiente do campo escalar $f(x, y) = \operatorname{sen} xy$. (Os estudantes devem verificar isso.) Com esse fato em mente, tudo que resta é aplicar a fórmula (5):

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R} = \operatorname{sen} xy\Big]_{(0,0)}^{(1,1)} = \operatorname{sen} 1 - \operatorname{sen} 0 = \operatorname{sen} 1.$$

A grande vantagem desse método é que não é preciso dar atenção ao caminho de integração do primeiro ponto ao segundo.

Como esse exemplo mostra, o Teorema Fundamental pode às vezes ser utilizado na tarefa prática de calcular integrais de linha. Todavia, sua principal importância é teórica. Primeiro, salientamos que o segundo membro de (5) depende apenas dos pontos A e B e de modo algum do caminho C que os une. A integral de linha no primeiro membro de (5) tem, portanto, o mesmo valor para todos os caminhos C de A a B. Isto pode ser expresso dizendo-se que *a integral de linha de um campo gradiente é independente do caminho.* A seguir, é claro a partir da fórmula (5) que, se C é um caminho fechado de modo que o ponto final B seja o mesmo que o ponto inicial A, então $f(B) - f(A) = 0$ e portanto a integral de linha é zero. Isto é, *se* $\mathbf{F}$ *é um campo gradiente, então*

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R} = 0$$

para todo caminho fechado C.

Estes argumentos mostram que

	⇗	integral é independente do caminho
Campo gradiente		
	⇘	integral sobre caminho fechado é zero

(O símbolo ⇒ significa implica.) Realmente, essas três propriedades são equivalentes no sentido de que cada uma implica outras duas.

Para iniciar a demonstração da equivalência, suponha que a integral de linha do campo vetorial $\mathbf{F}$ seja independente do caminho. Provaremos que a integral de F sobre um caminho fechado é zero. Para ver por que isto ocorre, examinaremos a Fig. 21.10, em que dois pontos são escolhidos sobre o caminho fechado C.

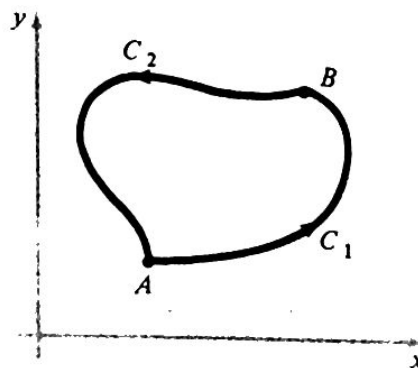



Figura 21.10.

Esses pontos dividem C em caminhos C_1 de A a B e C_2 de B a A. *Como* C_1 e $-C_2$ são ambos caminhos de A a B, a hipótese de independência de caminho implica que

$$\int_{C_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R} = \int_{-C_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R} = -\int_{C_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}.$$

Segue-se disto que

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R} = \int_{C_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R} + \int_{C_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R} = 0,$$

como queríamos. Reciprocamente, se assumimos que a integral em todo caminho fechado é zero, então podemos inverter esse argumento para mostrar que a integral de A a B é independente do caminho.

Para completar a prova da equivalência das três propriedades, basta mostrar que, se $\mathbf{F}$ é um campo vetorial cuja integral de linha é independente do caminho, então $\mathbf{F} = \nabla f$ para algum campo escalar f. Para fazer isso, escolhemos um ponto fixo (x_0, y_0) na região em consideração e seja (x, y) um ponto arbitrário nessa região. Dado qualquer caminho C de (x_0, y_0) a (x, y) [assumimos que existe um tal caminho], definimos a função por meio da fórmula

$$f(x, y) = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} = \int_{(x_0, y_0)}^{(x,y)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}.$$

Veja a Fig. 21.11,

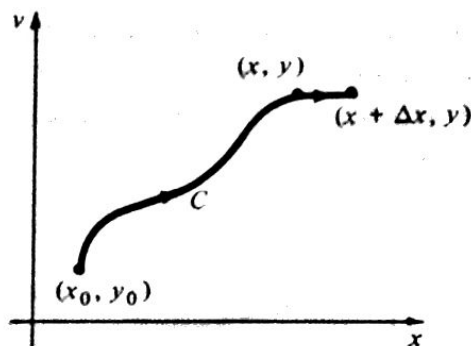



Figura 21.11

Em virtude da hipótese de independência de caminho, o valor dessa integral depende apenas do ponto (x, y) e não do caminho C e, portanto, fornece sem ambigüidade uma definição para $f(x, y)$. Para verificar que $\nabla f = \mathbf{F}$, supomos que o campo vetorial $\mathbf{F}$ tenha a forma usual $\mathbf{F} = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$, de modo que

$$f(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x,y)} M\,dx + N\,dy.$$

Para mostrar que $\partial f/\partial x = M$, mantemos y fixo e seguimos ao longo do caminho reto de (x, y) a $(x + \Delta x, y)$, como é mostrado na figura. Como $dy = 0$ sobre esse pequeno incremento de caminho, temos

$$f(x + \Delta x, y) - f(x, y) = \int_x^{x+\Delta x} M\,dx,$$

logo

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} M\,dx = M,$$

pelo Teorema Fundamental do Cálculo. Analogamente, $\partial f/\partial y = N$, logo $\nabla f = \mathbf{F}$ e o argumento está completo.

Como sugerimos anteriormente, o principal significado dessas idéias está em suas aplicações à Física. A fim de compreender o que está envolvido, vamos supor que $\mathbf{F}$ seja um campo de forças e que uma partícula de massa m é movida por essa força ao longo de um caminho curvo C de um ponto A a um ponto B. Seja o caminho parametrizado pelo tempo t, com equações paramétricas $x = x(t)$ e $y = y(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$. Então o trabalho realizado por $\mathbf{F}$ para mover a partícula ao longo desse caminho é

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} = \int_{t_1}^{t_2} \left[\mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{R}}{dt}\right] dt. \tag{6}$$

De acordo com a Segunda Lei do Movimento de Newton, temos

$$\mathbf{F} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt},$$

onde $\mathbf{v} = d\mathbf{R}/dt$ é a velocidade. Se v denota seu módulo de modo que $v = |\mathbf{v}|$, então podemos escrever o integrando de (6) como

$$\mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{R}}{dt} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2}m\frac{d}{dt}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = \frac{1}{2}m\frac{d}{dt}(v^2)^*.$$

Portanto, (6) torna-se

$$W = \frac{1}{2}m\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}(v^2)\,dt = \frac{1}{2}mv^2\Big]_{t_1}^{t_2} = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2, \tag{7}$$

onde v_A e v_B são as velocidades inicial e final, em módulo, isto é, os módulos das velocidades nos pontos A e B. Como $\frac{1}{2}mv^2$ é a energia cinética da partícula (7) diz que *o trabalho realizado é igual à variação da energia cinética* (uma discussão análoga para o caso do movimento linear foi dada na Seção 7.8).

---

* Nesse cálculo, utilizamos a regra do produto para a derivada do produto escalar de duas funções vetoriais de t. Isto é fácil de provar pela fórmula (8) da Seção 18.2.

Prosseguimos nessa linha de raciocínio até sua conclusão natural. O campo de forças **F** chama-se *conservativo* se é o gradiente de um campo escalar. Por motivos que aparecerão logo, é costume nesse contexto introduzir um sinal de menos e escrever $\mathbf{F} = -\nabla V$, de modo que V cresce mais rapidamente no sentido oposto ao de **F**. A função $V(x, y)$ é então chamada de *energia potencial.* Essa função é exatamente a oposta da que denotamos por f. Ela existe se e somente se **F** é um campo gradiente e, quando isso acontece, o Teorema Fundamental do Cálculo (5) nos diz que

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} = -\int_C \nabla V \cdot dR = -[V(B) - V(A)] = V(A) - V(B), \tag{8}$$

onde A e B são os pontos inicial e final do caminho arbitrário C. Se agora igualamos (7) e (8), obtemos

$$V(A) - V(B) = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2$$

ou

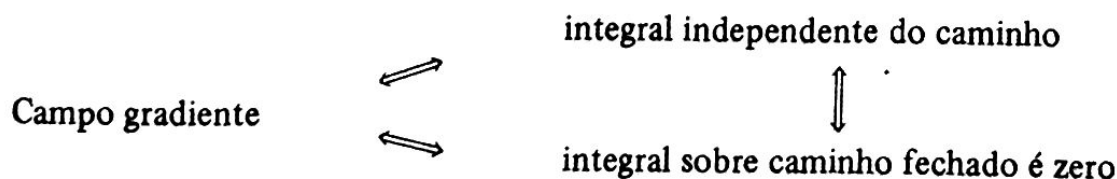
$$\frac{1}{2} m v_A^2 + V(A) = \frac{1}{2} m v_B^2 + V(B). \tag{9}$$

(Vemos agora que o sinal de menos foi introduzido na definição de energia potencial a fim de fazer com que os sinais aqui fiquem corretos.) A equação (9) diz que a soma da energia cinética com a energia potencial é a mesma tanto no ponto inicial como em seu ponto final. Como esses pontos são arbitrários, *a energia total é constante.* Esta é a *Lei da Conservação da Energia*, que é um dos princípios básicos da Física Clássica. Essa lei é verdadeira em qualquer campo de forças conservativo, tal como o campo gravitacional da Terra ou o campo elétrico produzido por qualquer distribuição de carga elétrica.

Demonstramos que um campo de forças é conservativo se e somente se satisfaz qualquer uma das seguintes condições equivalentes:

integral independente do caminho

Campo gradiente $\Leftrightarrow$ integral independente do caminho $\Updownarrow$ integral sobre caminho fechado é zero $\Leftrightarrow$ Campo gradiente

integral sobre caminho fechado é zero

A importância desses campos justifica dirigir nossa atenção ao problema prático de determinar se um dado campo de forças é ou não conservativo. Como todo campo vetorial pode ser encarado como um campo de forças, essas observações se aplicam a campos vetoriais em geral.

Exemplo 2 Mostrar que o campo vetorial $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} + xy^2\mathbf{j}$ não é conservativo.

Solução Uma maneira de fazer isso é mostrar que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$ *depende* do caminho. Escolhemos dois pontos convenientes, digamos (0, 0) e (1, 1), integramos do primeiro para o segundo sobre dois caminhos diferentes convenientes, como se mostra na Fig. 21.12.

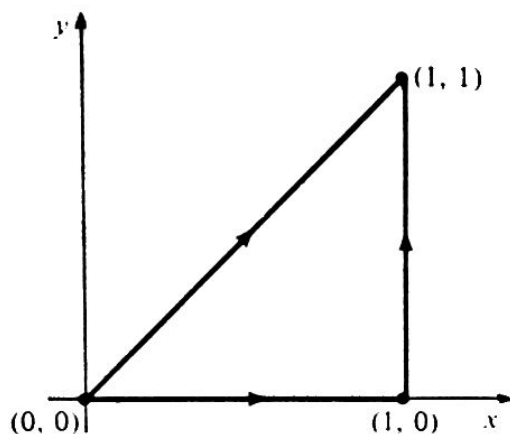



Figura 21.12

Primeiro, ao longo da reta $y = x$ temos

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} = \int_C xy\,dx + xy^2\,dy = \int_0^1 (x^2 + x^3)\,dx = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}.$$

Por outro lado, ao longo da poligonal de (0, 0) a (1, 0) a (1, 1), temos

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} = \int_0^1 0 \cdot dx + \int_0^1 y^2\,dy = \frac{1}{3}.$$

Como os valores dessas integrais não são iguais, o campo não é conservativo. Ao investigar integrais de linha desiguais dessa maneira, estamos perfeitamente à vontade para escolher caminhos que facilitem os cálculos. (Naturalmente, se essas duas integrais de linha são iguais, isto não teria evitado resultados diferentes para duas outras integrais de linha, logo nada teria sido provado de um modo ou de outro.)

Um outro método é assumir que o campo *é* conservativo, de modo que $\mathbf{F} = \nabla f$ para alguma função $f(x, y)$, e deduzir uma contradição dessa hipótese. A hipótese significa que existe uma função f tal que $\partial f/\partial x = xy$ e $\partial f/\partial y = xy^2$. Mas isto é impossível, pois as derivadas parciais mistas seriam então

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = x \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = y^2,$$

que são evidentemente diferentes, enquanto a teoria das derivadas parciais nos diz que essas derivadas deveriam ser iguais. A contradição implica que não existe f, logo **F** não é conservativo.

O raciocínio utilizado no segundo método desse exemplo depende da igualdade das derivadas parciais mistas,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}, \tag{10}$$

que é válida em qualquer região onde ambas as derivadas são contínuas (Seção 19.2). Esse raciocínio pode ser estabelecido como se segue: se

$$\mathbf{F} = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j} \tag{11}$$

é um campo vetorial conservativo, de modo que existe uma f com a propriedade $\nabla f = \mathbf{F}$ ou

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = N,$$

então, por (10), sabemos que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}. \tag{12}$$

A condição (12) é portanto necessária para que um campo vetorial seja conservativo, e vimos como esse fato pode ser usado. Mas será também suficiente? Isto é, (12) garante que (11) é conservativo? Analisamos essa questão na Seção 21.3.

Problemas

Nos Problemas de 1 a 4 utilize ambos os métodos do Exemplo 2 para mostrar que o campo vetorial não é conservativo.

1. $\mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$.
2. $\mathbf{F} = x(y-1)\mathbf{i} + x\mathbf{j}$.
3. $\mathbf{F} = x^3 y\mathbf{i} + xy^2\mathbf{j}$.
4. $\mathbf{F} = \dfrac{y\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{x^2 + y^2}$.

Nos Problemas de 5 a 8 mostre que as integrais de linha dadas não são independentes do caminho, integrando sobre dois caminhos diferentes de $(0, 0)$ a $(1, 1)$.

5. $\int_C 2xy\, dx + (y^2 - x^2)\, dy.$

6. $\int_C 2xy\, dx + (y - x^2)\, dy.$

7. $\int_C (x^2 - y^3)\, dx + 3xy^2\, dy.$

8. $\int_C (x - y)\, dx + (x + y)\, dy.$

9. Mostre que

$$\int_{(-2,1)}^{(1,4)} 2xy\, dx + x^2\, dy$$

é independente do caminho e calcule a integral
(a) usando a fórmula (5);
(b) integrando sobre qualquer caminho conveniente.

10. Mostre que

$$\int_{(-1,0)}^{(1,\pi)} \operatorname{sen} y\, dx + x \cos y\, dy$$

é independente do caminho e calcule a integral
(a) usando a fórmula (5);
(b) integrando sobre qualquer caminho conveniente.

Nos Problemas de 11 a 16 mostre que a integral é independente do caminho e utilize qualquer método para calculá-la

11. $\int_{(-2,-1)}^{(1,5)} 2y\, dx + 2x\, dy.$

12. $\int_{(0,0)}^{(4,5)} y^2 e^x\, dx + 2ye^x\, dy.$

13. $\int_{(0,0)}^{(\pi/2,1)} e^y \cos x\, dx + e^y \operatorname{sen} x\, dy.$

14. $\displaystyle\int_{(-1,1)}^{(2,3)} 3x^2y^2\,dx + 2x^3y\,dy.$

15. $\displaystyle\int_{(-2,1)}^{(4,1)} 2xy\,dx + (x^2 + y^2)\,dy.$

16. $\displaystyle\int_{(0,0)}^{(1,1)} (x + y)\,dx + x\,dy.$

17. Suponha que uma partícula de massa m move-se no plano xy sob a influência da força gravitacional constante $\mathbf{F} = -mg\mathbf{j}$. Se a partícula move-se de (x_1, y_1), a (x_2, y_2), ao longo de um caminho C, mostre que o trabalho realizado por $\mathbf{F}$ é

$$W = mg(y_1 - y_2),$$

independente do caminho.

21.3 TEOREMA DE GREEN

Como dissemos no início do capítulo, o Teorema de Green estabelece uma ligação importante entre integrais de linha e integrais duplas. Nosso propósito nesta seção é revelar a natureza dessa ligação.

Considere um campo vetorial

$$\mathbf{F} = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j} \tag{1}$$

definido sobre uma certa região do plano xy. Consideramos agora a questão de saber se a condição

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \tag{2}$$

é suficiente para garantir que $\mathbf{F}$ seja conservativo, isto é, que $\mathbf{F}$ seja o gradiente de algum campo escalar f. À luz do que já aprendemos na Seção 21.2, isto é equivalente a perguntar se a condição (2) implica que a integral de $\mathbf{F}$ sobre todo caminho fechado é zero. Usaremos a investigação dessa questão como um meio para chegarmos ao Teorema de Green, que então provaremos e aplicaremos de várias maneiras.

O tipo mais simples de caminho fechado C é um caminho retangular, como o mostrado na Fig. 21.13.

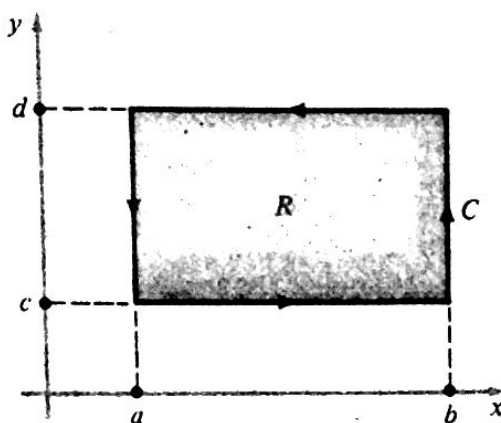



Figura 21.13

Calcularemos a integral de **F** sobre esse caminho e veremos o que é necessário para tornar seu valor igual a zero. Integrando no sentido anti-horário, como está mostrado, e iniciando com o segmento de caminho na aresta inferior da região retangular R, temos

$$\begin{aligned}\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R} &= \oint_C M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy \\ &= \int_a^b M(x, c)\,dx + \int_c^d N(b, y)\,dy + \int_b^a M(x, d)\,dx + \int_d^c N(a, y)\,dy \\ &= \int_c^d [N(b, y) - N(a, y)]\,dy - \int_a^b [M(x, d) - M(x, c)]\,dx. \qquad (3)\end{aligned}$$

A seguir, fazemos uma aplicação engenhosa do Teorema Fundamental do Cálculo para escrever os dois integrandos em (3) como

$$N(b, y) - N(a, y) = N(x, y)\Big]_{x=a}^{x=b} = \int_a^b \frac{\partial N}{\partial x}\,dx$$

e

$$M(x, d) - M(x, c) = M(x, y)\Big]_{y=c}^{y=d} = \int_c^d \frac{\partial M}{\partial y}\,dy.$$

Isto nos permite escrever (3) na forma

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} = \oint_C M\,dx + N\,dy$$
$$= \int_c^d \int_a^b \frac{\partial N}{\partial x}\,dx\,dy - \int_a^b \int_c^d \frac{\partial M}{\partial y}\,dy\,dx.$$

Essas integrais iteradas podem ser escritas como integrais duplas sobre a região R limitada por C, logo temos

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} = \oint_C M\,dx + N\,dy$$
$$= \iint_R \frac{\partial N}{\partial x}\,dA - \iint_R \frac{\partial M}{\partial y}\,dA = \iint_R \left[\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right] dA. \tag{4}$$

Agora podemos ver o que está acontecendo. A condição (2) implica que esta integral dupla é zero, logo $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} = 0$. É tentador inferir disto que a condição (2) implica que $\mathbf{F}$ é conservativo. No entanto, esta inferência requer que $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} = 0$ para *todo* caminho fechado C e demonstramos isto apenas para caminhos retangulares, como o da Fig. 21.13.

Se destacarmos a essência do argumento, veremos que ela está na equação (4), que pode ser escrita na forma

$$\oint_C M\,dx + N\,dy = \iint_R \left[\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right] dA. \tag{5}$$

Essa afirmação, de que uma integral de linha sobre uma curva fechada é igual a uma certa integral dupla sobre a região interior à curva, chama-se *Teorema de Green*, em homenagem ao físico matemático inglês George Green*.

Do ponto de vista estrito, o Teorema de Green não é meramente a equação (5), mas antes uma afirmação bastante cuidadosa das condições em que (5) é válida. Para enunciar tais condições, é necessário introduzir o conceito de curva fechada simples. Já sabemos que uma curva fechada é uma curva tal que o ponto final B é o mesmo que o ponto inicial A. Uma curva plana diz-se *simples* se não se interseciona em nenhum ponto entre suas extremidades (Fig. 21.14).

* Green (1793-1841) foi obrigado a abandonar a escola numa idade prematura para trabalhar na padaria de seu pai e conseqüentemente teve pouca educação formal. Estudando assiduamente em seu tempo de folga, aprendeu sozinho Matemática e Física, usando livros de biblioteca, particularmente a *Mécanique Céleste*, de Laplace. Em 1828 publicou na localidade, a sua custa, seu trabalho mais importante: *Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism*. Embora o Teorema de Green (numa forma equivalente) tivesse aparecido nesse livrete, foi pouco notado até ser republicado em 1846, cinco anos após sua morte, e desse modo chegou a outros cientistas, que reconheceram seu valor.

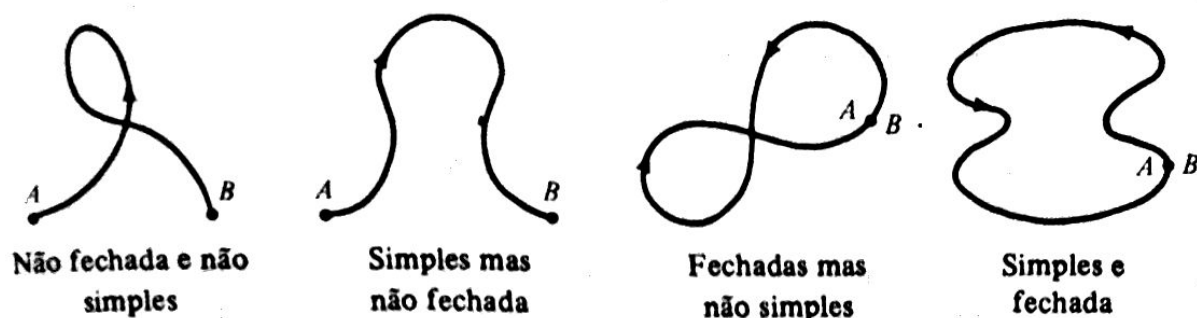



Figura 21.14 Vários tipos de curvas.

A menos que se mencione claramente o contrário, assumimos que curvas fechadas simples são *positivamente* orientadas, o que significa que elas são percorridas de tal modo que seus interiores estão sempre à esquerda (veja Fig. 21.14).

O *Teorema de Green* pode agora ser enunciado como se segue:

Se C é uma curva fechada simples, secionalmente lisa, que delimita uma região R, e se $M(x, y)$ e $N(x, y)$ são contínuas e têm derivadas parciais contínuas ao longo de C e em todo R; então

$$\oint_C M\,dx + N\,dy = \iint_R \left[\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right] dA. \tag{5}$$

Provamos (5) apenas para regiões retangulares R do tipo mostrado na Fig. 21.13. Damos agora um argumento análogo para o caso em que R é tanto verticalmente simples como horizontalmente simples, no sentido descrito na Seção 20.2. Depois indicaremos como estender o teorema para regiões mais gerais.

Como R é assumido ser verticalmente simples (Fig. 21.15), sua fronteira C pode ser pensada como consistindo em uma curva inferior $y = y_1(x)$ e uma curva superior $y = y_2(x)$, possivelmente separadas por segmentos verticais nos lados.

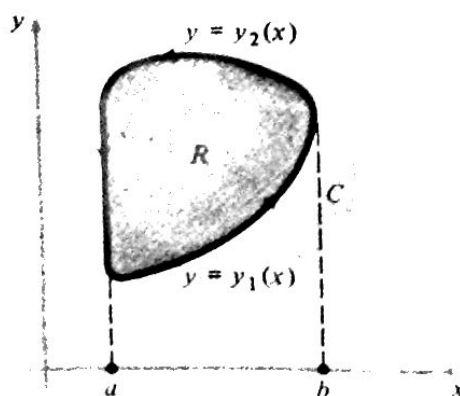



Figura 21.15

A integral $\int M(x, y)dx$ sobre qualquer parte de C composta de segmentos verticais é zero, pois $dx = 0$ sobre tais segmentos. Temos, portanto,

$$\oint_C M(x, y)\, dx = \int_a^b M[x, y_1(x)]\, dx + \int_b^a M[x, y_2(x)]\, dx, \tag{6}$$

onde a curva inferior é traçada da esquerda para a direita, e a curva superior, da direita para a esquerda. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, (6) pode ser escrita como

$$\begin{aligned}\oint_C M\, dx &= \int_a^b \{M[x, y_1(x)] - M[x, y_2(x)]\}\, dx \\ &= \int_a^b \Big[-M(x, y)\Big]_{y=y_1(x)}^{y=y_2(x)} dx \\ &= \int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} -\frac{\partial M}{\partial y}\, dy\, dx = \iint_R -\frac{\partial M}{\partial y}\, dA. \end{aligned}\tag{7}$$

Mas R é também assumida horizontalmente simples e um argumento análogo, que propomos aos estudantes no Problema 22, mostra que

$$\oint_C N\, dy = \iint_R \frac{\partial N}{\partial x}\, dA. \tag{8}$$

Obtemos agora o Teorema de Green (5) para a região R somando (7) e (8).

Uma prova completa e rigorosa do Teorema de Green está fora do propósito deste livro. Todavia, é bem fácil estender o argumento para cobrir qualquer região R que possa ser subdividida num número finito de regiões $R_1, R_2, \ldots, R_n$ que são tanto verticalmente como horizontalmente simples. A validade do Teorema de Green para R segue-se então de sua validade para cada uma das regiões $R_1, R_2, \ldots, R_n$.

Por exemplo, a região R da Fig. 21.16 pode ser subdividida nas regiões R_1 e R_2, introduzindo-se o corte indicado, que se torna parte da fronteira de R_1 quando traçada da direita para a esquerda (C_3), e parte da fronteira de R_2 quando traçada da esquerda para a direita (C_4).

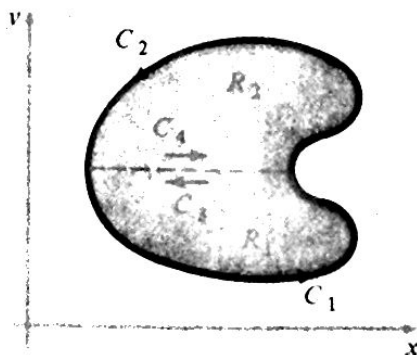



Figura 21.16

Aplicando o Teorema de Green separadamente a R_1 e R_2, temos

$$\oint_{C_1+C_3} M\,dx + N\,dy = \iint_{R_1} \left[\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right] dA$$

e

$$\oint_{C_2+C_4} M\,dx + N\,dy = \iint_{R_2} \left[\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right] dA.$$

Se somamos essas duas equações, o reultado é

$$\oint_{C_1+C_2} M\,dx + N\,dy = \iint_{R} \left[\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right] dA,$$

que é o Teorema de Green para a região R. Isto ocorre porque as duas integrais de linha sobre C_3 e C_4 cancelam-se, pois C_3 e C_4 são a mesma curva traçada em sentidos opostos. Analogamente, o Teorema de Green pode ser estendido para a região da Fig. 21.17 subdividindo-a nas quatro regiões mais simples mostradas na figura.

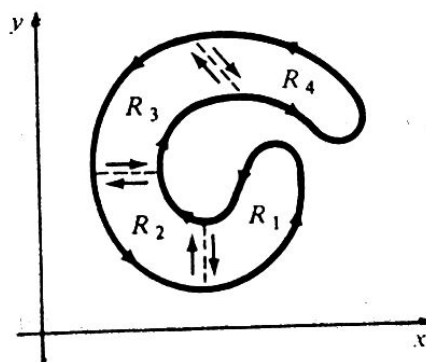



Figura 21.17

Exemplo 1 Calcular a integral de linha

$$I = \oint_C (3x - y)\,dx + (x + 5y)\,dy$$

sobre a circunferência unitária $x = \cos t$, $y = \text{sen } t$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Solução O cálculo direto dessa integral dá

$$I = \int_0^{2\pi} [(3\cos t - \operatorname{sen} t)(-\operatorname{sen} t) + (\cos t + 5\operatorname{sen} t)(\cos t)]\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} [2\operatorname{sen} t \cos t + 1]\, dt = \Big[\operatorname{sen}^2 t + t\Big]_0^{2\pi} = 2\pi.$$

Isto é bastante fácil, mas o Teorema de Green torna-a mais fácil ainda. Como $M = 3x - y$ e $N = x + 5y$, temos

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -1 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 1,$$

logo

$$I = \iint_R [1 - (-1)]\, dA$$

$$= 2\iint_R dA = 2(\text{área do círculo}) = 2\pi.$$

Exemplo 2 Calcular a integral de linha

$$I = \oint_C (2y + \sqrt{1 + x^5})\, dx + (5x - e^{y^2})\, dy$$

sobre a circunferência $x^2 + y^2 = 4$.

Solução O cálculo real dessa integral parece uma tarefa impossível, mas o Teorema de Green fornece um outro caminho. Como

$$M = 2y + \sqrt{1 + x^5} \qquad \text{e} \qquad N = 5x - ey^2,$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 5.$$

Segue-se que

$$I = \iint_R (5 - 2)\, dA = 3\iint_R dA = 3(\text{área do círculo}) = 3(4\pi) = 12\pi,$$

pois R é um disco circular de raio 2.

Exemplo 3 Se R é uma região plana qualquer à qual se aplica o Teorema de Green, mostre que a área A de R é dada pela fórmula

$$A = \frac{1}{2} \oint_C -y\,dx + x\,dy. \tag{9}$$

Solução Como $M = -y$ e $N = x$ e portanto

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -1 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 1,$$

O Teorema de Green conduz a

$$\oint_C -y\,dx + x\,dy = \iint_R [1 - (-1)]\,dA = 2\iint_R dA = 2A,$$

como foi enunciado.

Exemplo 4 Aplique a fórmula (9) para calcular a área limitada pela elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

Solução Podemos parametrizar a elipse por $x = a \cos t$, $y = b \operatorname{sen} t$, onde $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. Então a fórmula (9) implica

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [(-b \operatorname{sen} t)(-a \operatorname{sen} t) + (a \cos t)(b \cos t)]\,dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ab\,dt = \pi ab. \end{aligned}$$

Nosso problema original nesta seção era determinar se a condição

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \tag{2}$$

é suficiente para garantir que o campo vetorial

$$F = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j} \tag{1}$$

é conservativo. O Teorema de Green fornece a solução. Se C é qualquer caminho fechado simples no domínio de **F** e se a região limitada por C também está no domínio, então o Teorema de Green nos diz que

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R} = \oint_C M\,dx + N\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA.$$

Utilizando essa equação, vemos que se $\partial M/\partial y = \partial N/\partial x$, então a integral dupla é zero e, portanto, a integral de linha é zero. Se a integral de linha é zero sobre todo caminho fechado simples, então também é nula sobre todo caminho fechado, o que prova que **F** é conservativo. Enfatizamos que para esse raciocínio funcionar, a região englobada por C deve ficar inteiramente no domínio de **F**. Um modo conveniente de garantir isto é exigir que o domínio de **F** seja *simplesmente conexo,* o que significa que o interior de todo caminho fechado simples do domínio está também no domínio. Grosso modo, o domínio de **F** não deve ter nenhum buraco. Na Fig. 21.18 mostramos regiões com um, dois e três buracos, respectivamente; os pontos dentro das curvas internas não pertencem às regiões R, e assim essas regiões não são simplesmente conexas.

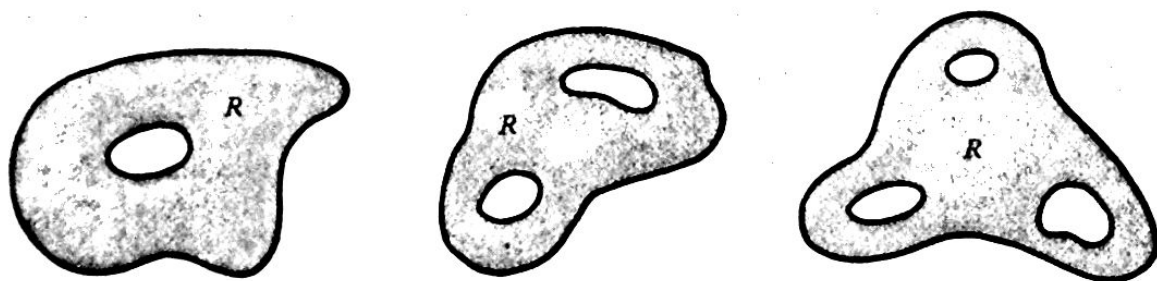



Figura 21.18 Regiões que não são simplesmente conexas.

Nossa conclusão global pode ser enunciada como se segue:

Se o domínio de definição do campo vetorial $\mathbf{F} = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$ *é simplesmente conexo, então* **F** *é conservativo se e somente se a condição* $\partial M/\partial y = \partial N/\partial x$ *é satisfeita.*

Uma questão final: se sabemos que um dado campo vetorial **F** é conservativo, de modo que $\mathbf{F} = \nabla f$ para alguma função $f(x, y)$, como determinar f? Tal função chama-se *função potencial* ou simplesmente um potencial para F*.

---

* Recorde que, por motivos físicos, a *energia potencial* associada ao campo de forças **F** é qualquer função escalar V (se existir) tal que $\mathbf{F} = -\nabla V$. Os conceitos de potencial e energia potencial estão intimamente relacionados, mas não são idênticos.

Um modo é por inspeção, mas isto funciona somente em casos simples. Um método mais sistemático é ilustrado no exemplo que se segue. Como o estudante pode ver, isto implica integrar as equações

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = N,$$

e a condição (2) garante que isto pode ser feito.

Exemplo 5 Calcular o potencial f para o campo vetorial

$$\mathbf{F} = (y^2 + 1)\mathbf{i} + 2xy\mathbf{j}.$$

Solução Aqui temos $M = y^2 + 1$ e $N = 2xy$. É fácil verificar que $\partial M/\partial y = \partial N/\partial x$ e, portanto, f existe e nosso único problema é determiná-la. Sabemos que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 + 1 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy. \tag{10}$$

Ao calcular $\partial f/\partial x$, derivamos com relação a x enquanto mantemos y constante; logo, integrando a primeira das equações (10) com relação a x, obtemos $f = xy^2 + x + g(y)$, onde $g(y)$ é uma função de y a ser determinada. Derivando com relação a y, vemos que $\partial f/\partial y = 2xy + g'(y)$ e, comparando essa com a segunda das equações (10), concluímos que $g'(y) = 0$. Segue-se que $g(y)$ é uma constante C que pode ser escolhida arbitrariamente e portanto o potencial que estamos procurando é $f(x, y) = xy^2 + x + C$. É fácil conferir esse resultado verificando que $\nabla f = \mathbf{F}$.

Problemas

Nos Problemas de 1 a 4 calcule as integrais de linha diretamente e também pelo Teorema de Green.

1. $\oint_C (xy - y^2)\,dx + xy^2\,dy$, onde C é o caminho fechado simples formado por $y = 0$, $x = 1$, $y = x$.
2. $\oint_C x\,dx + xy^2\,dy$, onde C é o caminho fechado simples formado por $y = x^2$ e $y = x$.
3. $\oint_C 1/y\,dx + 1/x\,dy$, onde C é o caminho fechado simples formado por $y = x$, $y = 4$, $x = 1$.
4. $\oint_C y^2\,dx + x^2\,dy$, onde C é o caminho fechado simples formado por $y = 0$, $x = 1$, $y = 1$, $x = 0$.

Nos Problemas de 5 a 12 utilize o Teorema de Green para calcular as integrais de linha dadas.

5. $\oint_C xy\, dx + (x + y)\, dy$, onde C é o caminho fechado (obviamente simples) formado por $y = 0, x = 0, y = 1, x = -1$.

6. $\oint_C -xy/(1 + x)dx + \ln(1 + x)\, dy$, onde C é o caminho fechado formado por $y = 0$, $x + 2y = 4, x = 0$.

7. $\oint_C -x^2y/(1 + x^2)\, dx + \text{arc tg}\, x\, dy$, onde C é o caminho fechado formado por $y = 0$, $x = 1, y = 1, x = 0$.

8. $\oint_C x\, dx + xy\, dy$, *onde* C é o caminho fechado formado por $y = 0$, $x^2 + y^2 = 1$ $(x, y \geq 0)$, $x = 0$.

9. $\oint_C (e^{x^3} + y^2)\, dx + (x + \sqrt{1 + y^7})\, dy$, onde C é o caminho fechado formado por $y = 0$, $x = 1, y = x$.

10. $\oint_C -y^3\, dx + x^3\, dy$, onde C é o caminho fechado formado por $y = x^3$ e $y = x$.

11. $\oint_C (-y^2 + \text{arc tg}\, x)\, dx + \ln y\, dy$, onde C é o caminho fechado formado por $y = x^2$ e $x = y^2$.

12. $\oint_C (x^2 - y)\, dx + x\, dy$, onde C é a circunferência $x^2 + y^2 = 9$.

Nos Problemas de 13 a 20 use a fórmula (9) para calcular a área da região limitada pelas curvas dadas:

13. $y = 3x$ e $y^2 = 9x$.

14 $y = 0, x + y = a\ (a > 0), x = 0$.

15. O eixo x e um arco da ciclóide $x = a(\theta - \text{sen}\, \theta), y = a(1 - \cos \theta)$.

16. $y = x^2$ e $x = y^3$.

17. $x = a \cos^3 \theta$ e $y = a\, \text{sen}^3\, \theta, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ (um astróide ou hipociclóide de quatro cúspides).

18. $y = x^2$ e $x = y^2$.

19. O eixo x e um arco de $y = \text{sen}\, x$.

20. $9y = x, xy = 1, y = x$.

21. O laço do *folium* de Descartes (com equação cartesiana $x^3 + y^3 = 3axy$) é mostrado na Fig. 17.11. No Problema 16 da Seção 17.1 pedimos para introduzir o parâmetro $t = y/x$ e obter as equações paramétricas

$$x = \frac{3at}{1+t^3}, \qquad y = \frac{3at^2}{1+t^3}.$$

Utilize a fórmula (9) para calcular a área do laço. Sugestão: a parte do laço abaixo da reta $y = x$ é traçada quando t cresce de 0 a 1.

22. Dê os detalhes do argumento que estabelece a fórmula (8) para o caso em que R é horizontalmente simples.

Nos Problemas de 23 a 28 verifique que o campo vetorial dado é conservativo e determine um potencial para ele.

23. $\mathbf{F} = y^3\mathbf{i} + 3xy^2\mathbf{j}$.
24. $\mathbf{F} = e^y \cos x\,\mathbf{i} + e^y \operatorname{sen} x\,\mathbf{j}$.
25. $\mathbf{F} = (ye^{xy} - 2x)\mathbf{i} + (xe^{xy} + 2y)\mathbf{j}$.
26. $\mathbf{F} = y \cos xy\,\mathbf{i} + x \cos xy\,\mathbf{j}$.
27. $\mathbf{F} = (\operatorname{sen} y - y \operatorname{sen} x)\mathbf{i} + (x \cos y + \cos x)\mathbf{j}$.
28. $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$.

29. Sejam C_1, C_2 e C_3 curvas fechadas simples mostradas na Fig. 21.19 e seja R a região dentro de C_1 e fora de C_2 e C_3. Suponha que $M(x, y)$ e $N(x, y)$ sejam contínuas e tenham derivadas parciais contínuas em R e ao longo de todas as curvas. Mostre que o Teorema de Green

$$\oint_C M\,dx + N\,dy = \iint_R \left[\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right] dA$$

permanece válido nesse caso, se C é entendido como sendo a fronteira total de R, consistindo em C_1, C_2 e C_3 positivamente orientadas, como se mostra na figura. (As curvas C_2 e C_3 são orientadas no sentido horário, no entanto a orientação é positiva, pois elas são percorridas de tal modo que a região R permanece à esquerda delas.

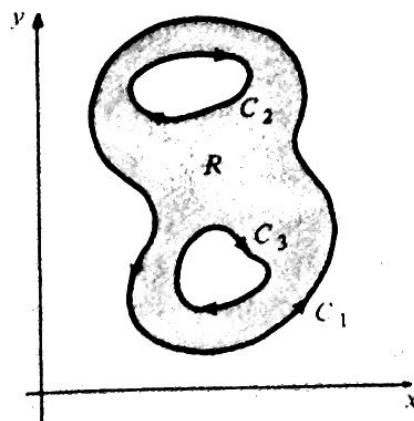



Figura 21.19

30. O Teorema de Green pode ser utilizado para calcular a integral de linha

$$\oint_C \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy,$$

(a) onde C é a circunferência $x^2+y^2=1$?
(b) onde C é o triângulo com vértices $(1, 0)$, $(1, 2)$, $(2, 2)$?

31. Se C_1 é a circunferência $x^2+y^2=1$ e C_2 é um caminho fechado simples contendo C_1, como na Fig. 21.20, utilize a idéia do Problema 29 para mostrar que

$$\oint_{C_2} \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy = \oint_{C_1} \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy,$$

e calcule a integral da esquerda, calculando a integral da direita.

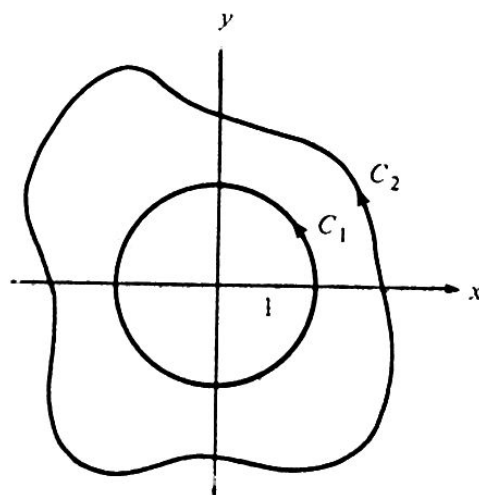



Figura 21.20

21.4 O QUE SEGUE?

Para muitos estudantes que atingiram este estágio, isto não é suficiente no que se refere à Matemática. Muitos estudantes sérios de Ciência Física necessitam conhecer um pouco mais de Matemática do que este livro contém. E os próprios estudantes de Matemática também necessitam algo mais acerca de tipos totalmente diferentes de Matemática, por exemplo, teoria dos números e álgebra abstrata.

Para todos esses grupos desejamos transmitir uma impressão da natureza do que se enconra à frente. Este é o propósito da Fig. 21.21.

Nosso trabalho neste capítulo tratou de análise vetorial no plano. Todo esse material se estende ao espaço tridimensional com o Teorema de Green se estendendo ao Teorema de Stokes*. Esses conceitos e instrumentos têm ricas aplicações à Física Matemática. Eles levam também à geometria diferencial gaussiana das superfícies e daí para a geometria riemanniana.

Um dos principais tópicos deste livro foi equações diferenciais. Num nível mais elevado, esse tópico se amplia para um dos maiores ramos da Matemática Clássica, com profundas aplicações à Ciência e muitas implicações de longo alcance para a própria Matemática.

Não tencionamos descrever quaisquer outros itens mostrados na figura. Basta dizer que esses ramos da Matemática estão inter-relacionados de tantas maneiras que nem tentamos indicá-las e também que qualquer estudante que siga essas direções encontrará maravilhas que estão além da imaginação.

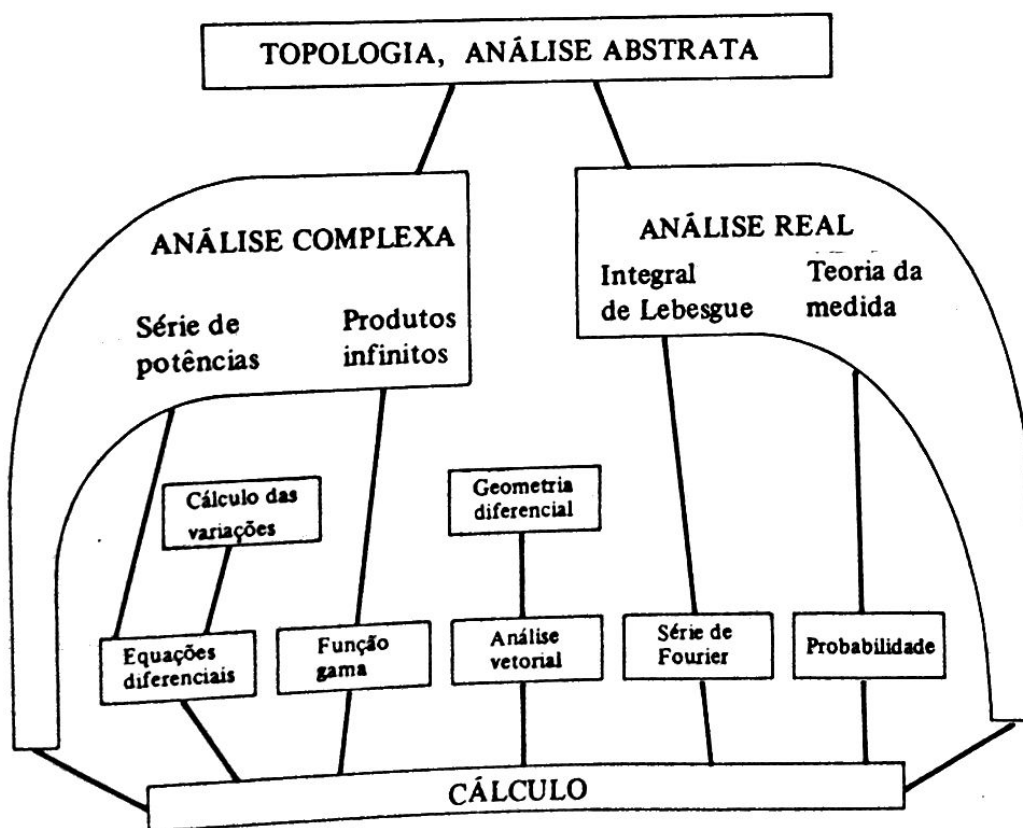



Figura 21.21 Um quadro esquemático da análise matemática.

* Para a conveniência dos professores que desejam prosseguir um pouco mais nesses temas, exposições breves do Teorema da Divergência e o Teorema de Stokes (com problemas para casa) são dadas nos Apêndices A. 15 e A.16 deste volume.

CAPÍTULO

22

FUNDAMENTOS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

22.1 A NATUREZA DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Introdução

Uma equação envolvendo uma variável dependente e suas derivadas em relação a uma ou mais variáveis independentes é chamada *equação diferencial*. Muitas das leis gerais da natureza – em Física, Química, Biologia e Astronomia – têm sua expressão mais natural na linguagem das equações diferenciais. Mesmo em Matemática são muitas suas aplicações, especialmente em Geometria, Engenharia, Economia e muitos outros campos da Ciência.

É fácil entender a razão dessa ampla utilização das equações diferenciais. O leitor pode recordar que, se $y = f(x)$ é uma função dada, então sua derivada dx/dy pode ser interpretada como a taxa de variação de y em relação a x. Num processo natural, as variáveis envolvidas e suas taxas de variação estão em conexão uma com a outra pelo significado dos princípios científicos básicos que regem os processos. Quando essa conexão é expressa em símbolos matemáticos, o resultado é, muitas vezes, uma equação diferencial.

O exemplo seguinte ilustra essa observação. De acordo com a Segunda Lei do Movimento de Newton, a aceleração a de um corpo de massa m é proporcional à força total F atuando sobre ele, tendo $1/m$ como a constante de proporcionalidade, de tal modo que $a = F/m$ ou

$$ma = F. \tag{1}$$

Suponha-se, por um momento, que um corpo de massa m cai livremente sob a influência exclusiva da gravidade. Nesse caso, a única força atuante nele é mg, onde g é a aceleração em

virtude da gravidade*. Se y é a altura do corpo a partir do solo, então sua aceleração é d^2y/dt^2 e (1) se torna

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = mg$$

ou

$$\frac{d^2y}{dt^2} = g. \tag{2}$$

Se se considerar que o ar exerce uma certa resistência proporcional à velocidade, então a força total atuando sobre o corpo é $mg - k(dy/dt)$ e (1) se torna

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = mg - k\frac{dy}{dt}. \tag{3}$$

As equações (2) e (3) são equações diferenciais que expressam as características principais do processo físico em estudo. Como exemplos de equações diferenciais, listamos as seguintes:

$$\frac{dy}{dt} = -ky; \tag{4}$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -ky; \tag{5}$$

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = e^{-x^2}; \tag{6}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = 0; \tag{7}$$

$$(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + p(p + 1)y = 0; \tag{8}$$

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2 - p^2)y = 0. \tag{9}$$

A variável dependente de cada uma dessas equações é y, e a variável independente é x ou t. As letras k, m e p representam constantes. Uma *equação diferencial ordinária* é aquela na qual há só uma variável independente, de modo que todas as derivadas que ocorrem nela são derivadas ordinárias.

---

* g pode ser considerada constante na superfície da Terra para a maioria das aplicações e é aproximadamente igual a 32 pés por segundo por segundo (ou 980 centímetros por segundo por segundo).

Cada uma das equações acima é uma equação diferencial ordinária. A *ordem* da equação diferencial é dada pela ordem da mais alta derivada presente. As equações (4) e (6) são equações de primeira ordem, e as outras, de segunda. As equações (8) e (9) são clássicas, sendo chamadas *equação de Legendre* e *equação de Bessel*, respectivamente. Cada uma delas tem uma vasta literatura e história de séculos. Estudaremos todas essas equações mais tarde.

Uma *equação diferencial parcial* é aquela que tem mais de uma variável independente, de modo que as derivadas que ocorrem são derivadas parciais. Por exemplo, se $w = f(x, y, z, t)$ é uma função do tempo e das três coordenadas retangulares de um ponto no espaço, então as seguintes equações são equações diferenciais parciais de segunda ordem:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0;$$

$$a^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) = \frac{\partial w}{\partial t};$$

$$a^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}.$$

Essas equações, chamadas *equação de Laplace*, *equação do calor* e *equação da onda*, respectivamente, também são clássicas. Cada uma delas é muito importante na Física Teórica e seu estudo tem estimulado o desenvolvimento de muitas idéias importantes em Matemática. Em geral, as equações diferenciais parciais aparecem na Física do meio contínuo – em problemas envolvendo campos elétricos, dinâmica de fluidos, difusão e movimentos de onda. Sua teoria é muito diferente da das equações diferenciais ordinárias e, em vários aspectos, é muito mais difícil. Por algum tempo ainda manteremos nossa atenção nas equações diferenciais ordinárias.

Observações gerais sobre as soluções

A equação diferencial ordinária geral de ordem n é

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0,$$

ou, usando a notação $'$ para as derivadas

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0. \tag{1}$$

Uma discussão teórica adequada sobre essa equação deveria poder ser baseada num estudo cuidadoso das propriedades explícitas da função F. Contudo, uma ênfase indevida nos detalhes pode, muitas vezes, obscurecer o que está realmente acontecendo. Iremos, por isso, evitar ser demasiado meticulosos sobre tais matérias – pelo menos no presente.

É, normalmente, tarefa simples verificar que uma dada função $y = y(x)$ é uma solução de uma equação tal como (1). Tudo o que é necessário é calcular as derivadas de $y(x)$ e mostrar que $y(x)$ e essas derivadas, quando substituídas na equação, a reduzem a uma identidade em x. Desse modo, vemos que

$$y = e^{2x} \qquad \text{e} \qquad y = e^{3x}$$

são ambas soluções da equação de segunda ordem

$$y'' - 5y' + 6y = 0; \tag{2}$$

ou, de forma mais geral, que

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} \tag{3}$$

é também uma solução para qualquer valor que se atribua às constantes c_1 e c_2. Soluções das equações diferenciais muitas vezes se desenvolvem em forma de funções definidas implicitamente e, algumas vezes, é difícil ou impossível expressar a variável dependente explicitamente em termos da variável independente. Por exemplo,

$$xy = \ln y + c \tag{4}$$

é a solução de

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{1 - xy} \tag{5}$$

para todos os valores da constante c, como podemos rapidamente verificar pela diferenciação da equação (4) e rearranjando o resultado. Esses exemplos também ilustram o fato de que a solução diferencial usualmente contém uma ou mais constantes arbitrárias, iguais em número à ordem da equação.

Em muitos casos, procedimentos desse tipo são fáceis de se aplicar quando se "suspeita" termos uma solução para a equação diferencial. O problema de achar a solução de uma equação diferencial é, naturalmente, muito mais difícil. No devido tempo desenvolveremos métodos sistemáticos para encontrar a solução de equações do tipo (2) e (5). Para já, entretanto, nos limitaremos a poucas observações sobre alguns aspectos gerais das soluções.

A mais simples de todas as equações diferenciais é

$$\frac{dy}{dx} = f(x), \tag{6}$$

e a resolvemos escrevendo

$$y = \int f(x)\, dx + c. \tag{7}$$

Em alguns casos, a integral indefinida de (7) pode ser achada por métodos de cálculo. Em outros, pode ser difícil ou impossível encontrar a fórmula para essa integral. É fato conhecido, por exemplo, que

$$\int e^{-x^2}\,dx \qquad \text{e} \qquad \int \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$$

não podem ser expressas em termos de um número finito de funções elementares*. Se recordarmos, contudo, que

$$\int f(x)\,dx$$

é, simplesmente, um símbolo de uma função (qualquer função) que tem derivada $f(x)$, então podemos, ao menos, dar sempre a (7) um significado válido escrevendo-a na forma

$$y = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt + c. \tag{8}$$

O ponto crucial da questão é que essa integral definida é uma função do limite superior x (o t sob a integral é, apenas, uma variável simulada), o qual existe sempre quando a integral for contínua no domínio de integração e sua derivada for $f(x)$**.

A equação geral de primeira ordem é o caso especial de (1), que corresponde a considerar-se $n = 1$:

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0. \tag{9}$$

Normalmente, esperamos que uma tal equação tenha solução e que esta contenha uma constante arbitrária. Entretanto

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1 = 0$$

---

* O leitor curioso sobre o porquê desse fato, pode consultar D. G. Mead, Integration, *Am. Math. Monthly*, vol. 68, pp. 152-156, 1961. Para detalhes adicionais, ver G. H. Hardy, "The Integration of Functions of a Single Variable", Cambridge University Press, London, 1916; ou J. F. Ritt, "Integration in Finite Terms", Columbia University Press, New York, 1948.

** Essa afirmação é uma forma do Teorema Fundamental do Cálculo.

não tem, de modo algum, uma solução real, e

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = 0$$

tem uma única solução para $y = 0$ (que não contém constantes arbitrárias). Situações desse tipo levantam questões teóricas difíceis sobre a existência e a natureza de soluções para as equações diferenciais. Não podemos entrar aqui numa discussão completa sobre essas questões, mas podemos clarificar o assunto dando-se uma descrição de alguns fatos básicos.

Para salvaguarda da simplicidade, consideramos que (9) pode ser resolvida em termos de dy/dx:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \tag{10}$$

Consideremos, também, que $f(x, y)$ é uma função contínua num retângulo R no plano xy. O significado geométrico da solução de (10) pode ser melhor entendido a seguir (Fig.22.1).

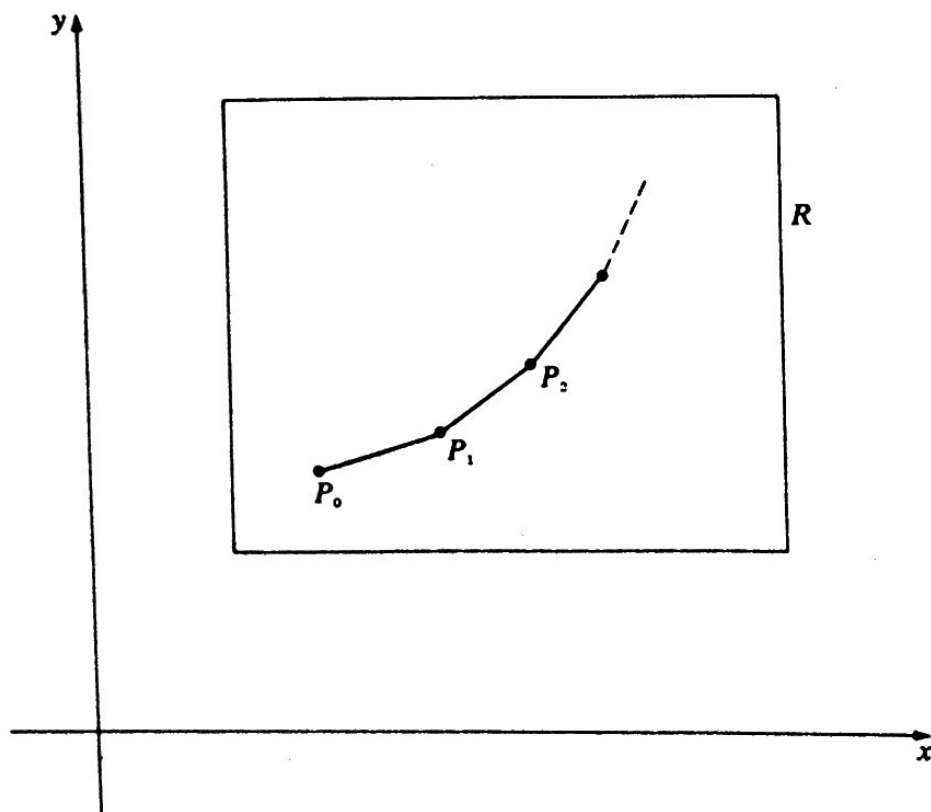



Figura 22.1

Se $P_0 = (x_0, y_0)$ é um ponto de R, então o número

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{P_0} = f(x_0, y_0)$$

determina uma direção em P_0. Agora, fazemos com que $P_1 = (x_1, y_1)$ seja um ponto próximo de P_0 sobre essa direção e usamos

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{P_1} = f(x_1, y_1)$$

para determinar a nova direção em P_1. A seguir, fazemos com que $P_2 = (x_2, y_2)$ seja um ponto próximo de P_1 nessa nova direção e usamos o número

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{P_2} = f(x_2, y_2)$$

para determinar uma outra direção em P_2. Se continuarmos nesse processo, obteremos uma linha quebrada com pontos espalhados ao longo dela, como contas; se, agora, imaginarmos que esses pontos sucessivos estão muito próximos uns dos outros e se tornam mais e mais numerosos, então a linha quebrada se aproxima de uma curva com ponto inicial P_0. Essa curva é a solução $y = y(x)$ da equação (10); para cada ponto (x, y) sobre ele, seu declive é dado por $f(x, y)$ – precisamente a condição exigida pela equação diferencial. Se começarmos de um ponto inicial diferente, obteremos, geralmente, uma curva ou solução diferente também. Assim, as soluções de (10) formam uma família de curvas chamadas *curvas integrais**. Além disso, parece ser uma consideração razoável que, por meio de cada ponto de R, passe somente uma curva integral de (10). Essa discussão foi feita para dar plausibilidade à seguinte afirmação:

Teorema A (Teorema de Picard). Se $f(x, y)$ e $\partial f/\partial y$ são funções contínuas num retângulo fechado R, então em cada ponto (x_0, y_0) no interior de R passa uma única curva integral da equação $dy/dx = f(x, y)$.

Se considerarmos um valor fixo de x_0 nesse teorema, então a curva integral que passa por (x_0, y_0) é totalmente determinada pela escolha de y_0. Nesse caso, veremos que as curvas integrais de (10) constituem o que se chama *família de curvas de um parâmetro*. A equação dessa família pode ser escrita na forma

$$y = y(x, c), \tag{11}$$

* Soluções de uma equação diferencial são, muitas vezes, chamadas integrais da equação porque o problema de as encontrar é, mais ou menos, uma extensão de um problema ordinário de integração.

onde diferentes valores do parâmetro c levam a diferentes curvas da família. A curva integral que passa por (x_0, y_0) corresponde ao valor de c para o qual $y_0 = y(x_0, c)$. Se substituirmos esse número por c_0, então (11) é chamada *solução geral* da equação (10) e

$$y = y(x, c_0),$$

é chamada ***solução particular*** que satisfaz a condição inicial

$$y = y_0 \quad \text{quando} \quad x = x_0.$$

O caráter essencial da solução geral (11) é que a constante c pode ser escolhida de modo que uma curva integral passe por meio de um dado ponto do retângulo em consideração.

O Teorema de Picard não será demonstrado nesse curso. Essa demonstração é bastante complicada e é provavelmente melhor que o leitor tenha tido já, antes, experiência com as partes mais concretas do assunto. O teorema pode ser generalizado para se referir a equações de ordem n solucionáveis para derivadas de ordem n. Descrições detalhadas sobre esse aspecto estão fora do escopo e nos limitaremos a discutir as idéias principais. No resto do capítulo, exploraremos alguns dos meios pelos quais as equações diferenciais surgem nas aplicações científicas.

Problemas

1. Verifique quais, das seguintes funções explícitas ou implícitas, são soluções das correspondentes equações diferenciais:

(a) $y = x^2 + c$ — $y' = 2x$;
(b) $y = cx^2$ — $xy' = 2y$;
(c) $y^2 = e^{2x} + c$ — $yy' = e^{2x}$;
(d) $y = ce^{kx}$ — $y' = ky$;
(e) $y = c_1 \operatorname{sen} 2x + c_2 \cos 2x$ — $y'' + 4y = 0$;
(f) $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$ — $y'' - 4y = 0$;
(g) $y = c_1 \operatorname{senh} 2x + c_2 \cosh 2x$ — $y'' - 4y = 0$;
(h) $y = \operatorname{sen}^{-1} xy$ — $xy' + y = y'\sqrt{1 - x^2y^2}$;
(i) $y = x \operatorname{tg} x$ — $xy' = y + x^2 + y^2$;
(j) $x^2 = 2y^2 \log y$ — $y' = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$;
(k) $y^2 = x^2 - cx$ — $2xyy' = x^2 + y^2$;
(l) $y = c^2 + c/x$ — $y + xy' = x^4(y')^2$;
(m) $y = ce^{y/x}$ — $y' = y^2/(xy - x^2)$;
(n) $y + \operatorname{sen} y = x$ — $(y \cos y - \operatorname{sen} y + x)y' = y$;
(o) $x + y = \operatorname{tg}^{-1} y$ — $1 + y^2 + y^2y' = 0$.

2. Encontre a solução geral das seguintes equações diferenciais:

(a) $y' = e^{3x} - x$;
(b) $xy' = 1$;
(c) $y' = xe^{x^2}$;
(d) $y' = \text{sen}^{-1} x$.

3. Para cada uma das seguintes equações diferenciais, ache a solução particular que satisfaça a condição inicial dada:

(a) $y' = xe^x$, $y = 3$ quando $x = 1$;
(b) $y' = 2 \,\text{sen}\, x \cos x$, $y = 1$ quando $x = 0$;
(c) $y' = \ln x$, $y = 0$ quando $x = e$.

Família de Curvas. Trajetórias Ortogonais

Vimos que a solução geral de uma equação de primeira ordem normalmente contém uma constante arbitrária, chamada parâmetro. Quando esse parâmetro assume vários valores, obtemos uma família de curvas de um parâmetro. Cada uma dessas curvas é uma solução particular, ou curva integral, de uma dada equação diferencial, e todas elas, juntas, constituem a solução geral.

Inversamente, como se pode esperar, as curvas de alguma família de um parâmetro são curvas integrais de alguma equação diferencial de primeira ordem. Se a família for

$$f(x, y, c) = 0, \tag{1}$$

então a equação diferencial pode ser achada por meio dos seguintes passos. Primeiro diferencia-se (1) implicitamente em relação a x para obter uma relação na forma

$$g\left(x, y, \frac{dy}{dx}, c\right) = 0. \tag{2}$$

A seguir elimina-se o parâmetro c de (1) e (2) obtendo-se

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0, \tag{3}$$

que é a equação diferencial desejada. Por exemplo,

$$x^2 + y^2 = c^2 \tag{4}$$

é a equação da família de todas as circunferências com centro na origem (Fig. 22.).

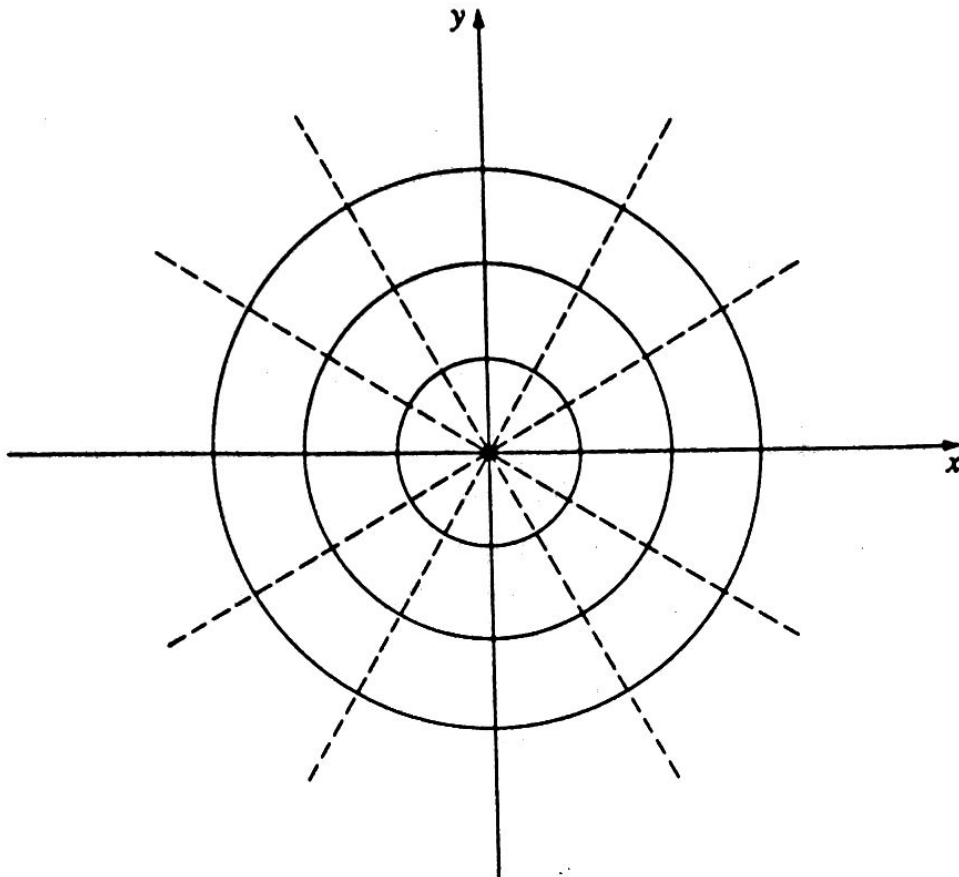



Figura 22.2

Derivando-se em relação a x fica

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0;$$

e desde que c já está ausente, não há necessidade de eliminá-lo e

$$x + y\frac{dy}{dx} = 0 \tag{5}$$

é a equação diferencial da dada família de circunferências. Similarmente

$$x^2 + y^2 = 2cx \tag{6}$$

é a equação de uma família de circunferências tangentes ao eixo y na origem (Fig. 22.3).

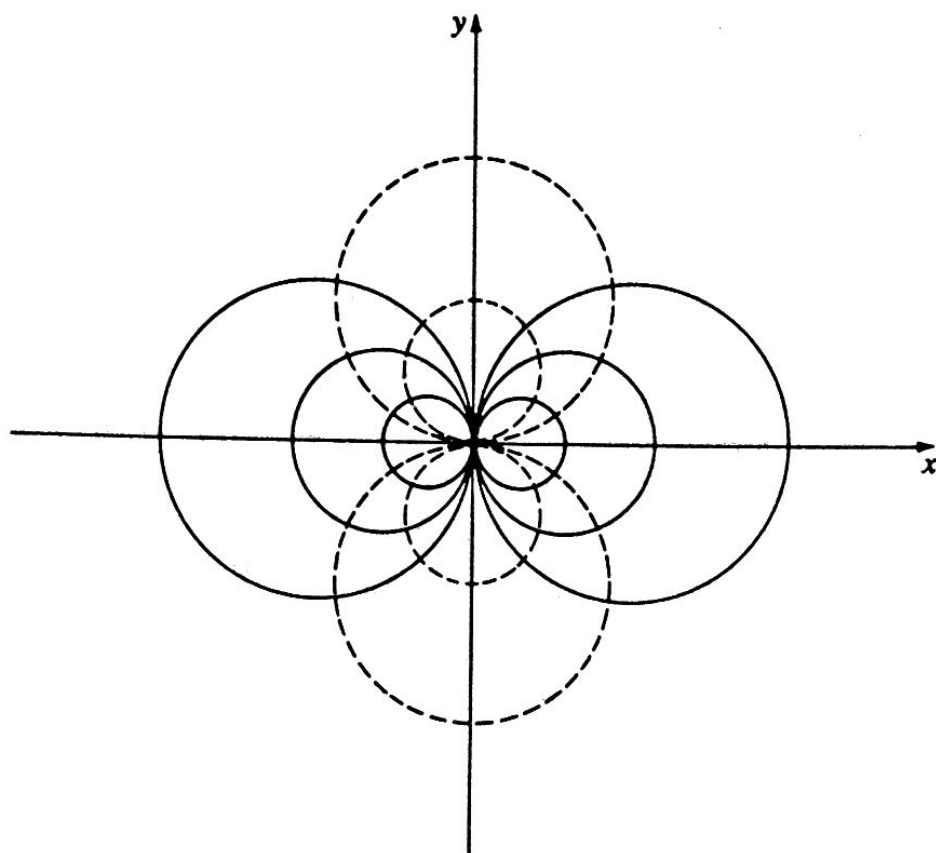



Figura 22.3

Quando a diferenciamos em relação a x obtemos

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 2c$$

ou

$$x + y\frac{dy}{dx} = c. \tag{7}$$

O parâmetro c ainda está presente, sendo necessário eliminá-lo pela combinação de (6) e (7). Isto leva a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - x^2}{2xy}, \tag{8}$$

que é a equação diferencial da família (6).

Como uma aplicação interessante desses procedimentos, consideremos o problema de se encontrar as trajetórias ortogonais. Para explicar em que consiste o problema, observemos que a família de circunferências representada em (4) e a família $y = mx$ de linhas retas pela origem (linhas tracejadas na Fig. 22.2) têm a seguinte propriedade: cada curva em ambas as famílias é ortogonal, isto é, perpendicular, a todas as curvas na outra família. Quando duas famílias estão relacionadas desse modo, diz-se que temos uma família de *trajetórias ortogonais* à outra. Trajetórias ortogonais têm interesse na Geometria de Curvas Planas e, também, em certas partes da Matemática Aplicada. Por exemplo, se uma corrente elétrica flui numa folha plana de um material condutor, então as linhas de igual potencial são ortogonais às linhas de fluxo da corrente.

No exemplo das circunferências concêntricas é geometricamente óbvio que as trajetórias ortogonais são linhas retas que passam pelo centro e vice-versa. Para podermos lidar com situações mais complicadas, precisamos entretanto de um método analítico para encontrar as trajetórias ortogonais. Suponha que

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \tag{9}$$

seja a equação diferencial da família de curvas da Fig. 22.4.

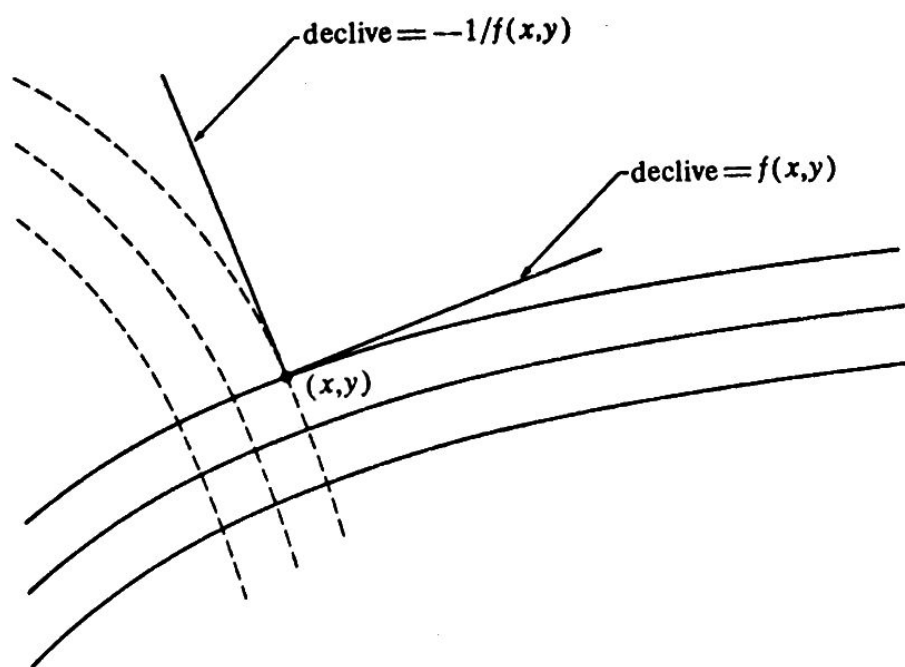



Figura 22.4.

Essas curvas são caracterizadas pelo fato de que, para qualquer ponto (x, y) em qualquer delas, o declive é dado por $f(x, y)$.

As trajetórias ortogonais tracejadas para esse mesmo ponto, sendo ortogonais à primeira curva, têm declive que é o recíproco do primeiro com sinal trocado. Então, para qualquer trajetória ortogonal, temos $dy/dx = -1/f(x, y)$ ou

$$-\frac{dx}{dy} = f(x,y). \tag{10}$$

Nosso método de achar as trajetórias ortogonais de uma dada família de curvas é o seguinte: primeiro, encontrar a equação diferencial da família; segundo, substituir dy/dx por $-dx/dy$ para obter a equação da trajetória; e, finalmente, resolver essa nova equação diferencial.

Se aplicarmos esse método à família de curvas (4), obteremos

$$x + y\left(-\frac{dx}{dy}\right) = 0$$

ou

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \tag{11}$$

como equação diferencial das trajetórias ortogonais. Podemos, agora, separar as variáveis em (11) obtendo

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x},$$

o que, integrando, leva a

$$\ln y = \ln x + \ln c$$

ou

$$y = cx,$$

que é a equação das trajetórias ortogonais.

É muitas vezes conveniente expressar uma dada família de curvas em termos de coordenadas polares. Nesse caso usamos o fato de que se ψ é o ângulo entre a tangente à curva e o raio da posição do ponto; então tg $\psi = r d\theta/dr$ (Fig. 22.5).

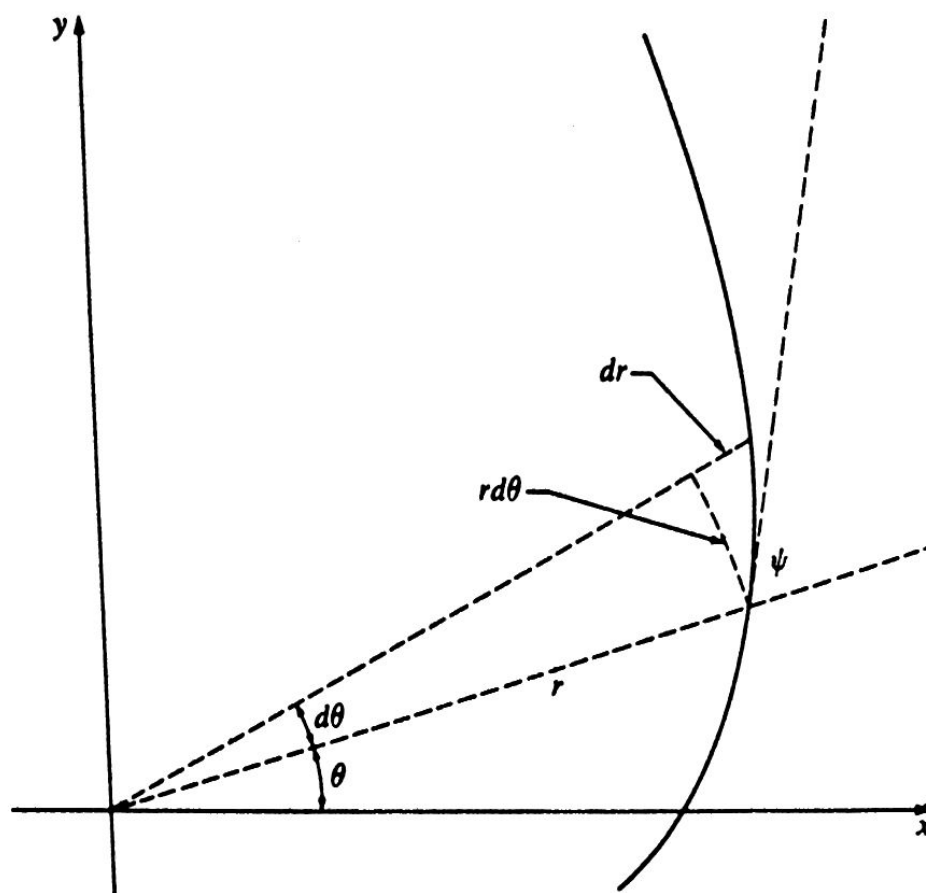



Figura 22.5

De acordo com a discussão acima, substituímos essa expressão na equação diferencial da família dada pelo seu recíproco simétrico $-dr/d\theta$, para obtermos a equação das trajetórias ortogonais. Como ilustração do valor dessa técnica, encontremos as trajetórias ortogonais da família de circunferências (6). Se usarmos coordenadas retangulares, segue-se de (8) que a equação diferencial das trajetórias ortogonais é

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2 - y^2}. \tag{12}$$

Infelizmente, as variáveis em (12) não podem ser separadas; por essa razão, sem técnicas adicionais, não podemos continuar nessa direção. Contudo, se usarmos coordenadas polares, a equação da família pode ser escrita como

$$r = 2c \cos \theta. \tag{13}$$

e, a partir dela, encontramos

$$\frac{dr}{d\theta} = -2c \operatorname{sen} \theta. \tag{14}$$

Depois de eliminar c de (13) e (14), chegamos a

$$\frac{r\,d\theta}{dr} = -\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta},$$

que é a equação diferencial da família dada. Conseqüentemente,

$$\frac{r\,d\theta}{dr} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$$

é a equação das trajetórias ortogonais. Nesse caso, as variáveis podem ser separadas levando a

$$\frac{dr}{r} = \frac{\cos\theta\,d\theta}{\operatorname{sen}\theta};$$

e, depois da integração, chegamos a

$$\ln r = \ln(\operatorname{sen}\theta) + \ln 2c,$$

ou seja,

$$r = 2c\operatorname{sen}\theta, \tag{15}$$

que é a equação das trajetórias ortogonais. Pode-se notar que (15) é a equação da família de todas as circunferências tangentes ao eixo x na origem (linhas tracejadas na Fig. 22.3).

Na próxima seção desenvolveremos procedimentos mais elaborados para resolver equações de primeira ordem. Uma vez que estamos dando mais atenção às aplicações que às técnicas formais, todos os problemas apresentados neste capítulo podem ser resolvidos pelo método de separação de variáveis exposto acima.

Problemas

1. Desenhe as seguintes famílias de curvas, encontre as trajetórias ortogonais e acrescente-as ao desenho:

   (a) $xy = c$; (c) $r = c(1 + \cos\theta)$;
   (b) $y = cx^2$; (d) $y = ce^x$.

2. Desenhe a família $y^2 = 4c(x + c)$ de todas as parábolas com eixo coincidindo com o eixo x e foco na origem, e encontre a equação diferencial da família. Mostre que essa equação diferencial fica inalterada substituindo-se dy/dx por $-dx/dy$. Que conclusão se pode tirar desse fato?

3. Ache as curvas que satisfaçam cada uma das seguintes condições geométricas:
   (a) a parte da tangente cortada pelos eixos é bissetada no ponto de tangência;
   (b) a projeção no eixo x da parte da normal entre (x, y) e o eixo x tem tamanho 1;
   (c) a projeção no eixo x da parte da tangente entre (x, y) e o eixo x tem tamanho 1;
   (d) o ângulo polar θ iguala o ângulo ψ entre o raio e a tangente;
   (e) o ângulo ψ entre o raio e a tangente é constante.

4. Uma curva sobe a partir da origem no plano xy no primeiro quadrante. A área sob a curva entre $(0, 0)$ e (x, y) é um terço da área do retângulo que tem esses pontos como vértices opostos. Ache a equação da curva.

Crescimento, Decomposição e Reações Químicas

Se uma molécula tem tendência a decompor-se espontaneamente em pequenas partículas numa taxa independente da presença de outras substâncias, então é natural esperar que o número de moléculas desse tipo, que se decompõem por unidade de tempo, será proporcional ao número total de moléculas da substância presente. Uma reação química desse tipo é chamada *reação de primeira ordem.*

Suponha, por exemplo, que existem inicialmente x_0 gramas de matéria, que se decompõem numa reação de primeira ordem. Se x for o número de gramas existentes num tempo posterior t, então o princípio estabelecido acima leva à equação diferencial

$$-\frac{dx}{dt} = kx, \qquad k > 0. \tag{1}$$

[Desde que dx/dt é a razão de crescimento de x, $-dx/dt$ é a razão de decomposição e (1) diz que a razão de decomposição de x é proporcional a x.] Se separarmos as variáveis em (1), obtemos

$$\frac{dx}{x} = -k\,dt,$$

que, após integração, se torna

$$\ln x = -kt + c.$$

A condição inicial

$$x = x_0 \quad \text{quando} \quad t = 0 \tag{2}$$

dá $c = \ln x_0$, de modo que $\ln x = -kt + \ln x_0$, $\ln (x/x_0) = -kt$, $x/x_0 = e^{-kt}$,

e

$$x = x_0 e^{-kt}. \tag{3}$$

Essa função é a solução da equação diferencial (1), que satisfaz a condição inicial (2). Seu gráfico é dado na Fig. 22.6.

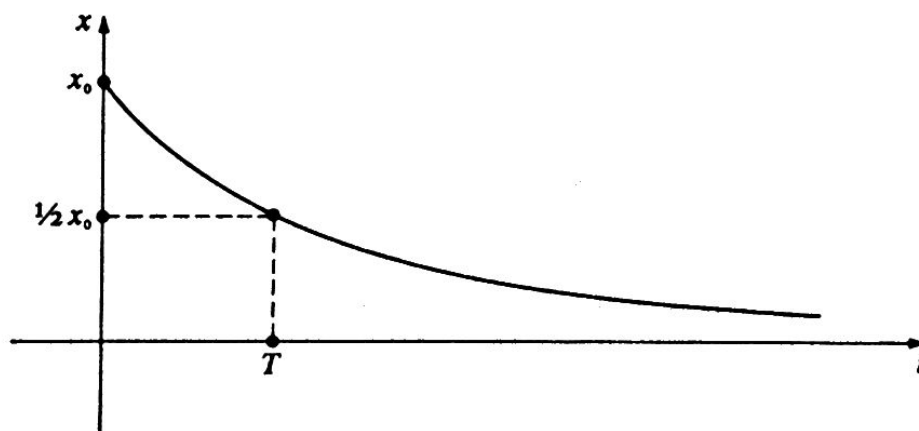



Figura 22.6.

A constante positiva k é chamada *constante de velocidade*, pois seu valor é, claramente, a medida da velocidade na qual a reação se processa.

São conhecidas muito poucas reações químicas de primeira ordem e a mais importante delas é a decomposição radiativa. É conveniente expressar a velocidade de decomposição de um elemento radiativo em termos de sua vida média, que é o tempo necessário para que uma dada quantidade do elemento diminua para metade. Se substituirmos x por $x_0/2$ em (3) teremos a equação

$$\frac{x_0}{2} = x_0 e^{-kT}$$

para a vida média T de modo que

$$kT = \ln 2.$$

Se uma das constantes, k ou T for conhecida por observação ou experimentação, essa equação permite-nos calcular a outra.

Essas idéias são a base de uma ferramenta científica de desenvolvimento relativamente recente, que tem tido grande aplicação em Geologia e Arqueologia. Em essência, elementos radiativos que ocorrem na natureza (com vidas médias conhecidas) podem ser usados para determinar datas de acontecimentos ocorridos há milhares e inclusive há bilhões de anos. Por exemplo, o isótopo radiativo comum do urânio decompõe-se em hélio, e um isótopo de chumbo tem uma vida média de 4,5 bilhões de anos. Quando uma rocha, que contêm urânio está no estado líquido, como a lava que é expelida por um vulcão, o chumbo criado no processo de decomposição se dispersa pelas correntes de lava; mas depois que a rocha se solidifica, o chumbo permanece num local fixo e vai se acumulando ao lado do urânio vizinho.

Uma peça de granito pode ser analisada para determinar a razão entre o chumbo e o urânio, e essa razão permite uma estimativa do tempo que transcorreu desde o momento crítico em que o granito se cristalizou. Muitos métodos de determinação de idade, envolvendo a decomposição de tório e dos isótopos de urânio em vários isótopos de chumbo, são de uso corrente.

Outro método depende da decomposição do potássio, com uma vida média de 1,3 bilhão de anos em argônio; e ainda outro, preferido para datar rochas mais velhas, é baseado na decomposição do rubídio, com uma vida média de 50 bilhões de anos, em estrôncio. Esses estudos são complexos e suscetíveis de erros de muitos tipos; mas eles podem, muitas vezes, ser testados e comparados com outros conduzindo ao estabelecimento de datas confiáveis para muitos acontecimentos da história geológica, ligados à formação das rochas ígneas. Rochas com 10 milhões de anos são bastante recentes, idades de centenas de milhões são muito comuns, sendo que as rochas mais velhas, já descobertas, têm mais de 3 bilhões de anos. Este é, sem dúvida, o limite inferior da idade da crosta terrestre e da própria Terra. Outras investigações usando vários tipos de informação astronômica, como a determinação de idade a partir de minerais em meteoritos, sugerem uma idade para a Terra de aproximadamente 4,5 bilhões de anos*.

Os elementos radiativos referidos anteriormente decompõem-se tão lentamente que os métodos de determinação de idade baseados neles não são aplicáveis para acontecimentos relativamente recentes. Essa falha foi preenchida pela descoberta do carbono radiativo, um isótopo radiativo do carbono com uma vida média de cerca de 5.600 anos, por Willard Libby, no fim da década de 40. Em 1950, Libby e seus associados desenvolveram a técnica de datação pelo carbono radiativo, o que tornou possível datar acontecimentos de épocas posteriores à Era Glacial e alguns dos movimentos e atividades dos homens pré-históricos. A contribuição dessa técnica à Geologia do Pleistoceno e à Arqueologia foi espetacular.

Em resumo, os fatos e princípios envolvidos são estes: o carbono radiativo é produzido na atmosfera superior pela ação de nêutrons dos raios cósmicos no nitrogênio. Esse carbono radiativo é oxidado a dióxido de carbono, o qual é, por sua vez, misturado pelos ventos com o dióxido de

---

* Para a discussão completa desses assuntos, assim como de muitos outros métodos e resultados na ciência de Geocronologia, ver F. E. Zeuner, "Dating the Past", 4ª edição, Methuen, London, 1958.

carbono não-radiativo já existente. Uma vez que o carbono radiativo está sendo constantemente formado, e decompondo-se em nitrogênio, sua proporção na atmosfera está em equilíbrio. Todas as plantas, por respiração, incorporam uma proporção de carbono radiativo em seus tecidos, o que também acontece com os animais que comem essas plantas. Essa proporção permanece constante durante todo o tempo em que o animal ou a planta vivam; mas, quando morrem, param de absorver carbono radiativo, e o que existe à altura da morte continua a se decompor. Então, se uma peça de madeira tem metade da radiatividade de uma árvore viva, isto significa que ela viveu há 5.600 anos; se tiver somente um quarto dessa radiatividade, então ela viveu há 11.200 anos. Esse princípio permite datar qualquer objeto de origem orgânica, por exemplo madeira, fibras vegetais, carne, pele, ossos etc. A confiabilidade do método foi testada pela aplicação nas gigantescas sequóias, que atingem a 3.000, 4.000 anos de idade, e no mobiliário dos túmulos egípcios, cuja idade já era conhecida por outras vias. Há dificuldades técnicas, mas o método permite, agora, uma precisão razoável, desde que o período não ultrapasse os 50.000 anos.

A datação por carbono radiativo tem sido usada em milhares de casos e há dezenas de laboratórios que a usam. Entre as mais interessantes estimativas de idade por carbono radiativo estão as seguintes: envoltórios de linho dos pergaminhos do Mar Morto do livro de Isaías encontrados numa caverna na Palestina e que se pensa serem do primeiro ou segundo século antes de Cristo, há 1917 ± 200 anos; carvão da caverna de Lascaux, no sul da França, encontrado em pinturas pré-históricas há 15.516±900 anos; carvão em monumentos pré-históricos em Stonehenge, no sul da Inglaterra, há 3.798±275 anos; carvão de uma árvore queimada na explosão que formou o Lago Crater, no Oregon, há 6.453±250 anos.

As habitações dos homens antigos no hemisfério ocidental têm sido datadas pelo uso de peças de carvão, fibras de sândalo, fragmentos de búfalos queimados etc. Os resultados sugerem que o homem chegou ao Novo Mundo por volta do último período da Era Glacial, há cerca de 11.500 anos, quando o nível da água dos oceanos era substancialmente mais baixo em relação ao atual, permitindo ao homem caminhar através do estreito de Bering da Sibéria para o Alasca*.

Essas idéias podem parecer bastante distantes das equações diferenciais, mas elas se baseiam na equação (1) e em suas soluções, dadas pela fórmula (3). Nos problemas seguintes, pediremos ao leitor para aplicar técnicas similares para questões químicas, biológicas e físicas.

Problemas

1. Suponha que duas substâncias químicas em solução reagem para formar um composto. Se a reação ocorre pela adição e interação das moléculas das substâncias, espera-se que a velocidade de formação do composto seja proporcional ao número de colisões por unidade de tempo, o qual, por sua vez, é proporcional à quantidade das substâncias ainda não-trans-

---

* Libby ganhou o prêmio Nobel de Química de 1960 pelo trabalho descrito acima. Sua própria descrição do método, com suas dificuldades e conclusões, pode ser encontrado em seu livro *Radiocarbon Datting*, 2ª edição, University of Chicago Press, 1955. Ver, também, G. C. Baldwin, *America's Buried Past*, Putman, New York, 1962.

formadas. Uma reação química que acontece dessa maneira é chamada *reação de segunda ordem* e essa lei de reação, é, muitas vezes, apresentada como a *Lei da Ação das Massas*. Considere a reação de segunda ordem na qual x gramas do composto contém ax gramas da primeira substância e bx gramas da segunda, $a + b = 1$. Se existem aA gramas da primeira substância e bB da segunda no momento inicial, e se $x = 0$ quando $t = 0$, calcule x como função de tempo t.

2. Suponha que x_0 bactérias são colocadas numa solução nutriente no tempo $t = 0$ e que x é a população da colônia num tempo posterior t. Se comida e espaço são ilimitados e se, como conseqüência, a população num dado momento cresce a uma velocidade proporcional à da população nesse momento, calcule x como função de t.

3. Se no Problema 2 o espaço for limitado e a comida for fornecida a uma velocidade constante, então a competição por comida e espaço atuará de modo a estabilizar a população a um nível constante x_1. Considere que, sob essas condições, a população cresce a uma velocidade proporcional a x e à diferença $x_1 - x$ e calcule x como função de t.

4. Considere que a pressão do ar p a uma altura h acima do nível do mar é proporcional à coluna de ar existente sobre uma unidade de área horizontal nesta altitude e, também, que o produto do volume de uma dada massa de ar e a pressão sobre essa massa permanecem constantes em todas as altitudes. Se $p = p_0$ no nível do mar, calcule p como função da altura h.

5. Considere que a velocidade à qual um corpo quente esfria é proporcional à diferença de temperatura entre ele e o ambiente a seu redor (Lei do Esfriamento de Newton*). Um corpo é aquecido a 110°C e colocado num ambiente a 10°C. Depois de 1 hora, a temperatura é de 60°C. Quanto tempo mais é necessário para esfriar o corpo a 30°C?

6. De acordo com a Lei da Absorção de Lambert, a percentagem de luz incidente absorvida por uma fina camada de material translúcido é proporcional à espessura da camada**. Se a luz do Sol incidindo verticalmente na água do oceano se reduz a 1/2 de sua intensidade inicial a uma profundidade de 10 pés, a que profundidade ela se reduz a 1/16 de sua intensidade inicial? Resolva este problema pensando apenas nele e, também, definindo e resolvendo a respectiva equação diferencial.

---

* O próprio Newton aplicou essa regra para estimar a temperatura de uma esfera de ferro aquecida ao rubro. Conhecia-se tão pouco sobre as leis de transferência de calor que seu resultado foi, somente, uma aproximação grosseira, mas, certamente, melhor que nada.

** Johann Heinrich Lambert (1728-1777) foi um astrônomo suíço-alemão, matemático, físico e estudioso. Ele era, principalmente, um autodidata e publicou trabalhos sobre as órbitas dos cometas, a teoria da luz e a elaboração de mapas. A projeção de áreas iguais de Lambert é bem conhecida de todos os cartógrafos. É lembrado entre os matemáticos por ter dado a primeira prova de que π era um número irracional.

Corpos em Queda e Outros Problemas de Velocidade

Nesta seção estudaremos o problema dinâmico de determinar o movimento de uma partícula em dada trajetória por meio da ação de forças conhecidas. Consideraremos somente dois casos: uma trajetória vertical, na qual a partícula cai livremente sob a influência da gravidade ou tomando em consideração, também, a resistência do ar; e uma trajetória circular, do tipo do movimento de um pêndulo.

Queda Livre O problema da queda livre de um corpo foi discutido anteriormente e chegamos à equação diferencial

$$\frac{d^2y}{dt^2} = g \tag{1}$$

para este movimento, onde y é a distância percorrida pelo corpo a partir de dada altura. A velocidade é dada por integração:

$$v = \frac{dy}{dt} = gt + c_1. \tag{2}$$

Desde que c_1 é o valor de v quando $t = 0$, c_1 é claramente a velocidade inicial v_0 e (2) se torna

$$v = \frac{dy}{dt} = gt + v_0. \tag{3}$$

Integrando outra vez obtemos

$$y = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + c_2.$$

A constante c_2 é o valor de y quando $t = 0$, ou a posição inicial y_0, pelo que

$$y = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + y_0 \tag{4}$$

é a solução geral da equação (1). Se o corpo cai, a partir do repouso de $y = 0$, então $v_0 = y_0 = 0$ e (3) e (4) se reduzem a

$$v = gt \qquad \text{e} \qquad y = \frac{1}{2}gt^2.$$

Eliminando-se t, temos uma equação muito útil

$$v = \sqrt{2gy} \tag{5}$$

para a velocidade em função da distância percorrida. O resultado pode ser também obtido a partir do *princípio da conservação da energia*, o qual se expressa por:

energia cinética + energia potencial = constante

Uma vez que o corpo cai do repouso em $y = 0$, seu ganho em energia cinética iguala a perda em energia potencial

$$\frac{1}{2} mv^2 = mgy,$$

de onde se deduz (5).

Queda retardada Se considerarmos que o ar exerce uma força de resistência proporcional à velocidade do corpo em queda, então a equação diferencial do movimento é

$$\frac{d^2y}{dt^2} = g - c\frac{dy}{dt}, \tag{6}$$

onde $c = k/m$ [ver equação 1-(3)]. Se dy/dt for substituído por v, teremos

$$\frac{dv}{dt} = g - cv. \tag{7}$$

Separando-se as variáveis e integrando, obtemos

$$\frac{dv}{g - cv} = dt$$

e

$$-\frac{1}{c} \ln (g - cv) = t + c_1,$$

de onde

$$g - cv = c_2 e^{-ct}.$$

A condição inicial $v = 0$ quando $t = 0$ dá $c_2 = g$, de modo que

$$v = \frac{g}{c}(1 - e^{-ct}). \tag{8}$$

Sendo c positivo, $v \to g/c$ quando $t \to \infty$. O limite de v é chamado *velocidade terminal*. Se desejarmos, podemos substituir v por dy/dt em (8) e fazer uma integração para calcular y como função de t.

O movimento de um pêndulo Consideremos um pêndulo constituído por uma bola de massa m na extremidade de um fio de massa desprezível e de comprimento a. Se a bola for deslocada para um lado em um ângulo α e solta (Fig.22.7) pelo princípio da conservação da energia, temos

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg(a\cos\theta - a\cos\alpha). \tag{9}$$

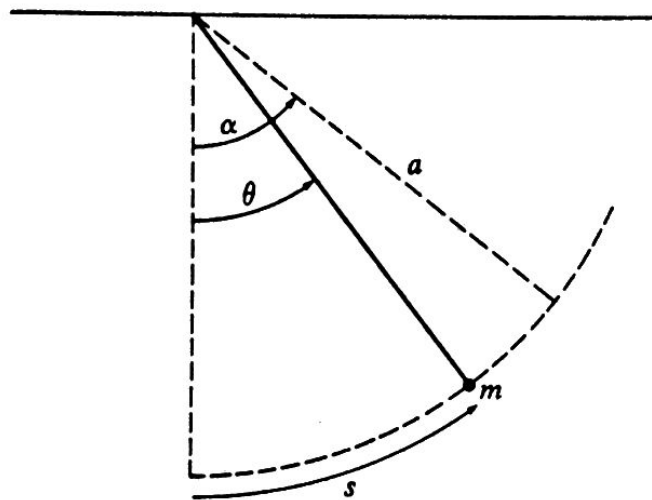



Figura 22.7

Sendo $s = a\theta$ e $v = ds/dt = a\,(d\theta/dt)$ essa equação dá

$$\frac{1}{2}a^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = ga(\cos\theta - \cos\alpha); \tag{10}$$

resolvendo-se para dt e levando em conta o fato de que θ diminui quando t aumenta (para pequenos t), obtemos

$$dt = -\sqrt{\frac{a}{2g}}\,\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha}}.$$

Designando-se por T o período, isto é, o tempo gasto em uma oscilação completa,

$$\frac{T}{4} = -\sqrt{\frac{a}{2g}}\int_{\alpha}^{0}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha}}$$

ou

$$T = 4\sqrt{\frac{a}{2g}}\int_0^{\alpha}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha}}. \tag{11}$$

O valor de T nessa fórmula depende de α. Essa fórmula para o período pode ser expressa, mais satisfatoriamente, como se segue: sendo

$$\cos\theta = 1 - 2\,\text{sen}^2\frac{\theta}{2}$$

e

$$\cos\alpha = 1 - 2\,\text{sen}^2\frac{\alpha}{2},$$

temos

$$T = 2\sqrt{\frac{a}{g}}\int_0^{\alpha}\frac{d\theta}{\sqrt{\text{sen}^2(\alpha/2) - \text{sen}^2(\theta/2)}}$$

$$= 2\sqrt{\frac{a}{g}}\int_0^{\alpha}\frac{d\theta}{\sqrt{k^2 - \text{sen}^2(\theta/2)}}, \qquad k = \text{sen}\,\frac{\alpha}{2}. \tag{12}$$

Mudamos agora a variável θ para ϕ, fazendo $\text{sen}(\theta/2) = k\ \text{sen}\ \phi$, então ϕ cresce de 0 a $\pi/2$ quando θ cresce de 0 a α e

$$\frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta = k\cos\phi\,d\phi$$

ou

$$d\theta = \frac{2k\cos\phi\,d\phi}{\cos(\theta/2)} = \frac{2\sqrt{k^2 - \text{sen}^2(\theta/2)}\,d\phi}{\sqrt{1 - k^2\text{sen}^2\phi}},$$

o que nos permite escrever (12) na forma

$$T = 4\sqrt{\frac{a}{g}}\int_0^{\pi/2}\frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2\text{sen}^2\phi}} = 4\sqrt{\frac{a}{g}}\,F\left(k, \frac{\pi}{2}\right), \tag{13}$$

onde

$$F(k,\phi) = \int_0^{\phi} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \phi}}$$

é uma função de k e de ϕ chamada *integral elíptica de primeiro tipo**. Chega-se à integral elíptica de segundo tipo

$$E(k,\phi) = \int_0^{\phi} \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \phi}\, d\phi,$$

em conexão com o problema de encontrar o perímetro de uma elipse (ver Problema 5). Essas integrais elípticas não podem ser expressas em funções elementares. Uma vez que elas aparecem freqüentemente em aplicações de Engenharia, seus valores como funções numéricas de k e ϕ são, muitas vezes, apresentados em tabelas matemáticas.

A discussão do movimento pendular, até esse ponto, tem focado a equação de primeira ordem (10). Para alguns problemas é mais conveniente tratar com equações de segunda ordem, obtidas diferenciando-se a equação (10) em relação a t:

$$a \frac{d^2\theta}{dt^2} = -g \operatorname{sen} \theta. \tag{14}$$

Se recordarmos que o sen θ é, aproximadamente, igual a θ para pequenos valores de θ, então (14) fica (aproximadamente)

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{a}\theta = 0. \tag{15}$$

Veremos mais tarde que a solução geral da importante equação de segunda ordem

$$\frac{d^2y}{dx^2} + k^2 y = 0$$

é

$$y = c_1 \operatorname{sen} kx + c_2 \cos kx,$$

* É costume, no caso de integrais elípticas, violar o uso ordinário permitindo que a mesma letra apareça como limite superior e como variável simulada de integração.

sendo que (15) leva a

$$\theta = c_1 \operatorname{sen} \sqrt{\frac{g}{a}}\, t + c_2 \cos \sqrt{\frac{g}{a}}\, t. \tag{16}$$

A definição de que $\theta = \alpha$ e $d\theta/dt = 0$ quando $t = 0$ implica que $c_1 = 0$ e $c_2 = \infty$, e que (16) se reduz a

$$\theta = \alpha \cos \sqrt{\frac{g}{a}}\, t. \tag{17}$$

O período dessa solução aproximada de (14) é $2\pi\sqrt{a/g}$. É interessante reparar que este é, precisamente, o valor T obtido a partir de (13) quando $k = 0$, o que é aproximadamente verdade quando o pêndulo oscila em ângulos pequenos.

Problemas

1. Se a resistência do ar atua num corpo de massa m em queda, exercendo uma força de retardamento proporcional ao quadrado da velocidade, então a equação (7) fica

$$\frac{dv}{dt} = g - cv^2,$$

   onde $c = k/m$. Se $v = 0$ quando $t = 0$, calcule v em função de t. Qual a velocidade terminal nesse caso?

2. Um torpedo se desloca à velocidade de 60 milhas por hora no momento em que fica sem combustível. Se a água resiste ao movimento com uma força proporcional à velocidade e se, numa milha, sua velocidade se reduz a 30 milhas/hora, qual distância ele percorrerá?*

3. A força que a gravidade exerce num corpo de massa m à superfície da Terra é mg. No espaço, contudo, a Lei de Gravidade de Newton afirma que essa força varia inversamente proporcional ao quadrado da distância do centro da Terra. Se um projétil lançado da superfície deve se deslocar indefinidamente, mostre que a velocidade inicial deve ser, pelo menos,

---

* No tratamento de problemas dinâmicos por meio de vetores, as palavras rapidez e velocidade são perfeitamente distinguíveis uma da outra. Contudo, nas situações relativamente simples que vimos, é permitido (e vulgar) usá-la mais ou menos com o mesmo sentido.

$\sqrt{2gR}$, onde R é o raio da Terra (cerca de 4.000 milhas). A velocidade de escape será, aproximadamente, de 7 milhas/segundo ou 25.000 milhas/hora. Sugestão: chamando-se x a distância a partir do centro da Terra até o projétil e $v = dx/dt$ a velocidade, então

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}.$$

4. No interior da Terra, a força da gravidade é proporcional à distância a partir do centro. Se um buraco for feito através da Terra de pólo a pólo e uma pedra for jogada no buraco, com que velocidade ela chegará ao centro?

5. Mostre que a circunferência da elipse $x = a \cos\theta$, $y = b \operatorname{sen}\theta$ com $a < b$ é dada por $4bE(e, \pi/2)$, onde e é a excentricidade.

6. Mostre que o tamanho do arco de $y = \operatorname{sen} x$ é $2\sqrt{2}\, E(\sqrt{2}/2, \pi/2)$.

7. Mostre que o comprimento total da lemniscata $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ é $4aF(\sqrt{2}, \pi/4)$.

22.2 EQUAÇÕES DE PRIMEIRA ORDEM

Equações Homogêneas

Geralmente falando, é muito difícil resolver equações diferenciais de primeira ordem. Muitas vezes, a equação aparentemente simples,

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

não pode ser resolvida, pois não existem fórmulas para que sua solução seja obtida em todos os casos. Por outro lado, há certos tipos-padrão de equações de primeira ordem para as quais existem métodos de rotina que permitem encontrar sua solução. Neste capítulo discutiremos brevemente alguns dos tipos que têm uma maior aplicação. Desde que nossa proposta principal é adquirir habilidades técnicas, esqueceremos completamente questões como continuidade, diferenciabilidade, a possível eliminação de divisores etc.

O mais simples dos tipos-padrão é aquele em que as variáveis são separadas

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}.$$

Para resolver essa equação, temos de escrevê-la na forma $h(y)\,dy = g(x)\,dx$ e integrá-la:

$$\int h(y)\,dy = \int g(x)\,dx + c.$$

Vimos muitos exemplos desse tipo de procedimento no capítulo anterior.

Num nível seguinte de complexidade está a *equação homogênea.* A função $f(x, y)$ é chamada homogênea de grau n se

$$f(tx,ty) = t^n f(x,y)$$

para todos os valores permitidos de x, y e t. Assim, $x^2 + xy, \sqrt{x^2 + y^2}$ e sen (x, y) são homogêneas de grau 2, 1 e 0. A equação diferencial

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

é dita homogênea se M e N forem funções homogêneas do mesmo grau. Esta equação pode então ser escrita na forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y), \tag{1}$$

onde $f(x, y) = -M(x, y)/N(x, y)$ é claramente homogênea de grau 0. O procedimento para resolver (1) se baseia em que ela pode ser transformada numa equação com variáveis separáveis pela substituição $z = y/x$. Para verificar, note que a relação

$$f(tx,ty) = t^0 f(x,y) = f(x,y)$$

permite-nos fazer $t = 1/x$ e obter

$$f(x,y) = f(1,y/x) = f(1,z).$$

Então, desde que $y = zx$ e

$$\frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx}, \tag{2}$$

a equação (1) fica

$$z + x\frac{dz}{dx} = f(1,z),$$

e as variáveis podem ser separadas

$$\frac{dz}{f(1,z) - z} = \frac{dx}{x}.$$

Completa-se a solução integrando-se e substituindo-se z por y/x.

Exemplo 1 Resolva $(x + y)\,dx - (x - y)\,dy = 0$.

Começamos por escrever a equação na forma sugerida acima

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y}{x - y}.$$

Desde que a função é homogênea de grau 0, sabemos que pode ser expressa como função de $z = y/x$, o que se obtém dividindo o numerador e o denominador por x:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 + y/x}{1 - y/x} = \frac{1 + z}{1 - z}.$$

A seguir, introduzimos a equação (2) e separamos as variáveis, o que dá:

$$\frac{(1 - z)\,dz}{1 + z^2} = \frac{dx}{x}.$$

Por integração, temos

$$\text{arc tg}^{-1}\, z - \frac{1}{2} \ln(1 + z^2) = \ln x + c;$$

e agora substituindo-se z por y/x, vem

$$\text{arc tg}^{-1}\, \frac{y}{x} = \ln \sqrt{x^2 + y^2} + c,$$

que é a solução procurada

Problemas

1. Verifique quais das seguintes equações são homogêneas e resolva-as:

(a) $(x^2 - 2y^2)\,dx + xy\,dy = 0$;

(b) $x^2y' - 3xy - 2y^2 = 0$;

(c) $x^2y' = 3(x^2 + y^2)\text{ arc tg}^{-1}\dfrac{y}{x} + xy$;

(d) $x \text{ sen}\dfrac{y}{x}\dfrac{dy}{dx} = y \text{ sen}\dfrac{y}{x} + x$;

(e) $xy' = y + 2xe^{-y/x}$.

2. Use coordenadas retangulares para encontrar as trajetórias ortogonais de uma família de todas as circunferências tangentes ao eixo y na origem.

3. Mostre que a substituição $z = ax + by + c$ muda $y' = f(ax + by + c)$ numa equação de variáveis e aplique o método para resolver:

(a) $y' = (x + y)^2$;
(b) $y' = \text{sen}^2(x - y + 1)$.

4. (a) se $ae \neq bd$, mostre que as constantes h e k podem ser escolhidas de tal modo que as substituições $x = z - h$ e $y = w - k$ reduzem

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{ax + by + c}{dx + ey + f}\right)$$

a uma equação homogênea.

(b) se $ae = bd$, descubra a substituição que reduz a equação da parte (a) em uma de variáveis separáveis.

5. Resolva as seguintes equações:

(a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x + y + 4}{x - y - 6}$;

(b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x + y + 4}{x + y - 6}$.

Equações Exatas

Se começarmos com uma família de curvas $f(x, y) = c$, sua equação diferencial pode ser escrita na forma $df = 0$ ou

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0.$$

Por exemplo, a família $x^2y^3 = c$ tem $2xy^3\,dx + 3x^2y^2\,dy = 0$ como sua equação diferencial. Suponhamos que começamos com a equação diferencial

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0. \tag{1}$$

Se existir a função $f(x, y)$ tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = N, \tag{2}$$

então (1) pode ser escrita na forma

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0 \qquad \text{ou} \qquad df = 0,$$

e sua solução geral é

$$f(x,y) = c.$$

Nesse caso, a expressão $Mdx + Ndy$ é chamada *diferencial exata* e (1) é chamada *equação diferencial exata*. É algumas vezes possível determinar exatamente e encontrar a função f por mera inspeção. Assim, os primeiros membros de

$$y\,dx + x\,dy = 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{1}{y}dx - \frac{x}{y^2}dy = 0$$

são reconhecidos como diferenciais de xy e de x/y, respectivamente, de tal modo que as soluções gerais dessas equações são $xy = c$ e $x/y = c$. Contudo, com exceção dos casos mais simples, essa técnica de "solução por observação" não é nada prática. O que precisamos é de um teste de exatidão e de um método para encontrarmos a função f. Desenvolveremos a seguir esse teste e este método.

Suponhamos que (1) seja exata, isto é, que exista uma função f que satisfaça a equação (2). Sabemos, do Cálculo Elementar, que as derivadas parciais de segunda ordem de f são iguais:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}.$$ [1]

Temos portanto

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}, \tag{4}$$

e assim (4) é uma condição necessária para que seja exata*. Provaremos que essa condição é também suficiente, mostrando que (4) nos permite construir uma função f que satisfaça a equação (2). Comecemos por integrar a primeira das equações (2) em relação a x:

$$f = \int M\,dx + g(y). \tag{5}$$

A "constante de integração" aqui é uma função arbitrária de y, já que deve desaparecer com a derivação em relação a x. Isto reduz nosso problema a achar a função $g(y)$, que tinha a propriedade de que f, como dada em (5), satisfaz a segunda das equações em (2). Diferenciando (5) em relação a y e igualando o resultado a N, obtém-se

$$\frac{\partial}{\partial y}\int M\,dx + g'(y) = N,$$

então

$$g'(y) = N - \frac{\partial}{\partial y}\int M\,dx.$$

Assim

$$g(y) = \int\left(N - \frac{\partial}{\partial y}\int M\,dx\right)dy, \tag{6}$$

onde o integrando é função exclusiva de y. Isto será verdade se a derivada do integrando em relação a x for nula; e, desde que a derivada em questão é

---

* O leitor deve ser alertado de que a equação (3) é verdadeira quando ambos os lados existem e são contínuos, e que essas condições são satisfeitas pela maioria das funções que surgem, normalmente, na prática. Nossa hipótese, neste capítulo, é que todas as funções discutidas sejam suficientemente contínuas e diferenciáveis, para garantir a validade das operações realizadas.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(N - \frac{\partial}{\partial y}\int M\,dx\right) = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\int M\,dx$$
$$= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}\int M\,dx$$
$$= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y},$$

um apelo a nossa consideração (4) completa o argumento.

Em resumo, provamos o seguinte: a equação (1) é exata se e somente se $\partial M/\partial y = \partial N/\partial x$; e, nesse caso, sua solução geral é $f(x, y) = c$, onde f é dado por (5) e (6). Dois aspectos merecem ênfase: a equação $f(x, y) = c$, e não somente a função f, que é a solução geral de (1), e o método expresso em (5) e (6), não as fórmulas em si, devem ser apreendidos.

Exemplo 1 Teste se a equação $e^y\,dx + (xe^y + 2y)\,dy = 0$ é exata e resolva-a se o for.

Aqui temos

$$M = e^y \qquad \text{e} \qquad N = xe^y + 2y,$$

então

$$\frac{\partial M}{\partial y} = e^y \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = e^y.$$

Satisfeita a condição (4), a equação é exata, o que nos diz que existe $f(x, y)$ tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^y \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = xe^y + 2y.$$

Integrando a primeira dessas equações em relação a x, têm-se

$$f = \int e^y\,dx + g(y) = xe^y + g(y),$$

então

$$\frac{\partial f}{\partial y} = xe^y + g'(y).$$

Uma vez que a derivada parcial deve ser, também, igual a $xe^y + 2y$, temos $g'(y) = 2y$, então $g(y) = y^2$ e $f = xe^y + y^2$. Tudo isto é para ressaltar que

$$xe^y + y^2 = c$$

é a solução para a equação diferencial dada.

Problemas

Determine quais dentre as seguintes são equações exatas e resolva as que forem :

1. $\left(x + \dfrac{2}{y}\right) dy + y\,dx = 0.$
2. $(\operatorname{sen} x \;\; \operatorname{tg} y + 1)\,dx + \cos x \sec^2 y\,dy = 0.$
3. $(y - x^3)\,dx + (x + y^3)\,dy = 0.$
4. $(2y^2 - 4x + 5)\,dx = (4 - 2y + 4xy)\,dy.$
5. $(y + y\cos xy)\,dx + (x + x\cos xy)\,dy = 0.$
6. $\cos x \cos^2 y\,dx + 2 \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \cos y\,dy = 0.$
7. $(\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y - xe^y)\,dy = (e^y + \cos x \cos y)\,dx.$
8. $-\dfrac{1}{y} \operatorname{sen} \dfrac{x}{y}\,dx + \dfrac{x}{y^2} \operatorname{sen} \dfrac{x}{y}\,dy = 0.$
9. $(1 + y)\,dx + (1 - x)\,dy = 0.$
10. $(2xy^3 + y\cos x)\,dx + (3x^2y^2 + \operatorname{sen} x)\,dy = 0.$
11. $dx = \dfrac{y}{1 - x^2y^2}\,dx + \dfrac{x}{1 - x^2y^2}\,dy.$

Fatores de Integração

O leitor provavelmente notou que as equações diferenciais exatas são comparativamente raras, porque a exatidão depende de um balanço preciso na forma da equação que é facilmente destruído pela menor alteração nessa forma. Sendo este o caso, ele pode duvidar da pertinência da discussão sobre as equações exatas. Nos esforçaremos nesta seção para responder a essas dúvidas.

A equação

$$y\,dx + (x^2y - x)\,dy = 0 \tag{1}$$

é facilmente reconhecida como não-exata, porque $\partial M/\partial y = 1$ e $\partial N/\partial x = 2xy - 1$. Contudo, se a multiplicarmos pelo fator $1/x^2$, a equação fica

$$\frac{y}{x^2}\,dx + \left(y - \frac{1}{x}\right) dy = 0,$$

que é exata. Até que ponto outras equações não-exatas podem tornar-se exatas por esse meio? Em outras palavras, se

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \tag{2}$$

não é exata, sob que condições pode se encontrar uma função $\mu(x, y)$ com a característica de que a equação

$$\mu(M\,dx + N\,dy) = 0$$

seja exata. Qualquer função que atue desse modo é chamada *fator de integração* de (2). Nesse caso, $1/x^2$ é um fator de integração para (1). Provaremos que (2) tem sempre um fator de integração se tiver uma solução geral.

Considere que (2) tem uma solução geral

$$f(x,y) = c,$$

e, eliminando c por diferenciação,

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0. \tag{3}$$

Segue-se, a partir de (2) e (3), que

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M}{N} = -\frac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y},$$

então

$$\frac{\partial f/\partial x}{M} = \frac{\partial f/\partial y}{N}. \tag{4}$$

Se dividirmos (4) por $\mu(x, y)$, então

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \mu M \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \mu N.$$

Multiplicando (2) por μ, vem

$$\mu M\,dx + \mu N\,dy = 0$$

ou

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0,$$

que é exata. Esse argumento mostra que se (2) tiver uma solução geral, então tem, pelo menos, um fator de integração μ. Na realidade, nesse caso (2) tem um número infinito de fatores de integração, porque se $F(f)$ é alguma função de f, então

$$\mu F(f)(M\,dx + N\,dy) = F(f)\,df = d\left[\int F(f)\,df\right],$$

e $\mu F(f)$ é também um fator de integração de (2).

Nossa discussão não considera o problema prático de encontrar o fator de multiplicação. Normalmente isto é bastante difícil. Há uns poucos casos, contudo, para os quais existem procedimentos formais. Para vermos como se usam esses procedimentos, consideremos que μ é o fator de integração de (2)

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}.$$

Se desenvolvermos a equação obteremos

$$\mu\frac{\partial M}{\partial y} + M\frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu\frac{\partial N}{\partial x} + N\frac{\partial \mu}{\partial x}$$

ou

$$\frac{1}{\mu}\left(N\frac{\partial \mu}{\partial x} - M\frac{\partial \mu}{\partial y}\right) = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}. \tag{5}$$

Parece que reduzimos o problema de solução da equação diferencial ordinária (2) ao problema muito mais difícil de resolver a equação diferencial parcial (5). Por outro lado, não temos necessidade da solução geral (5), desde que uma solução particular sirva a nossos objetivos. E, a partir desse ponto de vista, (5) é mais útil do que parece. Suponha, por exemplo, que (2) tem um fator de integração μ, o qual é uma função exclusiva de x. Então $\partial M/\partial x = d\mu/dx$ e $\partial\mu/\partial y = 0$, e (5) pode ser escrito como

$$\frac{1}{\mu}\,\frac{d\mu}{dx} = \frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N}. \tag{6}$$

Desde que o primeiro membro é função só de x, o segundo membro também o é. Se pusermos

$$\frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N} = g(x),$$

então (6) se torna

$$\frac{1}{\mu}\,\frac{d\mu}{dx} = g(x)$$

ou

$$\frac{d(\ln \mu)}{dx} = g(x),$$

então

$$\ln \mu = \int g(x)\, dx$$

e

$$\mu = e^{\int g(x)\, dx}. \tag{7}$$

Esse raciocínio é, obviamente, reversível: se a expressão do segundo membro de (6) for uma função exclusiva de x, então (7) produz uma função μ que depende só de x e satisfaz a equação (5), e é o fator de integração de (2).

Exemplo 1 No caso da equação (1) temos

$$\frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N} = \frac{1 - (2xy - 1)}{x^2 y - x} = \frac{-2(xy - 1)}{x(xy - 1)} = -\frac{2}{x},$$

que é uma função só de x. Assim

$$\mu = e^{\int -(2/x)\, dx} = e^{-2 \ln x} = x^{-2}$$

é um fator de integração de (1), como já vimos.

Razões similares permitem o seguinte procedimento relacionado, que é aplicado quando (2) tem um fator de integração dependente só de y; se a expressão

$$\frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{-M} \tag{8}$$

for função só de y, digamos $h(y)$, então

$$\mu = e^{\int h(y)\, dy} \tag{9}$$

é também uma função só de y, que satisfaz a equação (5) e é, conseqüentemente, um fator de integração de (2).

Há uma outra técnica útil para converter equações simples não-exatas em exatas. Para exemplificar, consideremos, outra vez, a equação (1), rearranjada

$$x^2 y\,dy - (x\,dy - y\,dx) = 0. \tag{10}$$

A quantidade entre parênteses pode recordar ao leitor a fórmula diferencial

$$d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2}, \tag{11}$$

que se obtém dividindo (10) por x^2. Isto transforma a equação (10) em $ydy - d(y/x) = 0$, pelo que a solução geral é, evidentemente,

$$\frac{1}{2}y^2 - \frac{y}{x} = c.$$

Com efeito, encontramos um fator de integração para (1) notando nela a presença da combinação $xdy - ydx$ e usando (11) para explorar essa observação. As seguintes são algumas fórmulas diferenciais que são, muitas vezes, úteis em circunstâncias idênticas.

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}; \tag{12}$$

$$d(xy) = x\,dy + y\,dx; \tag{13}$$

$$d(x^2 + y^2) = 2(x\,dx + y\,dy); \tag{14}$$

$$d\left(\text{arc tg}^{-1}\frac{x}{y}\right) = \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2 + y^2}; \tag{15}$$

$$d\left(\ln\frac{x}{y}\right) = \frac{y\,dx - x\,dy}{xy}. \tag{16}$$

Veremos, a partir dessas fórmulas, que a equação diferencial muito simples $ydx - xdy = 0$ tem $1/x^2$, $1/y^2$, $1/(x^2 + y^2)$ e $1/xy$ como fatores de integração e assim pode ser resolvida por uma variedade de meios.

Exemplo 2 Calcule a forma de um espelho curvo em que a luz a partir de uma fonte na origem refletirá um feixe de raios paralelos ao eixo x. O espelho deverá ter a forma de uma superfície de revolução gerada pela rotação da curva APB (Fig. 22.8) em torno do eixo x. Segue-se pela Lei de Reflexão, $\alpha = \beta$. Pela geometria da situação $\phi = \beta$ e $\theta = \alpha + \phi = 2\beta$.

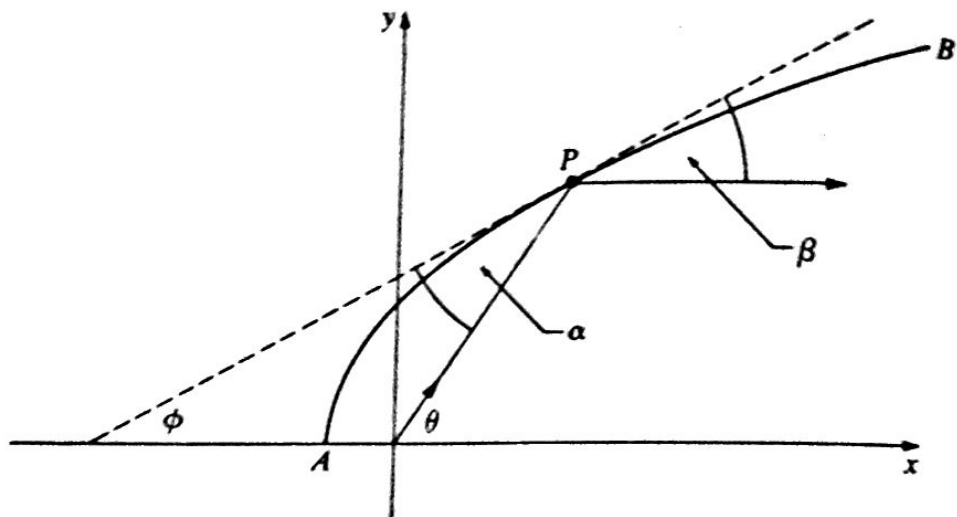



Figura 22.8

Desde que $\operatorname{tg}\theta = y/x$ e

$$\operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg} 2\beta = \frac{2 \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg}^2 \beta},$$

temos que

$$\frac{y}{x} = \frac{2\,dy/dx}{1 - (dy/dx)^2}.$$

Resolvendo essa equação quadrática para dy/dx, teremos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x \pm \sqrt{x^2 + y^2}}{y}$$

ou

$$x\,dx + y\,dy = \pm\sqrt{x^2 + y^2}\,dx.$$

Usando (14) obtemos

$$\pm\frac{d(x^2 + y^2)}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = dx,$$

então

$$\pm\sqrt{x^2 + y^2} = x + c.$$

Na simplificação, chegamos a

$$y^2 = 2cx + c^2,$$

que é a equação da família de todas as parábolas com foco na origem e eixo no eixo x. É, muitas vezes, mostrado em Cálculo Elementar que todas as parábolas têm a chamada *propriedade focal.* A conclusão desse exemplo é que as parábolas são as únicas curvas com essa propriedade.

Problemas

1. Mostre que se $(\partial M/\partial y - \partial N/\partial x)/(Ny - Mx)$ é uma função gz) do produto $z = xy$, então

$$\mu = e^{\int g(z)\,dz}$$

é um fator de integração de (2).

2. Resolva as seguintes equações encontrando o fator de integração:

(a) $(3x^2 - y^2)\,dy - 2xy\,dx = 0$;
(b) $(xy - 1)\,dx + (x^2 - xy)\,dy = 0$;
(c) $x\,dy + y\,dx + 3x^3y^4\,dy = 0$.

3. Sob que circunstâncias poderá a equação (2) ter um fator de integração que seja função da soma $z = x + y$?

4. Resolva cada uma das seguintes equações:

(a) $x\,dy - y\,dx = (1 + y^2)\,dy$;
(b) $y\,dx - x\,dy = xy^3\,dy$;
(c) $x\,dy = (x^5 + x^3y^2 + y)\,dx$;
(d) $(y + x)\,dy = (y - x)\,dx$;
(e) $x\,dy = (y + x^2 + 9y^2)\,dx$.

Equações Lineares

O tipo mais importante de equação diferencial é o *linear*, no qual a derivada de mais alta ordem é uma função linear das derivadas de ordem mais baixa. Então, a equação linear geral de primeira ordem é

$$\frac{dy}{dx} = p(x)y + q(x),$$

e a equação linear geral de segunda ordem é

$$\frac{d^2y}{dx^2} = p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y + r(x)$$

etc. É compreensível que os coeficientes no membro à direita, nomeadamente $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$, etc., são funções só de x.

Estudaremos a equação linear de primeira ordem, a qual se escreve na forma

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x). \tag{1}$$

O método de resolução mais simples depende da observação de que

$$\frac{d}{dx}(e^{\int P\,dx}y) = e^{\int P\,dx}\frac{dy}{dx} + yPe^{\int P\,dx} = e^{\int P\,dx}\left(\frac{dy}{dx} + Py\right). \tag{2}$$

Desse modo, se multiplicarmos (1) por $e^{\int P dx}$, teremos

$$\frac{d}{dx}(e^{\int P\,dx}y) = Qe^{\int P\,dx}. \tag{3}$$

A integração levará a

$$e^{\int P\,dx}y = \int Qe^{\int P\,dx}\,dx + c,$$

e então

$$y = e^{-\int P\,dx}\left(\int Qe^{\int P\,dx}\,dx + c\right) \tag{4}$$

é a solução geral de (1).

Exemplo 1 Resolva $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{1}{x}y = 3x.$

Essa equação é obviamente linear com $P = 1/x$, pelo que

$$\int P\,dx = \int \frac{1}{x}dx = \ln x \qquad \text{e} \qquad e^{\int P\,dx} = e^{\ln x} = x.$$

Multiplicando por x e lembrando (3), obtemos

$$\frac{d}{dx}(xy) = 3x^2,$$

então

$$xy = x^3 + c \qquad \text{ou} \qquad y = x^2 + cx^{-1}.$$

Como o método desse exemplo indica, o leitor não deverá se esforçar em aprender a complicada fórmula (4) para aplicá-la mecanicamente na solução de equações lineares. Em vez disso, é muito melhor lembrar e usar o procedimento a partir do qual (4) foi obtida: multiplicar por $e^{\int Pdx}$ e integrar.

Um resumo do que foi discutido acima é que tudo se baseia no fato estabelecido em (2). Em outras palavras, o fator de integração $e^{\int Pdx}$ parece ter sido tirado misteriosamente do ar. No Problema 1, a seguir, pediremos ao leitor para descobrir esse fato por si próprio pelos métodos apresentados em "Fatores de Integração".

Problemas

1. Escreva a equação (1) na forma $Mdx + Ndy = 0$ e use as idéias de "Fatores de Integração" para mostrar que essa equação tem um fator de integração μ que é função só de x. Encontre μ e obtenha (4) pela resolução de $\mu Mdx + \mu Ndy = 0$ como equação exata.

2. Resolva as seguintes equações lineares:

   (a) $x\dfrac{dy}{dx} - 3y = x^4$;

   (b) $y' + y = \dfrac{1}{1 + e^{2x}}$;

   (c) $(1 + x^2)\,dy + 2xy\,dx = \text{cotg}\,x\,dx$;

   (d) $y' + y = 2xe^{-x} + x^2$;

   (e) $y' + y\ \text{cotg}\ x = 2x\ \text{cosec}\,x$;

   (f) $(2y - x^3)\,dx = x\,dy$.

3. A equação $\frac{dy}{dx} + p(x)y = Q(x)y^n$, conhecida como *equação de Bernoulli* é linear quando $n = 0$ ou 1. Mostre que pode ser reduzida a uma equação linear para qualquer valor de n pela mudança de variável $z = y^{1-n}$ e aplique esse método para resolver as seguintes equações:

   (a) $xy' + y = x^4y^3$;
   (b) $xy^2y' + y^3 = x \cos x$.

4. A notação usual dy/dx implica que x é a variável independente e y, a dependente. Tentando resolver uma equação diferencial é, muitas vezes, útil substituir x por y e y por x e trabalhar com a equação resultante. Aplique esse método às equações seguintes:

   (a) $(e^y - 2xy)y' = y^2$;
   (b) $y - xy' = y'y^2e^y$.

5. Ache as trajetórias ortogonais da família $y = x + ce^{-x}$.

6. Conhecemos, a partir de (4), que a solução geral de uma equação linear de primeira ordem é uma família de curvas na forma $y = cf(x) + g(x)$. Mostre, inversamente, que a equação diferencial de tal família é linear.

Redução de Ordem

Como vimos, a equação diferencial geral de segunda ordem tem a forma

$$F(x,y,y',y'') = 0.$$

Nesta seção consideraremos dois tipos de equações de segunda ordem, que podem ser resolvidas pelo primeiro método.

Variável dependente ausente Se y não estiver explicitamente presente, nossa equação pode ser escrita

$$f(x,y',y'') = 0. \tag{1}$$

Nesse caso, introduzimos uma variável p fazendo

$$y' = p \qquad \text{e} \qquad y'' = \frac{dp}{dx}. \tag{2}$$

Essa substituição transforma (1) numa equação de primeira ordem

$$f\left(x, p, \frac{dp}{dx}\right) = 0. \tag{3}$$

Se pudermos encontrar a solução para (3), substituímos p nessa solução por dy/dx e tentamos obter o resultado final. Esse procedimento reduz o problema de resolver a equação (1) de segunda ordem num problema de resolver sucessivamente duas equações de primeira ordem.

Exemplo 1 Resolva $xy'' - y' = 3x^2$.

A variável y está ausente, então (2) reduz a equação a

$$x\frac{dp}{dx} - p = 3x^2$$

ou

$$\frac{dp}{dx} - \frac{1}{x}p = 3x,$$

que é linear. Resolvendo pelo método apresentado em "Equações Lineares", (p. 602), obtemos

$$p = \frac{dy}{dx} = 3x^2 + c_1x,$$

então

$$y = x^3 + \frac{1}{2}c_1x^2 + c_2,$$

que é a solução desejada.

Variável independente ausente Se x não estiver explicitamente presente, nossa equação de segunda ordem pode ser escrita na forma

$$g(y, y', y'') = 0. \tag{4}$$

Aqui introduzimos nossa nova variável dependente p do mesmo modo, mas, desta vez, expressamos y'' em termos da derivada em relação a y.

$$y' = p \qquad \text{e} \qquad y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}, \tag{5}$$

o que nos permite escrever (4) na forma

$$g\left(y, p, p\frac{dp}{dy}\right) = 0; \tag{6}$$

e, a partir desse ponto, procede-se como acima, resolvendo sucessivamente as duas equações de primeira ordem.

Exemplo 2 Resolva $y'' + k^2 y = 0$.

Com a ajuda de (5), podemos escrever

$$p\frac{dp}{dy} + k^2 y = 0 \qquad \text{ou} \qquad p\,dp + k^2 y\,dy = 0.$$

A integração conduz a

$$p^2 + k^2 y^2 = k^2 a^2,$$

então

$$p = \frac{dy}{dx} = \pm k\sqrt{a^2 - y^2}$$

ou

$$\frac{dy}{\sqrt{a^2 - y^2}} = \pm k\,dx.$$

Uma segunda integração dá

$$\operatorname{sen}^{-1}\frac{y}{a} = \pm kx + b,$$

então

$$y = a \operatorname{sen}(\pm kx + b) \qquad \text{ou} \qquad y = A \operatorname{sen}(kx + B).$$

A solução geral pode também ser escrita como

$$y = c_1 \operatorname{sen} kx + c_2 \cos kx, \tag{7}$$

pela expansão de sen $(kx + B)$ e mudando a forma das constantes.

A equação resolvida no Exemplo 2 ocorre muitas vezes em diversas aplicações. É linear e sua solução (7) será introduzida na Teoria Geral das Equações Lineares de Segunda Ordem.

Problemas

1. Resolva as seguintes equações:

   (a) $yy'' + (y')^2 = 0$;
   (b) $xy'' = y' + (y')^3$;
   (c) $y'' - k^2 y = 0$;
   (d) $x^2 y'' = 2xy' + (y')^2$.

2. Encontre a solução particular para cada uma das seguintes equações:

   (a) $(x^2 + 2y')y'' + 2xy' = 0$, $y = 1$ e $y' = 0$ quando $x = 0$;
   (b) $yy'' = y^2 y' + (y')^2$, $y = -\frac{1}{2}$ e $y' = 1$ quando $x = 0$.

3. Resolva $y'' = 1 + (y')^2$ por ambos os métodos desta seção e confira os resultados.

4. Considere um fio dobrado na forma de um ciclóide cujas equações paramétricas são $x = a(\theta - \operatorname{sen} \theta)$ e $y = a(1 - \cos \theta)$ e inverta-o como na Fig. 22.10. Se uma conta for largada no fio e deslizar sem fricção e sob a influência da gravidade apenas, mostre que a velocidade v satisfaz a equação

   $$4av^2 = g(s_0{}^2 - s^2),$$

   onde s_0 e s são os comprimentos do arco a partir do ponto mais baixo da posição inicial e da sua posição um tempo mais tarde, respectivamente. Pela diferenciação obtém-se a equação

   $$\frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{g}{4a} s = 0,$$

   e, a partir disto, ache s como função de t e determine o período do movimento. Esse resultado estabelece a propriedade tautócrona da ciclóide.

Cadeia Inclinada. Curvas Procuradas

Discutiremos agora diversas aplicações que chegam a equações diferenciais que são resolvidas pelos métodos estudados neste capítulo.

Exemplo 1 Descubra a forma assumida por uma cadeia flexível suspensa entre dois pontos e encurvada por seu próprio peso.

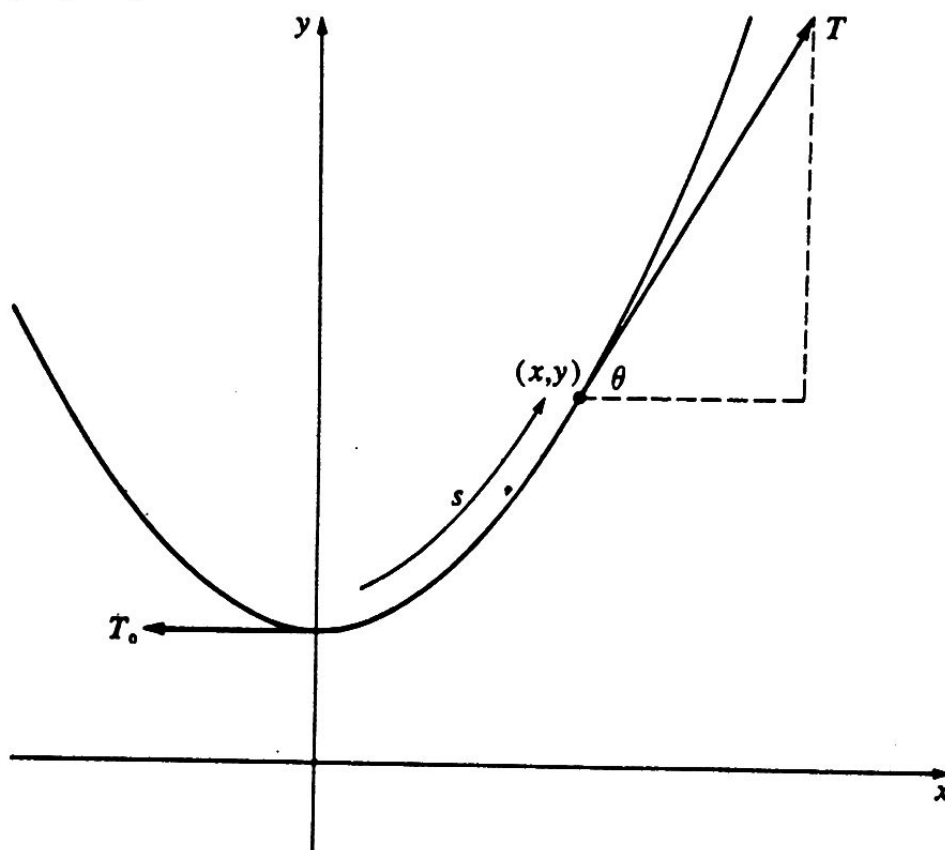



Figura 22.9

Faça o eixo y passar pelo ponto mais baixo da cadeia (Fig. 22.9); seja s o comprimento do arco entre esse ponto e um ponto variável (x, y) e seja $W(s)$ a densidade linear da cadeia. Obtemos a equação da curva a partir do fato de que a porção da cadeia entre o ponto mais baixo e (x, y) está em equilíbrio sob a ação de três forças: a tensão horizontal T_0 no ponto mais baixo; a tensão variável T em (x, y), que atua ao longo da tangente por causa da flexibilidade da cadeia; e a força vertical para baixo, igual ao peso da cadeia entre os dois pontos. Igualando as componentes horizontais de T_0 e de T e a componente vertical de T com o peso da cadeia, obtemos

$$T \cos \theta = T_0 \qquad \text{e} \qquad T \operatorname{sen} \theta = \int_0^s w(s)\, ds.$$

Segue-se, a partir da primeira dessas equações, que

$$T \operatorname{sen} \theta = T_0 \ \operatorname{tg} \ \theta = T_0 \frac{dy}{dx},$$

assim

$$T_0 y' = \int_0^s w(s)\,ds.$$

Eliminamos a integral diferenciando em relação a x:

$$\begin{aligned} T_0 y'' &= \frac{d}{dx}\int_0^s w(s)\,ds = \frac{d}{ds}\int_0^s w(s)\,ds\,\frac{ds}{dx} \\ &= w(s)\sqrt{1+(y')^2}. \end{aligned}$$

Desse modo

$$T_0 y'' = w(s)\sqrt{1+(y')^2} \tag{1}$$

é a equação diferencial da curva desejada, e a curva em si é achada pela resolução da equação. Para prosseguir, necessitamos ter informações concretas sobre a função $w(s)$. Resolveremos (1) para o caso em que $w(s)$ é constante, de modo que

$$y'' = a\sqrt{1+(y')^2}, \qquad a = \frac{w_0}{T_0}. \tag{2}$$

Substituindo $y' = p$ e $y'' = dp/dx$, a equação reduz-se a

$$\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = a\,dx. \tag{3}$$

Agora integra-se (3) e usa-se o fato de que $p = 0$ quando $x = 0$ para obter

$$\ln\left(p + \sqrt{1+p^2}\right) = ax.$$

Resolvendo em p chega-se a

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(e^{ax} - e^{-ax}).$$

Se colocarmos o eixo x na altura apropriada, de modo que $y = 1/a$ quando $x = 0$, obteremos

$$y = \frac{1}{2a}(e^{ax} + e^{-ax}) = \frac{1}{a}\cosh ax$$

como equação da curva feita por uma cadeia flexível sob a ação de seu próprio peso. Essa curva é chamada *catenária*. As catenárias também surgem em outros problemas interessantes. Por exemplo, pode-se demonstrar que, se um arco unindo dois pontos dados acima do eixo x for rodado em torno desse eixo, a área da superfície de revolução resultante será a menor quando o arco for parte de uma catenária.

Exemplo 2 Um ponto P move-se ao longo de um plano xy levado por um fio PT de comprimento a. Se T começar na origem e se mover ao longo do eixo positivo y, e se P começar em $(a, 0)$, qual é a trajetória de P? Essa curva é chamada *tractrix* (do latim "tractum", significando arrasto. É fácil de ver (Fig. 22.10) que a equação diferencial da trajetória é

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}.$$

Separando as variáveis e integrando e usando o fato de que $y = 0$ quando $x = a$, temos que

$$y = a \ln\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x}\right) - \sqrt{a^2 - x^2}$$

é a equação da tractrix. Essa curva é de considerável importância porque a superfície obtida pela sua revolução em torno do eixo y é um modelo para a versão de Lobachevski da geometria não-euclidiana.

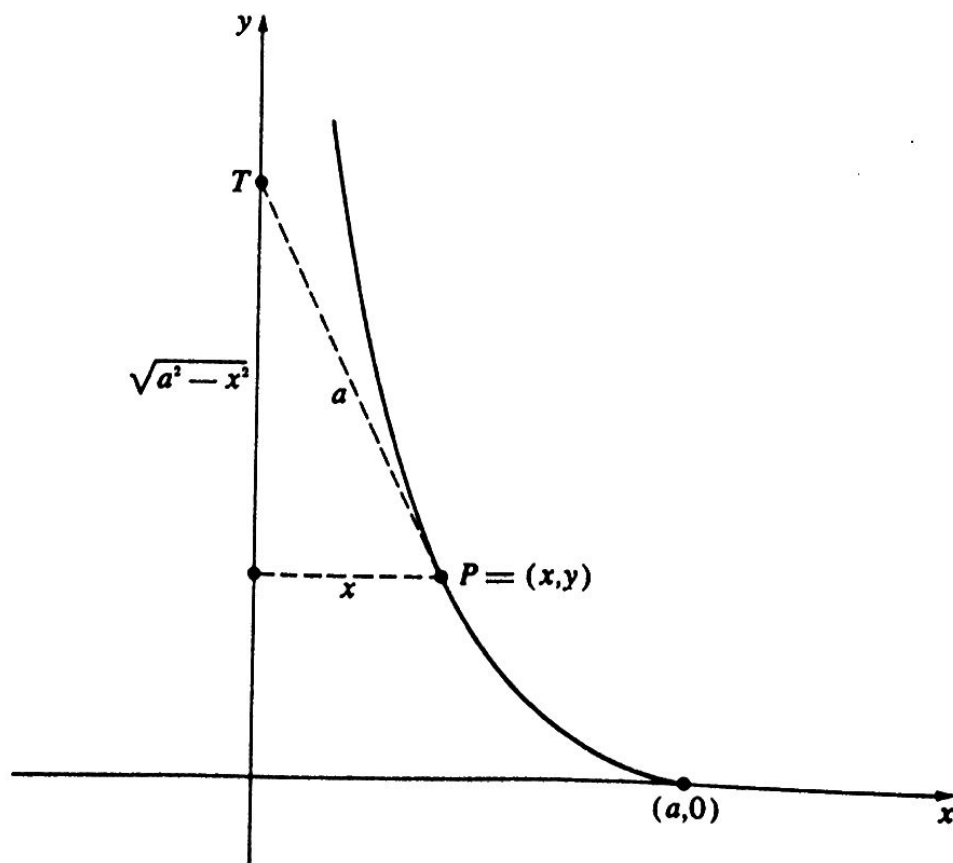



Figura 22.10

Exemplo 3 Um coelho corre a partir da origem no eixo y com velocidade a. Ao mesmo tempo, um cão, com velocidade b, parte do ponto $(c, 0)$ e persegue o coelho. Qual a trajetória do cão? No tempo t, medido a partir do instante em que ambos começaram a correr, o coelho estará no ponto $R = (0, at)$ e o cão no ponto $D = (x, y)$ (Fig. 22.11).

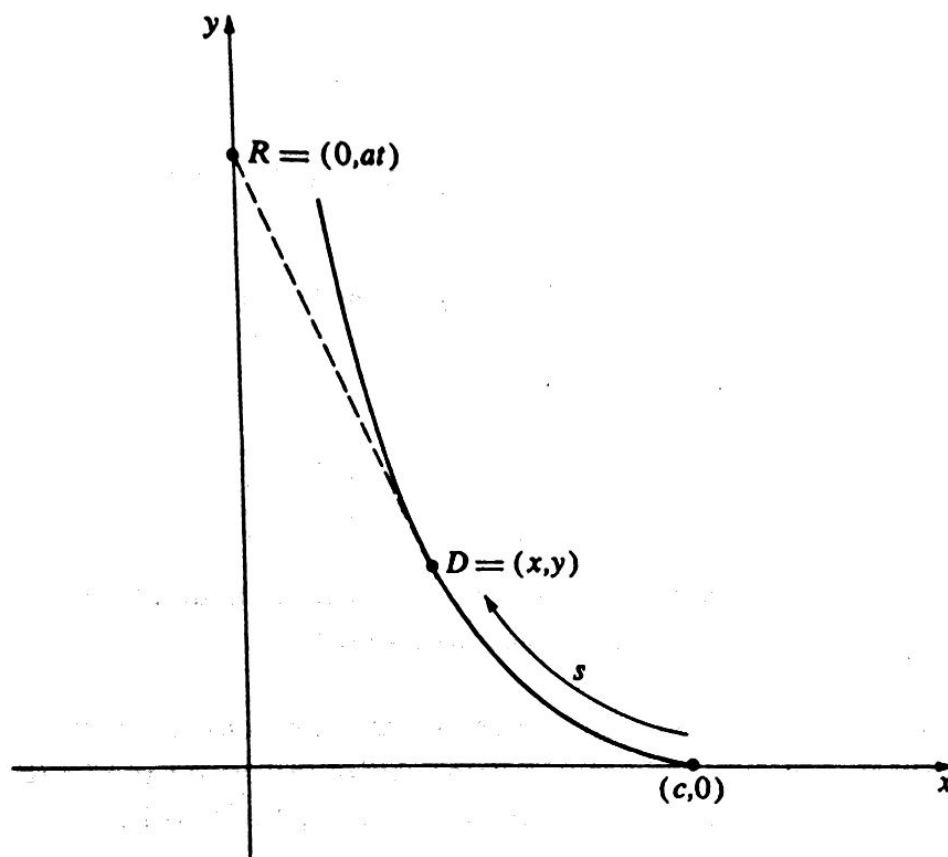



Figura 22.11

Desde que a linha DR é tangente à trajetória, temos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - at}{x} \qquad \text{ou} \qquad xy' - y = -at. \tag{4}$$

Para eliminar t, começaremos por diferenciar (4) em relação a x, o que dá

$$xy'' = -a\frac{dt}{dx}. \tag{5}$$

Sendo $ds/dt = b$, temos

$$\frac{dt}{dx} = \frac{dt}{ds}\frac{ds}{dx} = -\frac{1}{b}\sqrt{1 + (y')^2}, \tag{6}$$

onde o sinal de menos aparece porque s cresce enquanto x decresce. Combinando-se (5) e (6), obtemos a equação diferencial da trajetória:

$$xy'' = k\sqrt{1 + (y')^2}, \qquad k = \frac{a}{b}. \tag{7}$$

A substituição em $y' = p$ e $y'' = dp/dx$ reduz (7) a

$$\frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}} = k\frac{dx}{x};$$

integrando-se e usando-se a condição inicial $p = 0$ quando $x = 0$, temos que

$$\ln\left(p + \sqrt{1 + p^2}\right) = \ln\left(\frac{x}{c}\right)^k$$

pode ser resolvido para p, o que leva a

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{x}{c}\right)^k - \left(\frac{c}{x}\right)^k\right].$$

Para continuar e encontrar y como função de x, precisamos de maior informação sobre k. Sugerimos ao leitor que explore essa possibilidade no Problema 8.

Exemplo 4 O eixo y e a linha $x = c$ são as margens de um rio cuja corrente tem uma velocidade uniforme a no sentido dos y negativos. Um barco entra no rio no ponto $(c, 0)$ e dirige-se em direção à origem com velocidade b relativa à água. Qual a trajetória do barco?

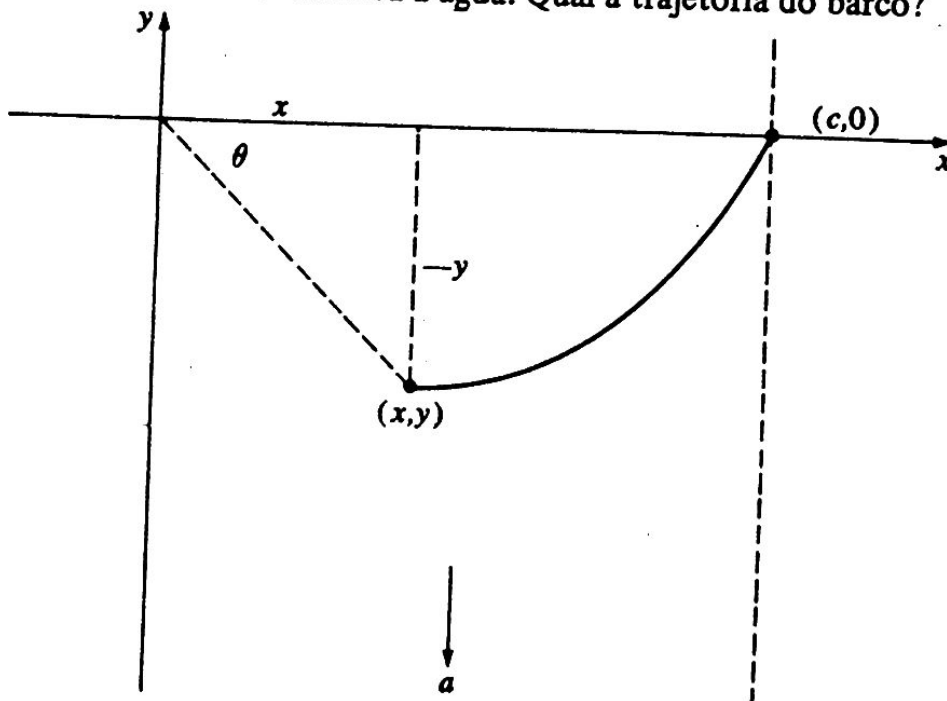



Figura 22.12

As componentes da velocidade do barco (Fig. 22.12) são

$$\frac{dx}{dt} = -b\cos\theta \qquad \text{e} \qquad \frac{dy}{dt} = -a + b\,\text{sen}\,\theta,$$

então

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-a + b\,\text{sen}\,\theta}{-b\cos\theta} = \frac{-a + b(-y/\sqrt{x^2+y^2})}{-b(x/\sqrt{x^2+y^2})}$$
$$= \frac{a\sqrt{x^2+y^2} + by}{bx}.$$

Essa equação é homogênea e sua solução, encontrada pelo método apresentado em "Equações Homogêneas" (p. 588), é

$$c^k(y + \sqrt{x^2+y^2}) = x^{k+1},$$

onde $k = a/b$. É claro que o destino do barco depende da relação entre a e b. No Problema 9 pediremos ao leitor para descobrir sob que condições o barco chega à margem.

Problemas

1. No Exemplo 1, mostre que a tensão T num ponto arbitrário (x, y) da cadeia é dada por $w_0 y$.

2. Se a cadeia do Exemplo 1 suporta uma carga de densidade horizontal $L(x)$, que equação diferencial poderá ser usada em vez de (1)?

3. Qual a forma assumida por um cabo de densidade desprezível ($w(s) = 0$) que suporta uma ponte de densidade horizontal constante dada por $L(x) = L_0$?

4. Se o comprimento de uma pequena parte de um cabo elástico de densidade uniforme for proporcional à tensão nessa parte, mostre que ele assume a forma de uma parábola quando submetido a seu próprio peso.

5. Uma cortina é feita fixando-se finas varetas a uma corda de densidade desprezível. Se as varetas estiverem todas juntas e igualmente separadas horizontalmente e se a base da cortina é preparada para ser horizontal, qual a forma da corda?

6. Que curva situada acima do eixo x tem a propriedade de que o comprimento do arco unindo dois de seus pontos é proporcional à área sob o arco?

7. Mostre que a tractrix do Exemplo 2 é ortogonal à família de circunferências com raio a e centro no eixo y.

8. (a) No Exemplo 3 considere que $a < b$ (ou seja, $k < 1$) e calcule y como função de x. Qual a distância percorrida pelo coelho antes que o cão o agarre?

   (b) Considere $a = b$ e calcule y como função de x. A que distância o cão se aproxima do coelho?

9. No Exemplo 4 resolva a equação da trajetória de y e determine as condições de a e b que permitirão ao barco chegar à margem oposta. Onde ele atracará?

Circuitos Elétricos Simples

Consideraremos aqui equações diferenciais lineares que governam o fluxo de eletricidade no circuito simples, mostrado na Fig. 22.13.

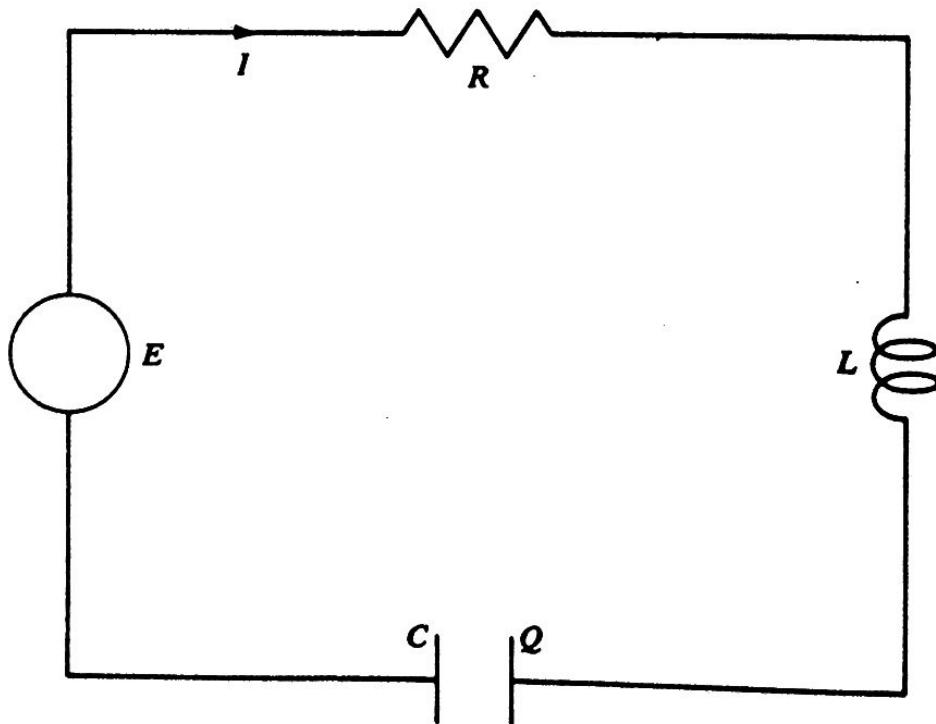



Figura 22.13

Esse circuito consiste em quatro elementos cuja ação pode ser entendida facilmente, sem nenhum conhecimento especial de eletricidade.

(a) A fonte de força eletromotriz (fem) E bateria ou gerador que contém carga elétrica e produz uma corrente I.

(b) Uma resistência R que se opõe à passagem da corrente, produzindo uma queda na amplitude da fem

$$E_R = RI.$$

Essa equação é a *Lei de Ohm**.

(c) Uma bobina de indutância L que se opõe a alguma mudança na corrente, produzindo uma queda na amplitude da fem

$$E_L = L\frac{dI}{dt}.$$

(d) Um condensador de capacidade C que armazena a carga Q. A carga acumulada pelo condensador resiste ao influxo da carga adicional, e a queda da fem que isto acarreta é

$$E_C = \frac{1}{C}Q.$$

Sendo a corrente a taxa do fluxo de carga e, conseqüentemente, a taxa com que a carga é acumulada no condensador, temos

$$I = \frac{dQ}{dt}.$$

Esses elementos do circuito atuam em conjunto de acordo com as Leis de Kirchhoff, que estabelece que a soma algébrica das quedas das fem no circuito fechado é nula**. Isto leva a

$$E - E_R - E_L - E_C = 0$$

---

* George Simon Ohm (1787-1854) foi um físico alemão cuja contribuição significativa para a Ciência foi a descoberta da lei enunciada acima. Quando ele o fez, em 1827, pareceu boa demais para ser verdadeira e ele não foi acreditado. Desconsiderado por isto, Ohm foi tão maltratado que desistiu da docência em Colônia e viveu por vários anos na obscuridade e pobreza, antes de que se reconhecesse que estava certo. Um dos seus alunos em Colônia foi Peter Dirichlet, que se tornou um dos mais eminentes matemáticos do século XIX.

** Gustav Robert Kirchhoff (1824-1887), também alemão, foi outro cientista cujo trabalho em circuitos elétricos é familiar a todos os estudantes de Física Elementar. Estabeleceu os princípios da análise espectral e mostrou o caminho para a aplicação do espectroscópio na determinação da constituição química das estrelas.

ou

$$E - RI - L\frac{dI}{dt} - \frac{1}{C}Q = 0,$$

que reescrevemos:

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C}Q = E. \tag{1}$$

Dependendo das circunstâncias, I ou Q podem ser as variáveis dependentes. No primeiro caso, eliminamos Q diferenciando (1) em relação a t e substituindo dQ/dt por I

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = \frac{dE}{dt}. \tag{2}$$

No segundo caso, simplesmente substituímos I por dQ/dt

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = E. \tag{3}$$

Mais tarde, consideraremos essas equações lineares de segunda ordem com maior detalhe. Agora, nosso interesse é na equação de primeira ordem

$$L\frac{dI}{dt} + RI = E, \tag{4}$$

obtida a partir de (4) quando não houver condensador no circuito.

Exemplo 1 Resolva a equação (4) para o caso em que uma corrente inicial I_0 está fluindo e uma fem constante E_0 existe no circuito no instante $t = 0$. Para $t > 0$, a equação e

$$L\frac{dI}{dt} + RI = E_0.$$

As variáveis podem ser separadas levando a

$$\frac{dI}{E_0 - RI} = \frac{1}{L}dt.$$

Integrando-se e usando-se a condição inicial $I = I_0$ quando $t = 0$, obtemos

$$\ln(E_0 - RI) = -\frac{R}{L}t + \ln(E_0 - RI_0),$$

donde

$$I = \frac{E_0}{R} + \left(I_0 - \frac{E_0}{R}\right)e^{-Rt/L}.$$

Repare que a corrente I consiste em uma parte estável E_0/R e uma parte variável $(I_0 - E_0/R)\,e^{-Rt/L}$, que se aproxima de zero quando t cresce. Conseqüentemente, a Lei de Ohm $E_0 = RI$ é muito próxima da verdade para t muito grande. Observe, também, que se $I_0 = 0$, então

$$I = \frac{E_0}{R}(1 - e^{-Rt/L}),$$

e se $E_0 = 0$, então $I = I_0e^{-Rt/L}$.

Problemas

1. Resolva a equação (4) para o caso em que o circuito tem uma corrente inicial I_0 e a fem para $t = 0$ é dada por:

   a. $E = E_0e^{-kt}$; b. $E = E_0 \operatorname{sen} \omega t$.

2. Considere o circuito descrito pela equação (4) e mostre que:
   (a) a Lei de Ohm é satisfeita quando a corrente está no máximo ou no mínimo;
   (b) que fem cresce quando a corrente é mínima e decresce quando é máxima.

22.3 EQUAÇÕES LINEARES DE SEGUNDA ORDEM

Introdução

Nas seções anteriores estudamos alguns tipos restritos de equações diferenciais que podiam ser resolvidas em termos de funções elementares já familiares. Os métodos desenvolvidos requerem considerável experiência com as técnicas de integração. Infelizmente, contudo, deve-se admitir que essa parte da matéria tende a ser uma miscelânea de truques e transmite pouco da natureza geral das equações diferenciais e de suas soluções.

Discutiremos agora uma classe importante de equações que possui uma teoria rica e bastante desenvolvida. Veremos que essa teoria pode ser estudada como uma estrutura coerente, baseada em alguns poucos princípios simples.

A equação diferencial linear de segunda ordem é:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = R(x),$$

ou, mais simplesmente,

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x). \tag{1}$$

Como a notação indica, $P(x)$, $Q(x)$ e $R(x)$ são funções apenas de x ou então constantes. É claro que não há perda de generalidade em se considerar que o coeficiente de y'' é 1, porque isto sempre pode ser obtido por divisão. Equações desse tipo têm grande aplicação na Física, especialmente na mecânica das vibrações e na teoria dos circuitos elétricos. Além disso muitas das idéias mais profundas da Matemática nasceram do estudo dessas equações.

Não nos devemos enganar com o fato de que as equações lineares de primeira ordem são facilmente solucionáveis por meio de fórmulas. Em geral, (1) não pode ser resolvida explicitamente em termos de funções elementares conhecidas ou mesmo por meio de integrações. Para encontrar as soluções geralmente é necessário recorrer a infinitos processos de um tipo ou outro, usualmente, séries infinitas. Muitas equações especiais, com particular importância em certas aplicações, como as de Legendre e de Bessel, já referidas, têm sido bastante estudadas; e a teoria de uma única de tais equações é, por vezes, tão complicada que constitui, por si só, todo um ramo da análise.

Aqui estudaremos apenas os métodos para resolver (1) quando $P(x)$ e $Q(x)$ são constantes. Deve-se enfatizar que muitas das idéias e procedimentos que discutiremos podem ser generalizados a equações lineares de ordem superior, sem mudança dos princípios básicos e só com uma crescente complexidade nos detalhes. Limitando-nos às equações de segunda ordem, obteremos a maior simplicidade possível sem distorcer as idéias principais e, ainda, com bastante generalidade para incluir a maioria das equações de maior interesse na Física e na Matemática.

Desde que, em geral, não é possível obter uma solução explícita para (1) por inspeção, nosso primeiro trabalho é assegurarmo-nos de que essa equação tem realmente solução.

O teorema seguinte é enunciado sem demonstração.

Teorema A Sejam $P(x)$, $Q(x)$ e $R(x)$ funções contínuas num intervalo fechado $[a, b]$*. Se x_0 é algum ponto em $[a, b]$ e se y_0 e y_0' são números quaisquer, então a equação (1) tem uma e somente uma solução $y(x)$ no intervalo, tal que $y(x_0) = y_0$ e $y'(x_0) = y_0'$.

---

* Se a e b são números reais tais que $a < b$, então o símbolo $[a, b]$ representa um intervalo que contém todos os números reais x que satisfazem $a \leq x \leq b$. Esse intervalo é chamado fechado porque contém seus limites.

Assim, dentro dessas hipóteses, para algum ponto x_0 em $[a, b]$, podem ser arbitrariamente definidos valores para $y(x)$ e $y'(x)$ e, então, existirá uma solução para (1) em $[a, b]$, que assume os valores definidos no ponto dado; ou, mais geometricamente, (1) tem uma única solução em $[a, b]$, que passa pelo ponto especificado (x_0, y_0) com um declive y_0. Ao longo da discussão nesta seção, consideraremos que as hipóteses do Teorema A são sempre satisfeitas.

O termo $R(x)$ na equação (1) está isolado dos outros e escrito à direita, porque ele não contém a variável dependente y ou qualquer de suas derivadas. Se $R(x)$ for zero, então (1) reduz-se a uma equação homogênea

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0. \tag{2}$$

(Esse uso tradicional da palavra homogêneo não pode ser confundido com o igualmente tradicional, mas bastante diferente, uso dado em "Observações Gerais sobre as Soluções" (p. 564). Se $R(x)$ não for zero, então (1) é dita não-homogênea. Para estudar a equação não-homogênea (1) é preciso considerar a equação homogênea (2), obtida a partir de (1), substituindo-se $R(x)$ por zero. A razão disto pode, facilmente, ser entendida. Suponhamos que, de algum modo, sabemos que $Y_g(x, c_1, c_2)$ é a solução geral de (2) – espera-se que contenha duas constantes arbitrárias, pois é de segunda ordem – e que $y_p(x)$ é uma solução particular de (1). Se $y(x)$ é uma solução qualquer de (1), então é fácil constatar que $y(x) - y_p(x)$ é solução de (2)

$$\begin{aligned}(y - y_p)'' + P(x)(y - y_p)' + Q(x)(y - y_p)\\ = [y'' + P(x)y' + Q(x)y] - [y_p'' + P(x)y_p' + Q(x)y_p]\\ = R(x) - R(x) = 0.\end{aligned} \tag{3}$$

Sendo $y_g(x, c_1, c_2)$ a solução geral de (2), segue-se que $y(x) - y_p(x) = y_g(x,c_1,c_2)$ ou

$$y(x) = y_g(x,c_1,c_2) + y_p(x)$$

para uma escolha adequada das constantes c_1 e c_2. Isto prova o seguinte teorema:

Teorema B Se y_g é a solução geral da equação (2) e y_p é uma solução particular da equação (1), então $y_g + y_p$ é a solução geral de (1).

Mostraremos mais adiante que, se y_g é conhecida, então existe um procedimento formal para calcular y_p. Isto mostra que o problema central da teoria das equações lineares é o de resolver a equação homogênea. Desse modo, nossa maior atenção será dada ao estudo da estrutura de y_g e à investigação dos vários meios de determinar sua forma explícita – nenhum dos quais é efetivo para todos os casos.

A primeira coisa que deveremos reparar na equação homogênea (2) é que a função $y(x)$, para a qual $y(x) = 0$ para todo o x, é sempre uma solução. Esta é a chamada *solução trivial* e não tem grande interesse. O fato básico sobre as soluções de (2) é dado pelo seguinte teorema:

Teorema C Se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são duas soluções de (2), então

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \tag{4}$$

é também uma solução para quaisquer constantes c_1 e c_2.

Prova. A afirmação deriva do fato de que

$$\begin{aligned}
(c_1y_1 + c_2y_2)'' &+ P(x)(c_1y_1 + c_2y_2)' + Q(x)(c_1y_1 + c_2y_2) \\
&= (c_1y_1'' + c_2y_2'') + P(x)(c_1y_1' + c_2y_2') + Q(x)(c_1y_1 + c_2y_2) \\
&= c_1[y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1] + c_2[y_2'' + P(x)y_2' + Q(x)y_2] \\
&= c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 = 0,
\end{aligned} \tag{5}$$

onde os coeficientes c_1 e c_2 são zero porque, por definição, y_1 e y_2 são soluções de (2).

Por razões da Álgebra Vetorial Elementar, a solução (4) é chamada vulgarmente *combinação linear* das soluções $y_1(x)$ e $y_2(x)$. Se usarmos essa terminologia, o teorema pode ser modificado como se segue: qualquer combinação linear de duas soluções de uma equação homogênea é também solução.

Suponha que tenhamos encontrado duas soluções para a equação (2). Então por esse teorema teremos uma outra que envolve duas constantes arbitrárias e que pode ser a solução geral para (2). Há uma dificuldade, no caso em que ou y_1 ou y_2 seja uma constante vezes a outra, isto é, em que $y_1 = Ky_2$. Então,

$$c_1y_1 + c_2y_2 = c_1ky_2 + c_2y_2 = (c_1k + c_2)y_2 = cy_2,$$

e teremos uma só constante presente. Por isto, só quando y_1 e y_2 não são múltiplas uma da outra é que

$$c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$$

será a solução geral de (2), o que provaremos a seguir.

É bom recordar, nessa altura, que uma grande parte da teoria das equações lineares se baseia nos Teoremas B e C. Uma inspeção dos cálculos (3) e (5) mostrará que, por sua vez, essas propriedades dependem da linearidade da diferenciação, isto é, do fato de que

$$[\alpha f(x) + \beta g(x)]' = \alpha f'(x) + \beta g'(x)$$

para todas as constantes α e β e todas as funções diferenciáveis $f(x)$ e $g(x)$.

Problemas

1. Por inspeção, calcule a solução geral de $y'' = e^x$.

2. Encontre a solução particular para cada uma das seguintes equações:

   (a) $x^3y'' + x^2y' + xy = 1$;
   (b) $y'' - 2y' = 6$;
   (c) $y'' - 2y = \text{sen } x$.

3. Por eliminação das constantes c_1 e c_2, calcule as equações diferenciais das seguintes famílias de curvas:

   (a) $y = c_1x + c_2x^2$;
   (b) $y = c_1e^{kx} + c_2e^{-kx}$;
   (c) $y = c_1 \text{ sen } kx + c_2 \cos kx$.

4. Verifique que $y = c_1x^{-1} + c_2x^5$ é a solução da equação

$$x^2y'' - 3xy' - 5y = 0$$

   num intervalo $[a, b]$ que não contém zero. Se $x_0 \neq 0$ e se y_0 é y'_0 são arbitrários, mostre que c_1 e c_2 podem ser escolhidos de uma e só uma maneira, para que $y(x_0) = y_0$ e $y'(x_0) = y_0'$.

5. Mostre que $y = x^2$ sen x e $y = 0$ são ambas soluções de

$$x^2y'' - 4xy' + (x^2 + 6)y = 0,$$

   e que ambas satisfazem a condição $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$. Será que isto contradiz o Teorema A? Se não, por quê?

6. Se a solução da equação (2) no intervalo $[a, b]$ é tangente ao eixo x em algum ponto do intervalo, então ela deve ser nula. Por quê?

7. Se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são duas soluções da equação (2) num intervalo $[a, b]$ e tem um zero comum nesse intervalo, mostre que uma delas é uma constante vezes a outra. [Recorde que o ponto x_0 é zero da função $f(x)$ se $f(x_0) = 0$.]

Solução Geral da Equação Homogênea

Se duas funções $f(x)$ e $g(x)$ estão definidas no intervalo $[a, b]$ e têm a propriedade de que uma é uma constante vezes a outra, então elas dizem-se linearmente dependentes em $[a, b]$. Caso contrário – isto é, se nenhuma é uma constante vezes a outra – elas são ditas *linearmente independentes*. É importante notar que, se $f(x) = 0$, então $f(x)$ e $g(x)$ são linearmente dependentes para qualquer $g(x)$, pois $f(x) = 0 . g(x)$. A seguir, iremos provar o teorema:

Teorema A *Se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são soluções linearmente independentes da equação homogênea*

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0, \tag{1}$$

no intervalo $[a, b]$, então,

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \tag{2}$$

é a solução geral da equação (1) em $[a, b]$, no sentido de que toda a solução de (1) nesse intervalo pode ser obtida a partir de (2) por uma escolha judiciosa das constantes c_1 e c_2.

A prova será dada por etapas, por meio de diversas proposições e idéias auxiliares.

Seja $y(x)$ uma solução de (1) em $[a, b]$. Devemos mostrar que as constantes c_1 e c_2 podem ser calculadas de modo que

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

para todo x em $[a, b]$. Pelo Teorema A (p. 618), a solução de (1) para todo $[a, b]$ é completamente determinada por seu valor e pelo valor de sua derivada num único ponto. Conseqüentemente, desde que $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ e $y(x)$ são soluções de (1) em $[a, b]$, é suficiente mostrar que, para o mesmo ponto x_0 em $[a, b]$, podemos encontrar c_1 e c_2, de modo que

$$c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) = y(x_0)$$

e

$$c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) = y'(x_0).$$

Para esse sistema ser solucionável para c_1 e c_2, é suficiente que o determinante

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = y_1(x_0)y_2'(x_0) - y_2(x_0)y_1'(x_0)$$

tenha um valor diferente de zero. Isto nos conduz a investigar a função de x definida por

$$W(y_1, y_2) = y_1 y_2' - y_2 y_1',$$

que é conhecida como o wronskiano* de $y1$ e $y2$, mais especialmente com o fato de ele se anular ou não em x_0. Nosso primeiro lema simplifica o problema ao mostrar que a localização de x_0 não tem importância.

LEMA 1 Se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são duas soluções da equação (1) em $[a, b]$, então seu wronskiano é sempre igual a zero, ou não é igual a zero em nenhum ponto do intervalo $[a, b]$.

Prova Comecemos por observar que

$$\begin{aligned} W' &= y_1 y_2'' + y_1' y_2' - y_2 y_1'' - y_2' y_1' \\ &= y_1 y_2'' - y_2 y_1''. \end{aligned}$$

A seguir, uma vez que y_1 e y_2 são ambas soluções de (1), temos

$$y_1'' + P y_1' + Q y_1 = 0$$

e

$$y_2'' + P y_2' + Q y_2 = 0.$$

Multiplicando a primeira dessas equações por y_2 e a segunda por y_1, e subtraindo a primeira da segunda, obtemos

$$(y_1 y_2'' - y_2 y_1'') + P(y_1 y_2' - y_2 y_1') = 0$$

ou

$$\frac{dW}{dx} + PW = 0.$$

A solução geral da equação de primeira ordem é

$$W = ce^{-\int P\,dx},$$

* Hoene Wronski (1778-1853) foi um polonês de personalidade errática que passou a maior parte de sua vida na França. O determinante wronskiano mencionado acima é sua única contribuição às matemáticas. É o único matemático polaco do século XIX que é lembrado hoje, o que é surpreendente, em vista dos muitos homens eminentes surgidos nesse campo na Polônia, no século XX.

e desde que o fator exponencial nunca se anula, a prova está completa.

Esse resultado reduz nossa tarefa de provar o teorema à de mostrar que o wronskiano de quaisquer z soluções linearmente independentes de (1) nunca é nulo.

LEMA 2 Se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são duas soluções da equação (1) em $[a, b]$, então elas são linearmente dependentes nesse intervalo se e somente se seu wronskiano $W(y_1, y_2) = y_1y_2' - y_2y_1'$ for nulo.

Prova Comecemos por assumir que y_1 e y_2 sejam linearmente dependentes e mostremos que, como conseqüência disto, $y_1y_2' - y_2y_1' = 0$. Primeiro, se qualquer das funções for zero em $[a, b]$, a conclusão é óbvia. Vamos, no entanto, considerar, sem perda da generalidade, que nenhuma delas é nula; segue-se disso e de sua dependência linear que uma é uma constante vezes a outra. Desse modo, $y_2 = xy$ para alguma constante c e, portanto, $y_2' = cy_1'$. Eliminando c dessas equações obtemos $y_1y_2' - y_2y_1' = 0$, o que prova metade da proposição.

Consideremos agora que o wronskiano é identicamente nulo e provemos a dependência linear. Se y_1 for nula em $[a, b]$ (como observamos no início), as funções são linearmente dependentes. Podemos considerar, contudo, que a função não se anula no intervalo, de onde se deduz, pela continuidade, que ela também não se anula em algum subintervalo $[c, d]$ de $[a, b]$. Uma vez que o wronskiano é nulo em $[a, b]$, podemos dividi-lo por y_2^1 para obter

$$\frac{y_1y_2' - y_2y_1'}{y_1^2} = 0$$

em $[c, d]$. Isto pode ser escrito sob a forma $(y_2/y_1)' = 0$ e, por integração, obtemos $y_2/y_1 = k$ ou $y_2(x) = ky_1(x)$ para alguma constante k e para todo x em $[c, d]$. Finalmente, desde que $y_2(x)$ e $ky_1(x)$ têm valores iguais em $[c, d]$, eles têm também derivadas iguais; o Teorema A (p. 618) permite-nos inferir que

$$y_2(x) = ky_1(x)$$

para todo x em $[a, b]$, o que conclui a argumentação.

Com essa proposição a prova do Teorema A está completa.

Exemplo 1 Mostre que $y = c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x$ é a solução geral de

$$y'' + y = 0,$$

em algum intervalo, e calcule a solução particular para a qual $y(0) = 2$ e $y'(0) = 3$.

O fato de que $y_1 = \text{sen } x$ e $y_2 = \cos x$ são soluções, é fácil de se verificar por substituição. Sua independênca linear em qualquer intervalo $[a, b]$ deduz-se da observação de que $y_1/y_2 = \text{tg } x$ não é constante e também do fato de que o seu wronskiano nunca é zero:

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} \text{sen } x & \cos x \\ \cos x & -\text{sen } x \end{vmatrix} = -\text{sen}^2 x - \cos^2 x = -1.$$

Desde que $P(x) = 0$ e $Q(x) = 1$ são contínuas em $[a, b]$, deduz-se agora, do Teorema A, que $y = c_1 \text{ sen } x + c_2 \cos x$ é a solução geral da equação dada em $[a, b]$. Uma vez que o intervalo $[a, b]$ pode ser expandido infinitamente sem que se introduzam pontos para os quais $P(x)$ e $Q(x)$ sejam descontínuos, a solução geral é válida para todo x. Para calcular a solução particular resolvemos o sistema

$$c_1 \text{ sen } 0 + c_2 \cos 0 = 2,$$

$$c_1 \cos 0 - c_2 \text{ sen } 0 = 3.$$

Isto leva a $c_1 = 3$ e $c_2 = 2$, de modo que $y = 3 \text{ sen } x + 2 \cos x$ é a solução particular que satisfaz as condições dadas.

Problemas

Nos Problemas de 1 a 4 use o wronskiano para estabelecer a independência linear.

1. Mostre que e^x e e^{-x} são soluções linearmente independentes de $y'' - y = 0$

2. Mostre que $y = c_1 x + c_2 x^2$ é a solução geral de $x^2 y'' - 2xy' + 2yx\ 0$ num dado intervalo que não contém zero e calcule a solução particular para a qual $y(1) = 3$ e $y'(1) = 5$.

3. Mostre que $c_1 e^x + c_2 e^{2x}$ é a solução geral de $y'' - 3y' + 2y = 0$ para um dado intervalo e calcule a solução paraticular para a qual $y(0) = -1$ e $y'(0) = 1$.

4. Mostre que $y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$ é a solução geral de $y'' - 4y' + 4y = 0$ num dado intervalo.

5. Considere duas funções $f(x) = x^3$ e $g(x) = x^2 |x|$ no intervalo $[-1, 1]$:
   (a) mostre que seu wronskiano é zero;
   (b) mostre que f e g não são linearmente dependentes;
   (c) (a) e (b) contradizem o Lema 2? Senão, por quê?

6. É claro que $[\text{sen } x, \cos x]$ e $[\text{sen } x, \text{sen } x - \cos x]$ são dois pares distintos de soluções linearmente independentes de $y'' + y = 0$. Então, se y_1 e y_2 são soluções linearmente independentes da equação homogênea, $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$.

Vemos que y_1 e y_2 não são univocamente determinados pela equação.

(a) Mostre que

$$P(x) = -\frac{y_1 y_2'' - y_2 y_1''}{W(y_1, y_2)}$$

e

$$Q(x) = \frac{y_1' y_2'' - y_2' y_1''}{W(y_1, y_2)},$$

para que a equação seja determinada univocamente por um dado par de soluções linearmente independentes.

(b) Use (a) para reconstruir a equação $y'' + y = 0$ a partir de cada um dos dois pares de soluções mencionados acima.

(c) Use (a) para reconstruir a equação do Problema 4 a partir do par e^{2x} e xe^{2x}.

Uso de uma Solução Conhecida para Encontrar Outra

Como vimos, é fácil escrever a solução geral da equação homogênea

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0, \tag{1}$$

sempre que conhecemos duas soluções $y_1(x)$ e $y_2(x)$ que sejam linearmente independentes. Mas como encontramos y_1 e y_2? Infelizmente, não existe um método geral.

Contudo, quando já se conhece y_1, pode-se recorrer a um procedimento-padrão para calcular y_2. Isto é de muita importância porque, em muitos casos, uma única e simples solução de (1) pode ser achada por simples inspeção ou comparação.

Para desenvolver esse procedimento, consideremos que $y_1(x)$ seja uma solução conhecida de (1), diferente de zero, e assim $cy_1(x)$ também é uma solução de (1) para qualquer constante c. A idéia básica é substituir a constante c por uma função desconhecida $v(x)$ e, então, determinar v de modo que $y_2 = vy_1$ seja uma solução de (1).

Recorde que a independência linear de duas soluções y_1 e y_2 exige que y_2/y_1 seja uma função não-constante de x, digamos v; e, se pudermos calcular v, então encontraremos y_2, uma vez que conhecemos y_1, e nosso problema estará resolvido.

Consideremos, então, que $y_2 = vy_1$ é a solução de (1), isto é, que

$$y_2'' + Py_2' + Qy_2 = 0, \tag{2}$$

e tentemos descobrir a função $v(x)$. Substituindo $y_2 = vy_1$ e as expressões

$$y_2' = vy_1' + v'y_1 \qquad \text{e} \qquad y_2'' = vy_1'' + 2v'y_1' + v''y_1$$

em (2), e rearranjando os termos, obtemos

$$v(y_1'' + Py_1' + Qy_1) + v''y_1 + v'(2y_1' + Py_1) = 0.$$

Desde que y_1 é solução de (1), essa última expressão reduz-se a

$$v''y_1 + v'(2y_1' + Py_1) = 0$$

ou

$$\frac{v''}{v'} = -2\frac{y_1'}{y_1} - P.$$

Integrando, teremos

$$\ln v' = -2 \ln y_1 - \int P\,dx,$$

então

$$v' = \frac{1}{y_1^2} e^{-\int P\,dx}$$

e

$$v = \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int P\,dx}\,dx. \tag{3}$$

Exemplo 1 $y_1 = x$ é a solução de $x^2y'' + xy' - y = 0$, que é simples o bastante para se descobrir por inspeção. Encontre a solução geral.

Comecemos por escrever a equação dada na forma (1):

$$y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = 0.$$

Uma vez que $P = 1/x$, a segunda solução linearmente independente é dada por $y_2 = vy_1$, onde

$$v = \int \frac{1}{x^2} e^{-\int \frac{1}{x} dx}\, dx = \int \frac{1}{x^2} e^{-\ln x}\, dx = \int x^{-3}\, dx = \frac{x^{-2}}{-2}.$$

Isto leva a $y_2 = (-1/2)x^{-1}$, pelo que a solução geral é $y = c_1 x + c_2 x^{-1}$.

Problemas

1. Se y_1 é uma solução não-nula da equação (1) e $y_2 = vy_1$, onde v, dada pela fórmula (3), é a segunda solução, mostre calculando o wronskiano que y_1 e y_2 são linearmente independentes.

2. Use o método apresentado em "Uso de uma Solução Conhecida para Encontrar Outra" para calcular a solução geral de cada uma das seguintes equações, a partir de uma dada solução y_1:

   (a) $y'' + y = 0$, $y_1 = \operatorname{sen} x$;
   (b) $y'' - y = 0$, $y_1 = e^x$.

3. A equação $xy'' + 3y' = 0$ tem uma solução óbvia $y_1 = 1$. Encontre a solução geral.

4. Verifique que $y_1 = x^2$ é uma solução de $x^2y'' + xy' - 4y = 0$ e calcule a solução geral.

5. A equação $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$ é um caso especial da equação de Legendre

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + p(p + 1)y = 0$$

   para $p = 1$, tendo $y_1 = x$ como solução óbvia. Calcule a solução geral.

6. A equação $x^2y'' + xy' + (x^2 - 1/4)y = 0$ é um caso especial da equação de Bessel $x^2y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0$, para $p = 1/2$. Verifique que $y_1 = x^{-1/2} \operatorname{sen} x$ é uma solução num intervalo só de valores positivos de x e calcule a solução geral.

7. Use o fato de que $y_1 = x$ é uma solução óbvia para cada uma das seguintes equações e calcule suas soluções gerais:

   (a) $y'' - \frac{x}{x-1}y' + \frac{1}{x-1}y = 0;$

   (b) $x^2y'' + 2xy' - 2y = 0.$

8. Calcule a solução geral de $y'' - xf(x)y' + f(x)y = 0.$

9. Verifique que uma solução de $xy'' - (2x+1)y' + (x+1)y = 0$ é dada por $y_1 = e^x$ e calcule a solução geral.

10. Calcule a solução geral de $y'' - f(x)y' + [f(x) - 1]y = 0.$

Equações Homogêneas de Coeficientes Constantes

Estamos, agora, em situação de ter uma discussão completa sobre equações homogêneas $y''+P(x)y'+Q(x)y = 0$ para o caso especial em que $P(x)$ e $Q(x)$ são constantes p e q:

$$y'' + py' + qy = 0. \tag{1}$$

A função exponencial e^x tem a propriedade de que suas derivadas são todas constantes multiplicadas por si própria. Isto leva-nos a considerar

$$y = e^{mx} \tag{2}$$

como uma possível solução de (1) se m for convenientemente escolhido. Uma vez que $y' = me^{mx}$ e $y'' = m^2e^{mx}$, substituindo-se em (1), vem

$$(m^2 + pm + q)e^{mx} = 0; \tag{3}$$

e, sendo que e^{mx} nunca é zero, (3) existe se e somente se m satisfizer a equação auxiliar

$$m^2 + pm + q = 0. \tag{4}$$

As raízes m_1 e m_2 dessa equação, isto é, os valores de m para os quais a equação (2) é solução de (1), são dadas por

$$m_1, m_2 = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}. \tag{5}$$

Um desenvolvimento dessa situação requer um tratamento separado das três possibilidades inerentes a (5).

Raízes reais e distintas É claro que m_1 e m_2 são números reais e distintos se e somente se $p^2 - 4q > 0$. Nesse caso, obtemos duas soluções:

$$e^{m_1 x} \qquad \text{e} \qquad e^{m_2 x}.$$

Uma vez que a razão

$$\frac{e^{m_1 x}}{e^{m_2 x}} = e^{(m_1 - m_2)x}$$

não é constante, essas soluções são linearmente independentes, e

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} \tag{6}$$

é a solução geral de (1).

Raízes complexas e distintas* m_1 e m_2 são números complexos e distintos se e somente se $p^2 - 4q < 0$. Nesse caso, m_1 e m_2 podem ser escritos na forma $a \pm ib$ e, pela fórmula de Euler,

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta, \tag{7}$$

nossas duas soluções de (1) são

$$e^{m_1 x} = e^{(a+ib)x} = e^{ax}e^{ibx} = e^{ax}(\cos bx + i \operatorname{sen} bx) \tag{8}$$

e

$$e^{m_2 x} = e^{(a-ib)x} = e^{ax}e^{-ibx} = e^{ax}(\cos bx - i \operatorname{sen} bx). \tag{9}$$

Só estando interessados em soluções que sejam funções reais podemos adicionar (8) e (9) e dividir por dois, e subtrair e dividir por $2i$ para obter

$$e^{ax}\cos bx \qquad \text{e} \qquad e^{ax}\operatorname{sen} bx. \tag{10}$$

---

* Admitimos que o leitor conheça a Álgebra Elementar dos Números Complexos, uma vez que a fórmula de Euler (7) é parte obrigatória de qualquer curso elementar de Cálculo.

que são soluções linearmente independentes. A solução geral de (1) é

$$y = e^{ax}(c_1 \cos bx + c_2 \operatorname{sen} bx). \tag{11}$$

Podemos olhar essa questão de outro ponto de vista. Uma função de valor complexo $W(x) = u(x) + iv(x)$ satisfaz a equação (1), na qual p e q são números reais se e somente se $u(x)$ e $v(x)$ satisfazem (1) separadamente.

Raízes reais e iguais É evidente que as raízes m_1 e m_2 são números reais e iguais se e somente se $p^2 - 4q = 0$. Obtemos uma única solução $y = e^{mx}$ com $m = -p/2$. Podemos, contudo, achar facilmente uma segunda solução linearmente independente pelo método que acabamos de ver; se $y_1 = e^{(-p/2)x}$, então

$$v = \int \frac{1}{{y_1}^2} e^{-\int p\,dx}\,dx = \int \frac{1}{e^{-px}} e^{-px}\,dx = x$$

e $y_2 = vy_1 = xe^{mx}$. Nesse caso, a solução geral de (1) é

$$y = c_1 e^{mx} + c_2 x e^{mx} \tag{12}$$

Em resumo, temos três possíveis formas — dadas pelas fórmulas (6), (11) e (12) — para a solução geral da equação homogênea (1) com coeficientes constantes, dependendo da natureza das raízes m_1 e m_2 da equação auxiliar (4).

Problemas

1. Calcule a solução geral das seguintes equações:

   (a) $y'' + y' - 6y = 0$;
   (b) $y'' + 2y' + y = 0$;
   (c) $y'' + 8y = 0$;
   (d) $2y'' - 4y' + 8y = 0$;
   (e) $y'' - 4y' + 4y = 0$;
   (f) $y'' - 9y' + 20y = 0$;
   (g) $2y'' + 2y' + 3y = 0$.

2. Mostre que a solução geral da equação (1) se aproxima de zero quando $x \to \infty$ se e somente se p e q são ambos positivos.

3. Sem usar as fórmulas dadas nesta seção, mostre que a derivada de uma solução da equação (1) é também uma solução.

4. A equação $x^2y'' + pxy' + qy = 0$, onde p e q são constantes, é chamada *equação eqüidimensional de Euler**. Mostre que a mudança da variável independente $x = e^z$ a transforma numa equação de coeficientes constantes e aplique essa técnica para calcular a solução geral de:

   (a) $x^2y'' + 3xy' + 10y = 0$;
   (b) $2x^2y'' + 10xy' + 8y = 0$;
   (c) $x^2y'' + 2xy' - 12y = 0$.

5. No Problema 4, certas equações homogêneas com coeficientes variáveis são transformadas em equações de coeficientes constantes pela mudança da variável independente x em $z = \ln x$. Considere a equação homogênea

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \tag{*}$$

e mude a variável x para $z = z(x)$, onde $z(x)$ é uma função não-especificada de x. Mostre que a equação (*) pode ser transformada numa equação de coeficientes constantes se e somente se $(Q' + 2PQ)/Q^{3/2}$ for constante, no caso em que $z = \int \sqrt{Q(x)}dx$ produzirá o resultado desejado.

Método dos Coeficientes Indeterminados

Nas duas seções precedentes, consideramos diversas maneiras de calcular a solução geral da equação homogênea

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0. \tag{1}$$

Como vimos, esses métodos só são efetivos em alguns poucos casos especiais: quando os coeficientes $P(x)$ e $Q(x)$ são constantes e quando, embora não sendo constantes, são simples o suficiente para nos permitir descobrir uma solução não-nula por inspeção. Felizmente, esses casos ocorrem freqüentemente e cobrem uma larga gama de aplicações.

---

* É também conhecida como *equação eqüidimensional de Cauchy*. As descobertas de Euler são tão extensas que muitos matemáticos, para evitar criar confusão dando nomes a equações, dão-lhes o nome de quem primeiro as estudou após Euler.

Contudo, é bom que fique claro que há outras aplicações importantes em Matemática e Física que não se enquadram nos casos anteriores e só podem ser resolvidas pelo método das séries de potência.

Voltemos agora ao problema de resolver a equação não-homogênea

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x) \tag{2}$$

para os casos em que a solução $y_g(x)$ para a equação homogênea (1) já é conhecida. Pelo Teorema A (p. 618) se $y_p(x)$ é uma solução particular de (2), então

$$y(x) = y_g(x) + y_p(x)$$

é a solução geral de (2). Mas como calcular y_p? É para isto o método que vamos estudar agora.

O método dos coeficientes indeterminados é um procedimento usado para encontrar y_p quando (2) tem a forma

$$y'' + py' + qy = R(x), \tag{3}$$

onde p e q são constantes e $R(x)$ é uma exponencial, um seno ou co-seno, um polinômio ou alguma combinação dessas funções. Como exemplo, estudaremos a equação

$$y'' + py' + qy = e^{ax}. \tag{4}$$

Uma vez que a diferenciação de e^{ax} reproduz meramente a função com uma possível mudança do coeficiente numérico, é natural adivinhar que

$$y_p = Ae^{ax} \tag{5}$$

pode ser a solução particular de (4). Aqui A é um coeficiente indeterminado que queremos determinar, de modo que (5) satisfaça (4). Substituindo (5) em (4) obtemos

$$A(a^2 + pa + q)e^{ax} = e^{ax},$$

donde

$$A = \frac{1}{a^2 + pa + q}. \tag{6}$$

Esse valor de A torna (5) solução de (4), exceto quando o denominador de (6) é nulo. A razão dessa dificuldade é fácil de compreender, porque, quando a é raiz da equação auxiliar

$$m^2 + pm + q = 0, \tag{7}$$

(5) reduz o membro esquerdo de (4) a zero, o que não satisfaz (4) com membro direito diferente de zero.

O que pode ser feito nesse caso excepcional? Vimos no ponto anterior que quando a equação auxiliar tem uma raiz dupla, a segunda solução linearmente independente da equação homogênea é obtida por multiplicação por x. Assim, faremos

$$y_p = Axe^{ax} \tag{8}$$

e colocando (8) em (4), obteremos

$$A(a^2 + pa + q)xe^{ax} + A(2a + p)e^{ax} = e^{ax}.$$

A primeira expressão entre parênteses é nula pela consideração feita acima de que a é raiz de (7). Assim

$$A = \frac{1}{2a + p}. \tag{9}$$

Este é um coeficiente válido, exceto quando $a = -p/2$, isto é, quando a é uma raiz dupla de (7). Nesse caso, continuaremos a proceder como indicado acima e obteremos

$$y_p = Ax^2e^{ax}. \tag{10}$$

Substituindo (10) em (4) chega-se a

$$A(a^2 + pa + q)x^2e^{ax} + 2A(2a + p)xe^{ax} + 2Ae^{ax} = e^{ax},$$

sendo que a é uma raiz dupla de (7); ambas as expressões entre parênteses são nulas e

$$A = \frac{1}{2}. \tag{11}$$

Resumindo, se a não é raiz de (7), então (4) tem uma solução particular da forma Ae^{ax}; se a é uma raiz simples de (7), então (4) tem uma solução na forma Axe^{ax}; se a é uma raiz dupla de (7), então a solução de (4) é da forma Ax^2e^{ax}.

Outro caso importante é quando $R(x) = \operatorname{sen} bx$

$$y'' + py' + qy = \operatorname{sen} bx. \tag{12}$$

Uma vez que as derivadas de sen bx são constantes multiplicadas por sen bx e cos bx, temos

$$y_p = A \operatorname{sen} bx + B \cos bx. \tag{13}$$

Substituindo (13) em (12), podemos determinar A e B obtendo uma solução da forma $\alpha \operatorname{sen} bx + \beta \cos bx$.

Como anteriormente, o método não funciona se (13) não satisfizer a equação homogênea correspondente a (12). Quando isto acontece, o procedimento é continuar usando

$$y_p = x(A \operatorname{sen} bx + B \cos bx) \tag{14}$$

para obter a solução para (12).

Outro caso a considerar é quando $R(x)$ é um polinômio

$$y'' + py' + qy = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n. \tag{15}$$

Uma vez que a derivada de um polinômio é outro polinômio, temos

$$y_p = A_0 + A_1 x + \cdots + A_n x^n. \tag{16}$$

Substituindo (16) em (15) calculamos os coeficientes indeterminados $A_0, A_1, ..., A_n$.

Se a constante q for nula, então esse procedimento resulta em x^{n-1} como a mais alta potência de x no membro esquerdo de (15) e, neste caso,

$$\begin{aligned} y_p &= x(A_0 + A_1 x + \cdots + A_n x^n) \\ &= A_0 x + A_1 x^2 + \cdots + A_n x^{n+1}. \end{aligned} \tag{17}$$

Se p e q forem ambos nulos, então (15) pode ser resolvido por integração.

$R(x)$ é, normalmente, uma função com apenas um número finito de derivadas essencialmente diferentes. Vimos como se procede quando ela é exponencial, trigonométrica ou um polinômio. No Problema 3, veremos como resolver (2) quando ela é uma soma de tais funções.

Problemas

1. Calcule a solução geral das seguintes equações:

   (a) $y'' + 3y' - 10y = 6e^{4x}$;
   (b) $y'' + 4y = 3 \operatorname{sen} x$;
   (c) $y'' + 10y' + 25y = 14e^{-5x}$;
   (d) $y'' - 2y' + 5y = 25x^2 + 12$;
   (e) $y'' - y' - 6y = 20e^{-2x}$;
   (f) $y'' - 3y' + 2y = 14 \operatorname{sen} 2x - 18 \cos 2x$;
   (g) $y'' + y = 2 \cos x$;
   (h) $y'' - 2y' = 12x - 10$.

2. Se K e b são constantes positivas, ache a solução geral de

$$y'' + k^2 y = \text{sen}\, bx.$$

3. Se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são soluções de

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R_1(x)$$

e

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R_2(x),$$

mostre que $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$ é a solução de

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R_1(x) + R_2(x).$$

Use o mesmo princípio para achar a solução de

$$y'' + 4y = 4\cos 2x + 6\cos x + 8x^2 - 4x.$$

Método de Variação de Parâmetros

A técnica usada em "Métodos dos Coeficientes Indeterminados" (p. 632) para determinar uma solução particular para a equação não-homogênea

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x) \tag{1}$$

tem duas limitações importantes: pode ser usada apenas quando os coeficientes $P(x)$ e $Q(x)$ são constantes e quando $R(x)$ é uma função com uma forma particularmente simples. Contudo, esse procedimento é o mais fácil de utilizar.

Desenvolveremos, agora, um método que se aplica sempre — para quaisquer P, Q ou R —, desde que a solução geral da equação homogênea correspondente

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \tag{2}$$

seja conhecida. O método é similar ao descrito em "Uso de uma Solução Conhecida para Encontrar Outra" (p. 626) isto é, substituímos as constantes c_1 e c_2 por funções desconhecidas $v_1(x)$ e $v_2(x)$ na solução geral de (2)

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \tag{3}$$

e tentamos determinar v_1 e v_2 de modo que

$$y = v_1 y_1 + v_2 y_2 \tag{4}$$

seja a solução de (1)*. Com duas funções desconhecidas para calcular, precisaremos de duas equações que as relacionem. Obtemos uma da exigência de que (4) seja solução de (1) e calculamos a outra a partir da derivada de (4).

$$y' = (v_1 y_1' + v_2 y_2') + (v_1' y_1 + v_2' y_2). \tag{5}$$

Outra diferenciação dará as segundas derivadas das funções desconhecidas v_1 e v_2. Para evitar essa complicação, fazemos

$$v_1' y_1 + v_2' y_2 = 0. \tag{6}$$

isto dá

$$y' = v_1 y_1' + v_2 y_2', \tag{7}$$

e

$$y'' = v_1 y_1'' + v_1' y_1' + v_2 y_2'' + v_2' y_2'. \tag{8}$$

substituindo (4), (7) e (8) em (1) e rearranjando os termos, obtemos

$$v_1(y_1'' + Py_1' + Qy_1) + v_2(y_2'' + Py_2' + Qy_2) + v_1' y_1' + v_2' y_2' = R(x). \tag{9}$$

Uma vez que y_1 e y_2 são soluções de (2), as duas expressões entre parênteses são nulas e (9) torna-se

$$v_1' y_1' + v_2' y_2' = R(x). \tag{10}$$

Tomando (6) e (10) temos duas equações das funções desconhecidas v_1' e v_2':

$$v_1' y_1 + v_2' y_2 = 0,$$
$$v_1' y_1' + v_2' y_2' = R(x),$$

que podem ser resolvidas obtendo-se

$$v_1' = \frac{-y_2 R(x)}{W(y_1, y_2)} \quad \text{e} \quad v_2' = \frac{y_1 R(x)}{W(y_1, y_2)}. \tag{11}$$

* Esta é a origem do nome ***variação dos parâmetros:*** nós variamos os parâmetros c_1 e c_2.

Pode-se ver que essas fórmulas são legítimas, porque o wronskiano no denominador é não-nulo em virtude da independência linear de y_1 e y_2. Falta integrar as fórmulas (11) para encontrarmos v_1 e v_2

$$v_1 = \int \frac{-y_2 R(x)}{W(y_1,y_2)} dx \quad \text{e} \quad v_2 = \int \frac{y_1 R(x)}{W(y_1,y_2)} dx. \tag{12}$$

Une-se tudo e pode-se afirmar que

$$y = y_1 \int \frac{-y_2 R(x)}{W(y_1,y_2)} dx + y_2 \int \frac{y_1 R(x)}{W(y_1,y_2)} dx \tag{13}$$

é a solução particular de (1) que estávamos procurando.

O leitor pode observar que esse método tem desvantagens: em particular, a integral (12) pode ser difícil ou impossível de se resolver. É preciso, também, conhecer a solução geral de (2) antes de iniciar o processo. Mas essa objeção não é muito importante porque nunca será necessário conhecer a solução particular de (1), a não ser que já se conheça a de (2).

Exemplo 1 Calcule a solução particular de $y'' + y = \operatorname{cosec} x$.

A equação homogênea correspondente $y'' + y = 0$ tem $y(x) = c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x$ como solução geral, de modo que $y_1 = \operatorname{sen} x$, $y_2' = \cos x$, $y_2 = \cos x$ e $y_1' = -\operatorname{sen} x$. O wronskiano de y_1 e y_2 é

$$W(y_1,y_2) = y_1 y_2' - y_2 y_1' = -\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x = -1,$$

então, por (2), temos

$$v_1 = \int \frac{-\cos x \operatorname{cosec} x}{-1} dx = \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} dx = \ln(\operatorname{sen} x)$$

e

$$v_2 = \int \frac{\operatorname{sen} x \operatorname{cosec} x}{-1} dx = -x.$$

donde

$$y = \text{sen}\, x \;\; \ln(\text{sen} x) - x \cos x$$

é a solução particular desejada.

Problemas

1. Calcule a solução particular de $y'' - 2y' + y = 2x$, primeiro por inspeção e então pela variação dos parâmetros.

2. Calcule a solução particular de $y'' - y' - 6y = e^{-x}$, primeiro pelos coeficientes indeterminados e então pela variação dos parâmetros.

3. Calcule a solução particular das seguintes equações:

   (a) $y'' + 4y = \text{tg}\, 2x$;
   (b) $y'' + 2y' + y = e^{-x} \ln x$;
   (c) $y'' - 2y' - 3y = 64xe^{-x}$;
   (d) $y'' + 2y' + 5y = e^{-x} \sec 2x$.

4. Calcule a solução geral das seguintes equações:

   (a) $(x^2 - 1)y'' - 2xy' + 2y = (x^2 - 1)^2$;
   (b) $(x^2 + x)y'' + (2 - x^2)y' - (2 + x)y = x(x + 1)^2$.

Vibrações em Sistemas Mecânicos

Geralmente falando, as vibrações ocorrem num sistema físico em estado de equilíbrio quando este é perturbado e, então, ele fica submetido a forças que tendem a restabelecer o equilíbrio. Veremos aqui como situações desse tipo nos levam a equações diferenciais da forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} + p\frac{dx}{dt} + qx = R(t)$$

e, também, como o estudo dessas equações diferenciais depende das circunstâncias físicas.

Vibrações harmônicas não-amortecidas Consideremos um carro de massa M preso a uma parede por meio de uma mola (Fig. 22.14)

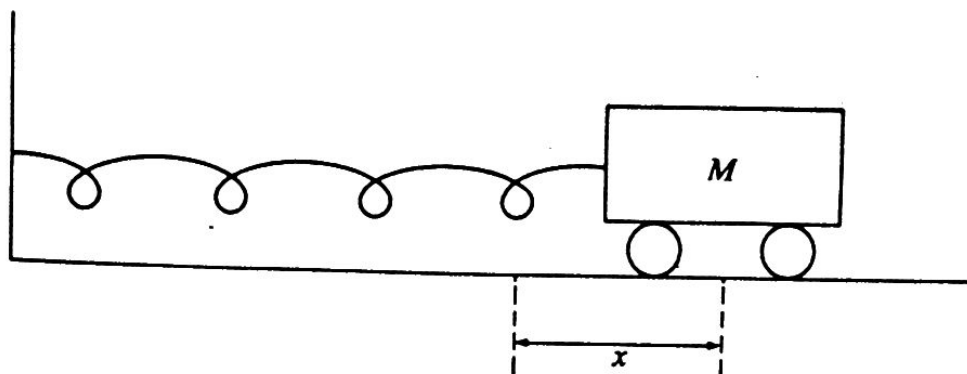



Figura 22.14

A mola não realiza força quando o carro está em equilíbrio na posição $x = 0$. Se o carro for deslocado a uma distância x, então a mola exerce a força $F_S = -kx$, onde k é uma constante positiva cuja amplitude depende da flexibilidade da mola. Pela Segunda Lei do Movimento de Newton, pode-se dizer que a massa do carro multiplicada pela aceleração iguala a força total que atua nele e temos

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = F_s \tag{1}$$

ou

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{M}x = 0. \tag{2}$$

É conveniente escrever a equação do movimento na forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a^2x = 0, \tag{3}$$

onde $a = \sqrt{k/M}$ e sua solução geral é

$$x = c_1 \operatorname{sen} at + c_2 \cos at. \tag{4}$$

Se o carro for mudado para a posição $x = x_0$ e largado sem velocidade inicial no instante $t = 0$, as condições iniciais são

$$x = x_0 \qquad \text{e} \qquad v = \frac{dx}{dt} = 0 \quad \text{quando } t = 0, \tag{5}$$

e então é fácil ver que $c_1 = 0$ e $c_2 = x_0$ e (4) se torna

$$x = x_0 \cos at. \tag{6}$$

O gráfico de (6) é mostrado na Fig. 22.15.

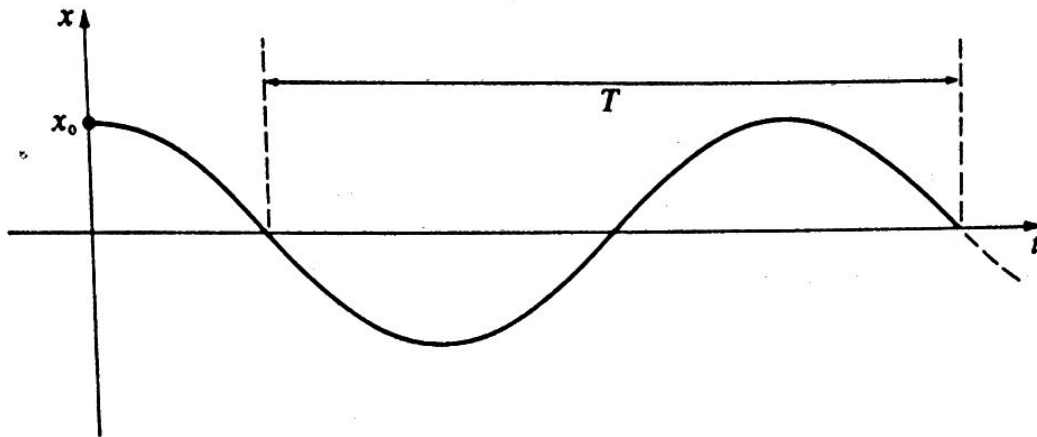



Figura 22.15

A amplitude dessa vibração é x_0 e, sendo seu período T o tempo necessário para a realização de um ciclo completo, temos que $at = 2\pi$ e

$$T = \frac{2\pi}{a} = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}}. \tag{7}$$

Sua freqüência f é o número de ciclos por unidade de tempo, $fT = 1$ e

$$f = \frac{1}{T} = \frac{a}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{M}}. \tag{8}$$

É claro, a partir de (8), que a freqüência da vibração cresce se a flexibilidade da mola crescer ou se a massa diminuir.

Vibrações amortecidas Nosso próximo passo é considerar o efeito adicional de uma força de amortecimento F_d em virtude da viscosidade do meio, através do qual o carro se move (água, ar, óleo etc.). Consideremos que essa força se opõe ao movimento e tem amplitude proporcional à velocidade, isto é, $F_d = -c(dx/dt)$, onde c é uma constante positiva da resistência do meio. A equação (1) se torna

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = F_s + F_d \tag{9}$$

e então

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{c}{M}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{M}x = 0, \tag{10}$$

que, por conveniência, escrevemos na forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2b\frac{dx}{dt} + a^2x = 0, \tag{11}$$

onde $b = c/2M$ e $a = \sqrt{k/M}$. A equação auxiliar é

$$m^2 + 2bm + a^2 = 0, \tag{12}$$

e suas raízes m_1 e m_2 são dadas por

$$m_1, m_2 = \frac{-2b \pm \sqrt{4b^2 - 4a^2}}{2} = -b \pm \sqrt{b^2 - a^2}. \tag{13}$$

A solução geral de (1) é, sem dúvida, determinada pela natureza dos números m_1 e m_2. Como sabemos, há três casos a considerar separadamente.

Caso A $b^2 - a^2 > 0$ ou $b > a$.

A viscosidade do meio é grande se comparada com a flexibilidade da mola. Então m_1 e m_2 são números negativos diferentes e a solução geral de (11) é

$$x = c_1e^{m_1t} + c_2e^{m_2t}. \tag{14}$$

Se aplicarmos as condições iniciais (5) para calcular c_1 e c_2 (14) fica

$$x = \frac{x_0}{m_1 - m_2}(m_1e^{m_2t} - m_2e^{m_1t}). \tag{15}$$

O gráfico dessa função é dado na Fig. 22.16.

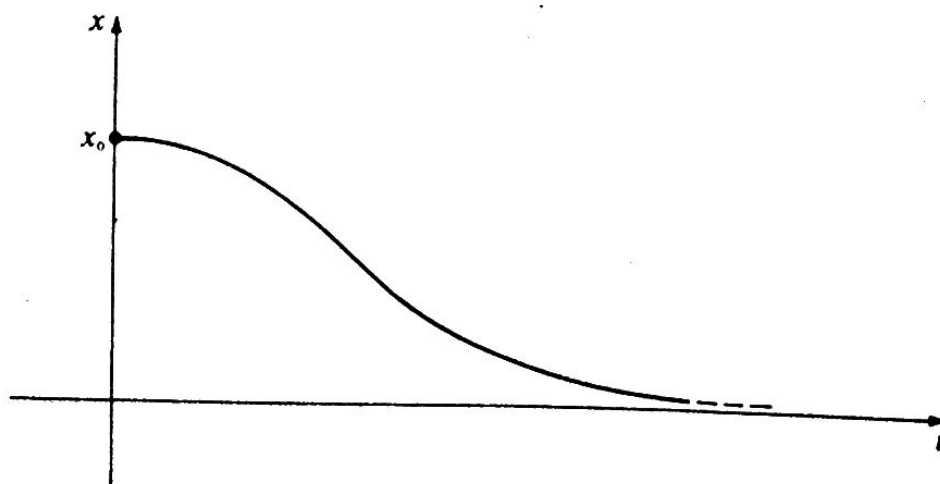



Figura 22.16

Não há vibrações, o carro simplesmente volta a sua posição de equilíbrio. Esse tipo de movimento é chamado *superamortecido.*

Caso B $b^2 - a^2 = 0$ ou $b = a$.

Aqui $m_1 = m_2 = -b = -a$; a solução geral de (11) é

$$x = c_1 e^{-at} + c_2 t e^{-at}. \tag{16}$$

A partir das condições iniciais (5) obtemos

$$x = x_0 e^{-at}(1 + at). \tag{17}$$

Essa função tem um gráfico similar ao de (15) e não temos vibrações. Esse tipo de movimento é chamado *criticamente amortecido.* Se a viscosidade, contudo, diminuir um pouco, o movimento torna-se vibratório e é chamado *subamortecido* e estaremos no caso C.

Caso C $b^2 - a^2 < 0$ ou $b < a$.

Aqui m_1 e m_2 são números complexos conjugados $-b \pm i\alpha$, onde

$$\alpha = \sqrt{a^2 - b^2},$$

e a solução geral de (11) é

$$x = e^{-bt}(c_1 \cos \alpha t + c_2 \operatorname{sen} \alpha t). \tag{18}$$

Avaliando-se c_1 e c_2 de acordo com (5), teremos

$$x = \frac{x_0}{\alpha} e^{-bt}(\alpha \cos \alpha t + b \operatorname{sen} \alpha t). \tag{19}$$

Se $\theta = \operatorname{arc\,tg}(b/\alpha)$, então (19) pode ser expressa sob a forma

$$x = \frac{x_0\sqrt{\alpha^2 + b^2}}{\alpha} e^{-bt} \cos(\alpha t - \theta). \tag{20}$$

Essa função oscila com uma amplitude que decresce exponencialmente, como mostra a Fig. 22.17

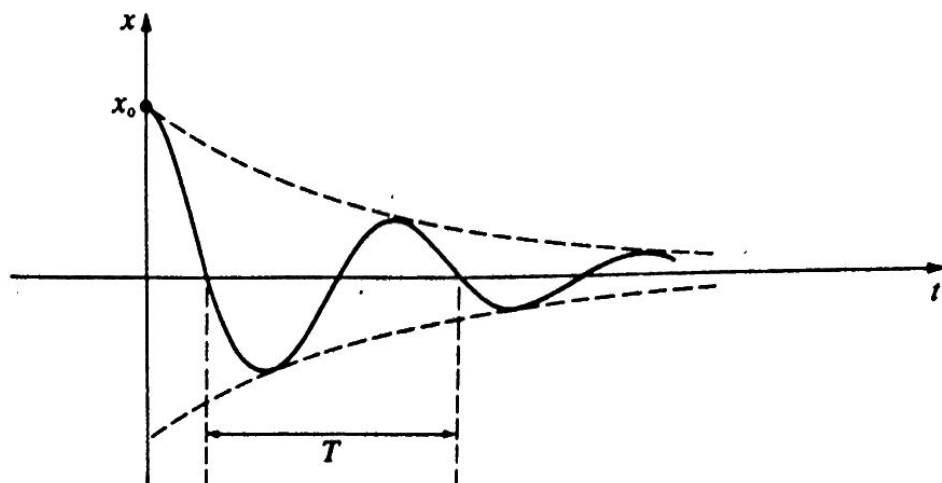



Figura 22.17

Não é periódica no sentido comum, mas cruza a posição de equilíbrio $x = 0$ em intervalos regulares. Se considerarmos esse "período" T como o tempo para completar um "ciclo", então $\alpha T = 2\pi$ e

$$T = \frac{2\pi}{\alpha} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{k/M - c^2/4M^2}}. \tag{21}$$

A "freqüência" é dada por

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{a^2 - b^2} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{M} - \frac{c^2}{4M^2}}. \tag{22}$$

Esse número é chamado *freqüência natural* do sistema. Quando a viscosidade desaparece, $c = 0$ e (21) e (22) se transformam em (7) e (8). Comparando (8) e (22) vemos que a freqüência da vibração diminui com o amortecimento, como era de se esperar.

Vibrações forçadas As vibrações discutidas acima são conhecidas como *vibrações livres* porque todas as forças atuantes no sistema são internas ao próprio sistema.

Vejamos, agora, o caso em que uma força externa $F_e = f(t)$ atua no carro. Tal força pode ser, por exemplo, devida a vibrações na parede, efeitos no carro provocados por um campo magnético se este for metálico etc.

Em lugar de (9) teremos

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = F_s + F_d + F_e, \tag{23}$$

donde

$$M\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = f(t). \tag{24}$$

O caso mais importante é aquele em que a força imposta é periódica e tem a forma $f(t) = F_0 \cos wt$; então (24) se torna

$$M\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = F_0 \cos \omega t. \tag{25}$$

Como já resolvemos a equação homogênea (10), temos agora que encontrar a solução particular de (25), o que é mais facilmente feito pelo método dos coeficientes indeterminados. Se $x = A \text{ sen } wt + B \cos wt$, substituindo em (25) obtemos o seguinte par de equações para A e B:

$$\omega c A + (k - \omega^2 M)B = F_0,$$
$$(k - \omega^2 M)A - \omega c B = 0.$$

A solução do sistema é

$$A = \frac{\omega c F_0}{(k - \omega^2 M)^2 + \omega^2 c^2} \qquad \text{e} \qquad B = \frac{(k - \omega^2 M)F_0}{(k - \omega^2 M)^2 + \omega^2 c^2}.$$

sendo a desejada solução particular

$$x = \frac{F_0}{(k - \omega^2 M)^2 + \omega^2 c^2}[\omega c \text{ sen } \omega t + (k - \omega^2 M)\cos \omega t]. \tag{26}$$

Se $\theta = \text{arc tg}\,[wc/(k - w^2 M)]$, podemos escrever (26) na forma

$$x = \frac{F_0}{\sqrt{(k - \omega^2 M)^2 + \omega^2 c^2}}\cos(\omega t - \phi). \tag{27}$$

Se considerarmos que estamos tratando com o movimento subamortecido discutido acima, a solução geral de (25) é:

$$x = e^{-bt}(c_1 \cos \alpha t + c_2 \text{ sen } \alpha t) + \frac{F_0}{\sqrt{(k - \omega^2 M)^2 + \omega^2 c^2}}\cos(\omega t - \phi). \tag{28}$$

O primeiro termo é claramente transiente que se aproxima de zero quando $t \to \infty$. Assim, com o decorrer do tempo, o movimento adquire o caráter do segundo termo. Nesse caso, desprezamos a parte transiente (28) e consideramos que, para t suficientemente grande, a solução geral de (25) é igual à solução particular (27). A freqüência dessa vibração forçada iguala a freqüência imposta $w/2\pi$ e sua amplitude é o coeficiente

$$\frac{F_0}{\sqrt{(k - \omega^2 M)^2 + \omega^2 c^2}}. \tag{29}$$

Essa expressão para a amplitude guarda alguns segredos interessantes, pois depende não só de w e F_0 mas também de k, c e M. Como exemplo, note que se c for muito pequeno e w estiver perto de $\sqrt{k/M}$ ($k - w^2 M$ é muito pequeno), isto significa que o movimento é ligeiramente amortecido, a freqüência está perto da freqüência natural

$$\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{M} - \frac{c^2}{4M^2}}$$

e a amplitude é muito grande. Esse fenômeno é conhecido como ressonância.

Um exemplo clássico é a vibração imposta numa ponte sob o impacto dos pés de uma coluna de homens marchando, cujos passos correspondem aproximadamente à freqüência natural da ponte.

Finalmente mencionaremos certas ligações entre os problemas mecânicos tratados acima e os problemas elétricos discutidos em "Circuitos Elétricos Simples" (p. 614). Mostrava-se que se a força eletromotriz periódica $E = E_0 \cos wt$ atuasse num circuito simples contendo uma resistência, um condensador e uma bobina, a carga Q no condensador seria governada pela equação diferencial

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = E_0 \cos \omega t.$$

Essa equação é estritamente similar à (25). Em particular, existem as seguintes correspondências:

massa $M \longleftrightarrow$ indutância L
viscosidade $c \longleftrightarrow$ resistência R
flexibilidade $k \longleftrightarrow$ inverso da capacidade $1/C$
deslocamento $x \longleftrightarrow$ carga Q no condensador

Essa analogia entre sistemas mecânicos e elétricos permite-nos transportar conclusões matemáticas de um para outro. No circuito elétrico dado, temos uma resistência crítica abaixo da qual o comportamento livre do circuito será vibratório com uma certa freqüência natural, temos uma vibração estacionária forçada da carga Q e um fenômeno de ressonância que aparece quando as circunstâncias forem favoráveis.

Problemas

1. Considere uma vibração imposta (27) num caso de subamortecimento e calcule a freqüência forçada para a qual a amplitude (29) atinge o máximo. Existirá tal freqüência? Esse valor (quando existe) é chamado *freqüência de ressonância*. Mostre que é sempre inferior à freqüência natural.

2. Considere a vibração subamortecida descrita pela fórmula (20). Mostre que x assume o valor máximo para $t = 0, T, 2T, ...,$ onde T é o "período", como dado em (21). Se x_1 e x_2 são dois valores máximos sucessivos de x, mostre que $x_1/x_2 = e^{bT}$. O logaritmo dessa quantidade bT é conhecido como *logaritmo da vibração.*

3. Uma bóia esférica de raio R flutua meio submergida na água. Se for empurrada levemente, uma força igual ao peso do deslocamento da água empurra-a para cima; e se for então largada ela irá flutuar para cima e para baixo. Calcule o período de oscilação se a fricção da água for desprezível.

4. Suponha que um túnel estreito é cavado através da terra entre quaisquer dois pontos da superfície. Se forem colocados trilhos, então – negligenciando-se a fricção –, um trem, colocado no túnel de um lado, rolará até o outro pelo seu próprio peso, parará e retornará. Mostre que o tempo necessário para ida e volta completa é o mesmo para qualquer túnel semelhante e estime seu valor.

Lei da Gravitação de Newton e o Movimento dos Planetas

A Lei de Atração Universal dos Corpos, a do inverso do quadrado da distância, representa tantos fenômenos naturais – as órbitas dos planetas ao redor do Sol, o movimento da Lua e dos satélites artificiais ao redor da Terra, as trajetórias descritas por partículas carregadas na física atômica etc. – que toda pessoa educada em Ciências deve conhecê-la. Nossa proposta neste capítulo é deduzir a Lei do Movimento Planetário de Kepler a partir da Lei da Gravitação Universal de Newton. Para problemas envolvendo uma partícula móvel em que a força que sobre ela atua está sempre numa linha reta da partícula para um ponto fixo, é normalmente mais simples calcular a velocidade, a aceleração e a força a partir das componentes ao longo e perpendiculares a essa linha.

Colocaremos uma partícula fixa M na origem de um sistema de coordenadas polares (Fig. 22.18) e expressaremos o raio vetor a partir da origem até a partícula móvel m na forma

$$\mathbf{r} = r\mathbf{u}_r,$$

onde $\mathbf{u}_r$ é o vetor unitário na direção $\mathbf{r}$. É claro que

$$\mathbf{u}_r = \mathbf{i}\cos\theta + \mathbf{j}\,\mathrm{sen}\,\theta, \tag{2}$$

e também que o vetor correspondente $\mathbf{u}_\theta$ perpendicular a $\mathbf{u}_r$ na direção de θ crescente é dado por

$$\mathbf{u}_\theta = -\mathbf{i}\,\mathrm{sen}\,\theta + \mathbf{j}\cos\theta.$$

A relação simples

$$\frac{d\mathbf{u}_r}{d\theta} = \mathbf{u}_\theta \qquad \text{e} \qquad \frac{d\mathbf{u}_\theta}{d\theta} = -\mathbf{u}_r, \tag{3}$$

obtida pela diferenciação de (2) e (3), respectivamente, é essencial para calcular a velocidade e a aceleração, isto é, os vetores $\mathbf{v}$ e $\mathbf{a}$. O cálculo direto a partir de (1) leva a

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = r\frac{d\mathbf{u}_r}{dt} + \mathbf{u}_r\frac{dr}{dt} = r\frac{d\mathbf{u}_r}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} + \mathbf{u}_r\frac{dr}{dt} = r\frac{d\theta}{dt}\mathbf{u}_\theta + \frac{dr}{dt}\mathbf{u}_r \tag{4}$$

e

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \left(r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\right)\mathbf{u}_\theta + \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\mathbf{u}_r. \tag{5}$$

Se a força $\mathbf{F}$ atuando em m for escrita na forma

$$\mathbf{F} = F_\theta\mathbf{u}_\theta + F_r\mathbf{u}_r, \tag{6}$$

então, de (5) e (6) e da Segunda Lei de Movimento de Newton,

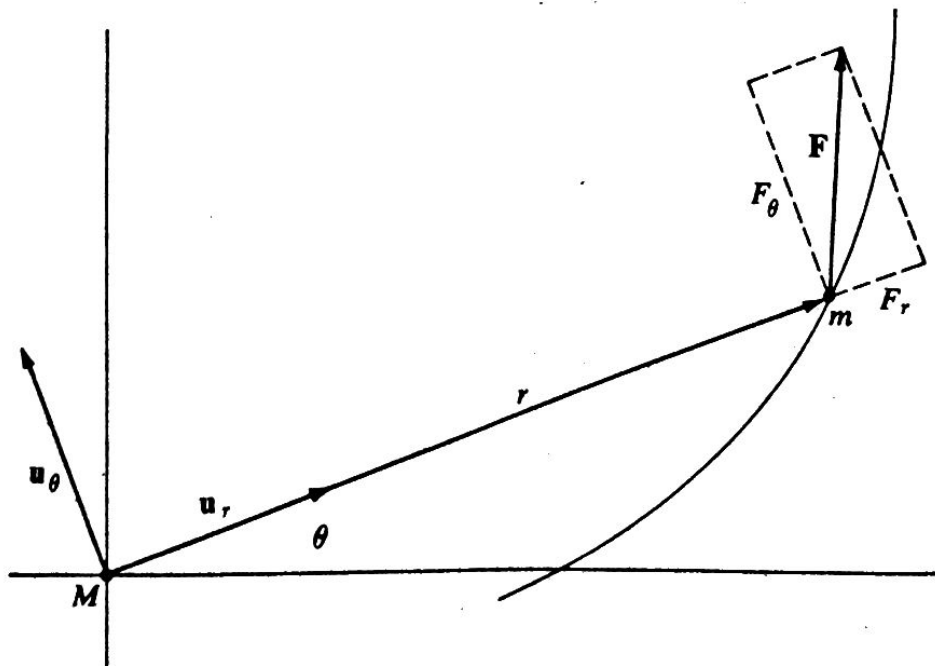



Figura 22.18

$ma = F$, obtemos

$$m\left(r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\right) = F_\theta \qquad \text{e} \qquad m\left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right] = F_r. \tag{7}$$

Essas equações diferenciais governam o movimento da partícula m e são válidas qualquer que seja a natureza da força. Nossa tarefa seguinte é de conseguir retirar informações dessas equações fazendo certas considerações sobre a direção e a amplitude de **F**.

Forças centrais **F** é denominada força central se não possuir componente perpendicular a **r**, isto é, se $F_\theta = 0$. Sob essa consideração a primeira das equações (7) torna-se

$$r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} = 0.$$

Na multiplicação por **r**, obtemos

$$r^2\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2r\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} = 0$$

ou

$$\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right) = 0,$$

donde

$$r^2\frac{d\theta}{dt} = h \tag{8}$$

para alguma constante h. Consideremos h positivo, o que, evidentemente, significa que m se move no sentido inverso ao dos ponteiros do relógio. Se $A = A(t)$ representa a área percorrida por **r** a partir de uma posição de referência fixa, $dA = r^2 d\theta/2$, então (8) implica que

$$dA = \frac{1}{2}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)dt = \frac{1}{2}h\,dt. \tag{9}$$

Na integração de (9) de t_1 para t_2, obtemos

$$A(t_2) - A(t_1) = \frac{1}{2}h(t_2 - t_1). \tag{10}$$

Isto leva à Segunda Lei de Kepler: o raio vetor **r** com centro no Sol até um planeta percorre áreas iguais em intervalos de tempo iguais*.

Forças gravitacionais centrais Consideremos que **F** seja uma força de atração central cuja amplitude – de acordo com a Lei da Gravitação de Newton – é diretamente proporcional ao produto de duas massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre elas :

$$F_r = -G\frac{Mm}{r^2}. \tag{11}$$

A letra G representa a constante gravitacional, que é uma das constantes universais da natureza. Se escrevermos (11) numa forma ligeiramente mais simples

$$F_r = -\frac{km}{r^2},$$

onde $k = GM$, então a segunda das equações (7) torna-se

$$\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = -\frac{k}{r^2}. \tag{12}$$

Se introduzirmos uma nova variável $z = 1/r$ e usarmos θ em vez de t como variável independente, a equação acima adquirirá uma forma familiar. Para efetuar essa transformação devemos primeiro calcular

$$\frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{1}{z^2}\frac{dz}{dt} = -\frac{1}{z^2}\frac{dz}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{z^2}\frac{dz}{d\theta}\frac{h}{r^2} = -h\frac{dz}{d\theta}$$

e

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -h\frac{d}{dt}\left(\frac{dz}{d\theta}\right) = -h\frac{d}{d\theta}\left(\frac{dz}{d\theta}\right)\frac{d\theta}{dt} = -h\frac{d^2z}{d\theta^2}\frac{h}{r^2} = -h^2z^2\frac{d^2z}{d\theta^2}.$$

Quando a última expressão for inserida em (12) e r e do/dt forem substituídos por $1/z$ e hz, respectivamente, obteremos

$$-h^2z^2\frac{d^2z}{d\theta^2} - \frac{1}{z}h^2z^4 = -kz^2$$

ou

$$\frac{d^2z}{d\theta^2} + z = \frac{k}{h^2}. \tag{13}$$

* Quando o astrônomo dinamarquês Tycho Brahe morreu, em 1601, seu assistente Johanes Kepler (1571-1630) herdou grande quantidade de dados sobre a posição dos planetas em momentos diversos. Kepler trabalhou incessantemente com esse material por 20 anos e, por fim, conseguiu extrair dele suas três maravilhosamente simples leis dos movimentos dos planetas, as quais são o clímax de anos de pura observação astronômica.

A solução geral dessa equação pode ser escrita na forma abaixo:

$$z = A \operatorname{sen} \theta + B \cos \theta + \frac{k}{h^2}. \tag{14}$$

Para salvaguarda da simplicidade, deslocaremos a direção do eixo polar de tal modo que r seja mínimo (isto é, m está mais próximo da origem) quando $\theta = 0$. Isto significa que z será máximo nessa direção:

$$\frac{dz}{d\theta} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{d^2 z}{d\theta^2} < 0$$

quando $\theta = 0$. Essas condições implicam que $A = 0$ e $B > 0$. Se agora substituirmos z por $1/r$, então (14) se escreverá

$$r = \frac{1}{k/h^2 + B \cos \theta} = \frac{h^2/k}{1 + (Bh^2/k) \cos \theta};$$

se fizermos $e = Bh^2/k$, então nossa equação para a órbita torna-se

$$r = \frac{h^2/k}{1 + e \cos \theta}, \tag{15}$$

onde e é uma constante positiva.

Nesse ponto recordaremos (Fig. 22.19) que o lugar geométrico definido por $PF/PD = e$ é a seção cônica com foco F, diretriz d e excentricidade e. Expressando essa condição em termos de r e θ, é fácil ver que

$$r = \frac{pe}{1 + e \cos \theta}$$

será a equação polar de nossa seção cônica, a qual é uma elipse, uma parábola ou uma hipérbole segundo $e < 1$, $e = 1$ ou $e > 1$. Essas observações mostram que a órbita (15) é uma seção cônica com excentricidade $e = Bh^2/k$; uma vez que os planetas permanecem no sistema solar e se movem em órbitas fechadas, temos a Primeira Lei de Kepler: a órbita de cada planeta é uma elipse, tendo o Sol num dos focos.

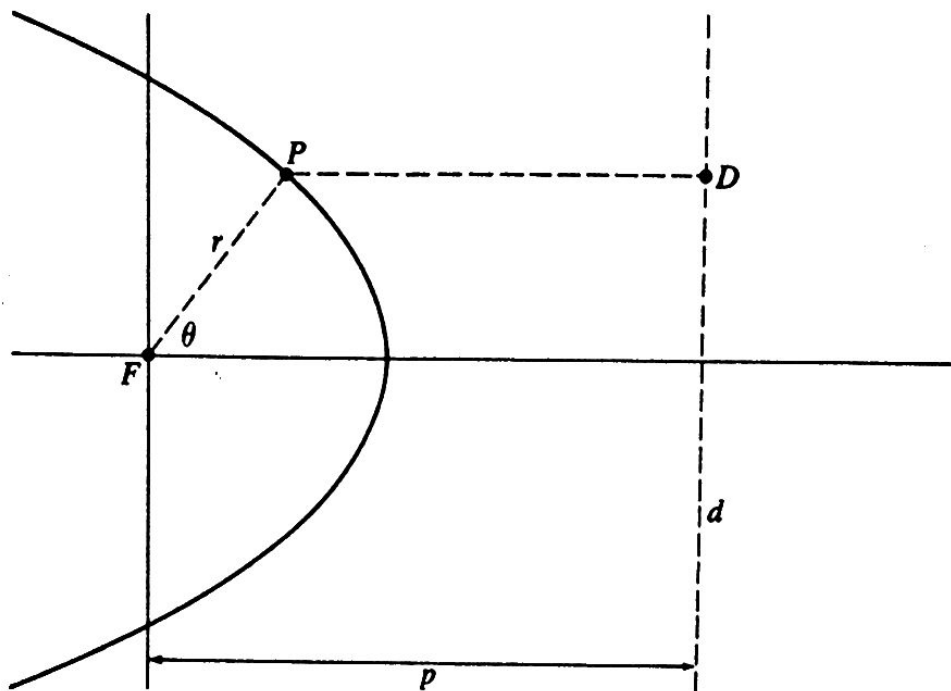



Figura 22.19

Significado Físico da Excentricidade A partir da equação (4) sabe-se que a energia cinética de m é

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left[r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right]. \tag{16}$$

A energia potencial do sistema é o trabalho necessário, com sinal trocado, para mover m até o infinito (onde a energia potencial é zero), e é

$$-\int_r^\infty \frac{km}{r^2}\,dr = \frac{km}{r}\bigg|_r^\infty = -\frac{km}{r}. \tag{17}$$

Se E for a energia total do sistema, a qual é constante pelo princípio de conservação da energia, então (16) e (17) levam a

$$\frac{1}{2}m\left[r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right] - \frac{km}{r} = E. \tag{18}$$

No instante em que $\theta = 0$, (15) e (18) dão

$$r = \frac{h^2/k}{1+e} \qquad \text{e} \qquad \frac{mr^2}{2}\frac{h^2}{r^4} - \frac{km}{r} = E.$$

É fácil eliminar r dessas equações; quando o resultado se expressar em termos de e, teremos

$$e = \sqrt{1 + E\left(\frac{2h^2}{mk^2}\right)}.$$

Isto permite-nos escrever a equação (15) da órbita na forma

$$r = \frac{h^2/k}{1 + \sqrt{1 + E(2h^2/mk^2)}\cos\theta}. \tag{19}$$

É evidente, a partir de (19), que a órbita é uma elipse, uma parábola ou uma hipérbole segundo $E < 0$, $E = 0$, $E > 0$. É pois claro que a natureza da órbita é completamente determinada pela sua energia total E. Conclui-se que os planetas no sistema solar têm energias negativas e se movem em elipses, e que os corpos que atravessam o sistema solar têm energias positivas e viajam por trajetórias hiperbólicas. É interessante saber que se um planeta como a Terra pudesse ser empurrado para frente, suficientemente forte para acelerá-lo e elevar sua energia total a $E > 0$, ele entraria em órbita hiperbólica e abandonaria o sistema solar.

Os Períodos de Revolução dos Planetas Restringiremos agora nossa atenção ao caso em que m tem uma órbita elíptica (Fig. 22.20) cujas equações polar e retangular são (15) e

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

É bem conhecido da Geometria Analítica Elementar que $e = c/a$ e $c^2 = a^2 - b^2$, ou seja $e^2 = (a^2 - b^2)/a^2$ e

$$b^2 = a^2(1 - e^2). \tag{20}$$

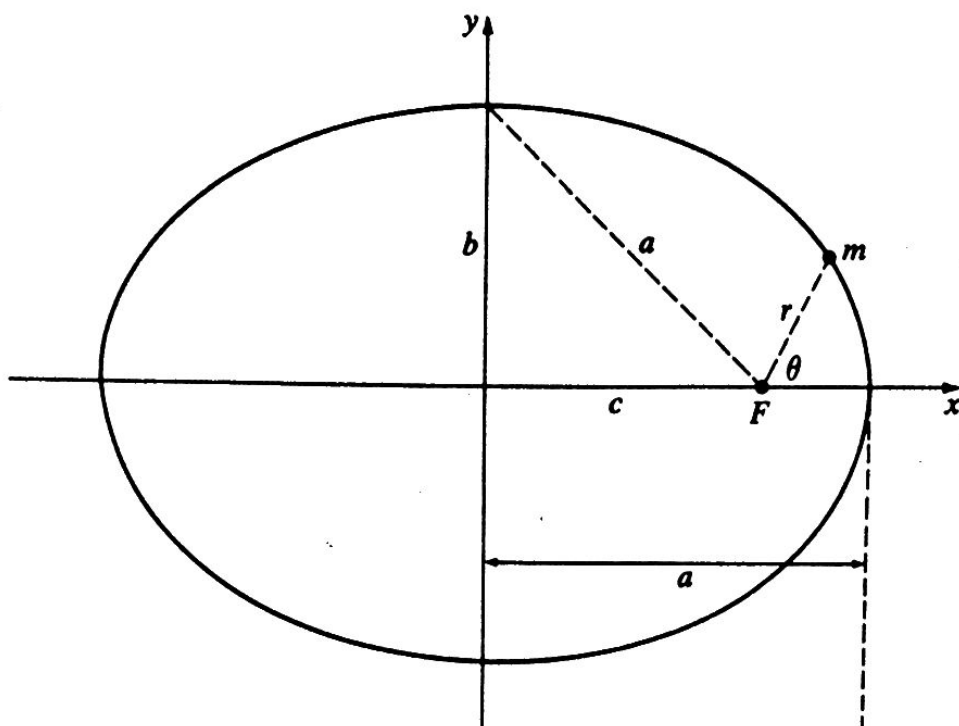



Figura 22.20

A distância média a de m medida do foco F é metade da soma dos valores menor e maior de r; assim (15) e (20) dão

$$a = \frac{1}{2}\left(\frac{h^2/k}{1+e} + \frac{h^2/k}{1-e}\right) = \frac{h^2}{k(1-e^2)} = \frac{h^2a^2}{kb^2},$$

e teremos

$$b^2 = \frac{h^2 a}{k}. \tag{21}$$

Se T for o período de m (isto é, o tempo necessário para uma revolução completa em sua órbita), então, sendo a área da elipse πab, segue-se de (10) que $\pi ab = hT/2$. Em função de (21), obtemos

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{h^2} = \left(\frac{4\pi^2}{k}\right) a^3. \tag{22}$$

No tratamento idealizado apresentado, a constante $k = GM$ depende da massa central M, mas não de m, de modo que (22) se aplica a todos os planetas de nosso sistema solar e podemos enunciar a Terceira Lei de Kepler: os quadrados dos períodos de revolução dos planetas são proporcionais aos cubos de suas distâncias médias. As idéias desta seção são devidas primariamente a Newton. Contudo, os argumentos apresentados aqui são bastante diferentes de sua discussão original, uma vez que ele não fez uso explícito de métodos de cálculo.

Problemas

1. Mostre que as primeiras duas leis de Kepler na forma das equações (8) e (15) implicam que m é atraída para a origem com uma força cuja amplitude é inversamente proporcional ao quadrado de R. Esta foi a descoberta fundamental de Newton, porque lhe permitiu propor sua Lei de Gravitação e investigar suas conseqüências.

2. Mostre que a velocidade v de um planeta em qualquer ponto de sua órbita é dada por

$$v^2 = k\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right).$$

3. Suponha que a Terra exploda em fragmentos que se deslocam à mesma velocidade (relativa ao Sol) em diferentes direções, em órbitas próprias. Mostre que todos os fragmentos que não caírem no Sol se reunirão mais tarde num mesmo ponto.

22.4 SISTEMAS DE EQUAÇÕES DE PRIMEIRA ORDEM

Observações Gerais sobre Sistemas

Um dos conceitos mais fundamentais de análise é o de um sistema de n equações diferenciais simultâneas de primeira ordem.

Se $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ são funções desconhecidas de uma mesma variável independente x, então o sistema mais geral com interesse para nós é aquele em que suas derivadas $y_1', y_2', \ldots, y_n'$ são explicitamente dadas como funções de x e de $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

$$\begin{aligned}
y_1' &= f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\
y_2' &= f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\
&\cdots \\
y_n' &= f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n).
\end{aligned} \tag{1}$$

Sistemas de equações diferenciais aparecem naturalmente em muitos problemas científicos. No exemplo abaixo veremos que elas ocorrem em conexão com sistemas dinâmicos de diferentes graus de liberdade; as usaremos mais adiante para analisar uma comunidade biológica simples formada por diferentes espécies de animais interagindo uns com os outros.

Uma razão matemática importante para o estudo de sistemas é que a simples equação de ordem n

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \tag{2}$$

pode sempre ser vista como um caso especial de (1). Para verificar isto fazemos

$$y_1 = y, \qquad y_2 = y', \qquad \ldots, \qquad y_n = y^{(n-1)} \tag{3}$$

e observamos que (2) é equivalente ao sistema

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_3 \\ &\ldots \\ y_n' &= f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \end{aligned} \tag{4}$$

que é, claramente, um caso especial de (1). A afirmação de que (2) e (4) são equivalentes é entendida como significando o seguinte: se $y(x)$ for a solução da equação (2), então as funções $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ definidas em (3) satisfazem (4); e inversamente, se $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ satisfizerem (4), então $y(x)$ será a solução de (2). Essa transformação de uma equação de ordem n num sistema de n equações de primeira ordem tem diversas aplicações. Ilustraremos mostrando a existência de teoremas básicos e idênticos para o sistema (1) e para a equação (2).

Se for escolhido um ponto fixo $x = x_0$ e se os valores de funções desconhecidas

$$y_1(x_0) = a_1, \qquad y_2(x_0) = a_2, \qquad \ldots, \qquad y_n(x_0) = a_n \tag{5}$$

forem dados arbitrariamente de modo que as funções $f_1, f_2 \ldots f_n$ sejam definidas, então (1) dá o valor das derivadas $y_1'(x_0), y_2'(x_0), \ldots, y_n'(x_0)$. A similaridade entre essa situação e a discutida anteriormente sugere a seguinte analogia com o Teorema de Picard.

Teorema A *Suponhamos que as funções* $f_1, f_2, \ldots, f_n$ *e as derivadas parciais* $\partial f_1/\partial y_1, \ldots, \partial f_1/\partial y_n, \ldots, \partial f_n/\partial y_1, \ldots \partial f_n/\partial y_n$, *sejam contínuas numa região* R *do espaço* $(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$. *Se* $(x_0, a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *for um ponto interior de* R, *então o sistema (1) tem uma solução única* $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ *que satisfaz as condições iniciais (5).*

Não iremos provar esse teorema mas, em vez disso, mostraremos que quando as condições forem devidamente preparadas, a prova será idêntica à do Teorema de Picard. Além disso, pela redução feita acima, o Teorema A inclui um caso especial, que é o teorema correspondente à equação (2).

Teorema B *Suponhamos que a função* f *e suas derivadas parciais* $\partial f/\partial y, \partial f/\partial y', \ldots, \partial f/\partial y^{(n-1)}$ *sejam contínuas numa região* R *do espaço* $(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$. *Se* $(x_0, a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *for um ponto interior de* R, *então a equação (2) tem uma solução única* $y(x)$ *que satisfaz a condição inicial* $y(x_0) = a_1,\ y'(x_0) = a_2, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = a_n$.

Consideremos o famoso problema de n corpos da mecânica clássica como mais uma ilustração da importância de reduzir equações de ordem elevada para sistemas de equações de primeira ordem.

Suponhamos que n partículas com massa m estejam localizadas nos pontos (x_i, y_i, z_i) e consideremos que elas se atraem de acordo com a Lei da Gravitação de Newton. Se r_{ij} for a distância entre m_i e m_j, e se θ for o ângulo entre o eixo positivo x e o segmento que as une (Fig. 22.21), então a componente x da força exercida em m_i por m_j é

$$\frac{Gm_i m_j}{r_{ij}^2} \cos\theta = \frac{Gm_i m_j (x_j - x_i)}{r_{ij}^3},$$

onde G é a constante gravitacional. Uma vez que a soma dessas componentes para todo $j \neq i$ iguala $m_i(d^2x/dt^2)$, temos n equações de segunda ordem

$$\frac{d^2x_i}{dt^2} = G \sum_{j \neq i} \frac{m_j(x_j - x_i)}{r_{ij}^3},$$

e, similarmente,

$$\frac{d^2y_i}{dt^2} = G \sum_{j \neq i} \frac{m_j(y_j - y_i)}{r_{ij}^3}$$

e

$$\frac{d^2z_i}{dt^2} = G \sum_{j \neq i} \frac{m_j(z_j - z_i)}{r_{ij}^3}.$$

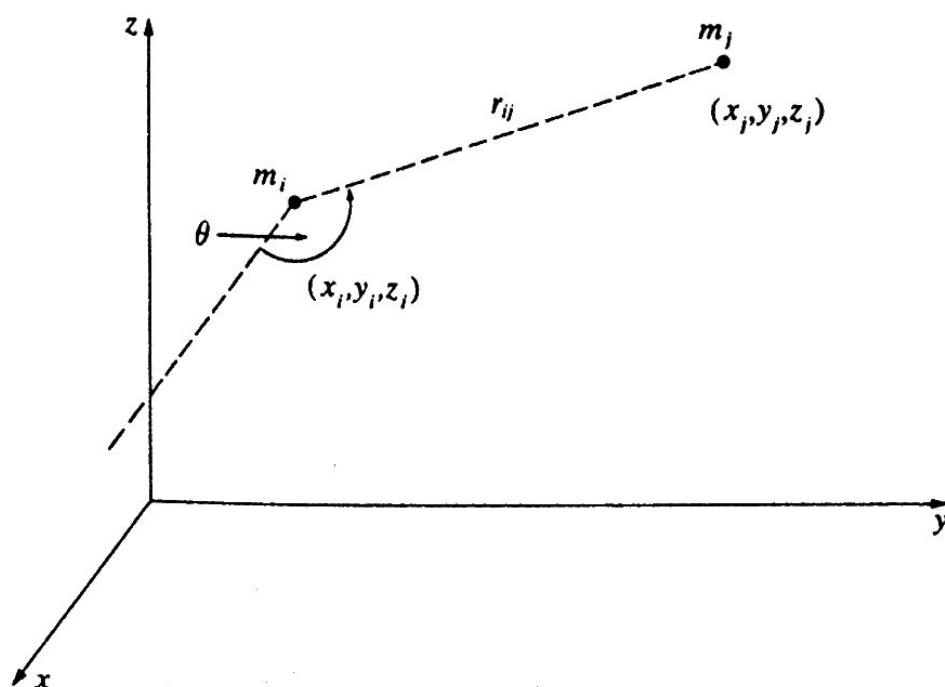



Figura 22.21

Se fizermos $v_{xi} = dx_i/dt$, $v_{yi} = dy_i/dt$ e $v_{zi} = dz_i/dt$ e aplicarmos a redução, então obteremos um sistema de $6n$ equações na forma (1) nas funções desconhecidas $x_1, v_{x1}, \ldots, x_n, v_{xn}, v_1, v_{y1}, \ldots, y_n, v_{yn}, z_1, v_{z1}, \ldots, z_n, v_{zn}$. Se fizermos agora uso do fato de que

$$r_{ij}^3 = [(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2]^{\frac{3}{2}},$$

então o Teorema A leva à seguinte conclusão: se as posições iniciais e as velocidades iniciais das partículas, isto é, se os valores das funções desconhecidas num certo instante $t = t_0$, forem dados, e se as partículas não colidem no sentido em que os r_{ij} não se anulam, então suas posições e velocidades subseqüentes estarão determinadas univocamente. Essa conclusão apóia a filosofia do mecanismo determinístico, que já gozou de popularidade, de acordo com a qual o universo é nada mais nada menos do que uma máquina gigantesca cujo futuro está inexoravelmente determinado pelo seu estado num dado momento*.

---

* Isto também levou Sir James Jeans a definir o universo como um "sistema auto-solucionável de $6N$ equações diferenciais simultâneas, onde N é o número de Eddington". Sir Arthur Eddington assegurou (com mais poesia do que verdade) que

$$N = \frac{3}{2} \times 136 \times 2^{256}$$

é o número total de partículas de matéria no universo. Ver Jeans, *The Astronomical Horizon*, Oxford University Press, London, 1945; ou Eddington, *The Expanding Universe*, Cambridge University Press, London, 1952.

Problemas

1. Substitua cada uma das seguintes equações diferenciais por um sistema equivalente de equações de primeira ordem:

   (a) $y'' - x^2y' - xy = 0$;
   (b) $y''' = y'' - x^2(y')^2$.

2. Se uma partícula de massa m se move no plano xy, suas equações do movimento são

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = f(t,x,y) \qquad \text{e} \qquad m\frac{d^2y}{dt^2} = g(t,x,y),$$

onde f e g representam as componentes nos eixos x e y, respectivamente, da força atuando na partícula. Substitua esse sistema de duas equações por um sistema equivalente com quatro equações na forma (1).

Sistemas Lineares

Para salvaguarda da conveniência e clareza, restringiremos nossa atenção pelo resto da seção a sistemas com apenas duas equações de primeira ordem com duas funções desconhecidas, na forma

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = F(t,x,y) \\ \dfrac{dy}{dt} = G(t,x,y). \end{cases} \tag{1}$$

A chave é usada para enfatizar a ligação das equações entre si; a escolha da letra t para a variável independente, e de x e y, para variáveis dependentes, é costume nesses casos.

Especializar-nos-emos a seguir em sistemas lineares na forma

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_1(t)x + b_1(t)y + f_1(t) \\ \dfrac{dy}{dt} = a_2(t)x + b_2(t)y + f_2(t). \end{cases} \tag{2}$$

Consideraremos na nossa discussão e nos teoremas apresentados abaixo que as funções $a_i(t)$, $b_i(t)$ e $f_i(t)$, $i = 1, 2$, são contínuas num intervalo fechado $[a, b]$ do eixo t. Se $f_1(t)$ e $f_2(t)$ forem nulas, então o sistema (2) é chamado *homogêneo;* de outro modo, o sistema será chamado *não-homogêneo*. A solução de (2) em $[a, b]$ é, sem dúvida, um par de funções $x(t)$ e $y(t)$ que satisfazem ambas as equações de (2) no intervalo. Poderemos escrever a solução na forma

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t). \end{cases}$$

Então, é fácil verificar que o sistema linear homogêneo (com coeficientes constantes)

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x - y \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = 2x + y \end{cases} \tag{3}$$

tem ambas as duplas

$$\begin{cases} x = e^{3t} \\ y = e^{3t} \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x = e^{2t} \\ y = 2e^{2t} \end{cases} \tag{4}$$

como soluções em algum intervalo fechado.

Daremos agora um breve esboço da teoria geral dos sistemas lineares (2).

Ver-se-á que essa teoria é muito similar à das equações de segunda ordem descritas anteriormente. Comecemos por estabelecer o Teorema Fundamental de Existência e Unicidade que apresentaremos aqui sem demonstração.

Teorema A *Se t_0 for algum ponto do intervalo $[a, b]$ e se x_0 e y_0 são quaisquer números, então (2) tem uma e uma só solução*

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \end{cases}$$

válida para o intervalo $[a, b]$, essa solução é tal que $x(t_0) = x_0$ e $y(t_0) = y_0$.

A seguir estudaremos a estrutura das soluções dos sistemas homogêneos obtidos a partir de (2) pela remoção dos termos $f_1(t)$ e $f_2(t)$:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_1(t)x + b_1(t)y \\ \dfrac{dy}{dt} = a_2(t)x + b_2(t)y. \end{cases} \tag{5}$$

É óbvio que (5) é satisfeito pela chamada *solução trivial,* na qual $x(t)$ e $y(t)$ são ambas identicamente nulas. Nossa maior ferramenta para construir soluções mais úteis está no seguinte teorema:

Teorema B *Se o sistema homogêneo (5) tiver duas soluções*

$$\begin{cases} x = x_1(t) \\ y = y_1(t) \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x = x_2(t) \\ y = y_2(t) \end{cases} \tag{6}$$

em $[a, b]$, *então*

$$\begin{cases} x = c_1x_1(t) + c_2x_2(t) \\ y = c_1y_1(t) + c_2y_2(t) \end{cases} \tag{7}$$

será também uma solução de (5) em $[a, b]$ *para quaisquer constantes* c_1 *e* c_2.

Prova. A demonstração é uma rotina de verificação e será deixada ao leitor.

A solução (7) é obtida a partir de um par de soluções (6) pela multiplicação da primeira por c_1, da segunda por c_2, e somando-se; (7) é chamada *combinação linear* das soluções (6). Com essa terminologia, podemos enunciar o Teorema B como se segue: qualquer combinação linear de duas soluções do sistema homogêneo (5) é também uma solução. Do mesmo modo, (3) tem

$$\begin{cases} x = c_1e^{3t} + c_2e^{2t} \\ y = c_1e^{3t} + 2c_2e^{2t} \end{cases} \tag{8}$$

como solução para toda escolha das constantes c_1 e c_2.

Estabeleceremos que (7) contém todas as soluções de (5) em $[a, b]$, isto é, que ela é a solução geral de (5) em $[a, b]$. Pelo Teorema A, (7) será a solução geral se as constantes c_1 e c_2 puderem ser escolhidas de forma a satisfazer condições arbitrárias $x(t_0) = x_0$ e $y(t_0) = y_0$ para um ponto arbitrário t_0 em $[a, b]$ ou, equivalentemente, se o sistema de equações algébricas lineares

$$c_1x_1(t_0) + c_2x_2(t_0) = x_0$$
$$c_1y_1(t_0) + c_2y_2(t_0) = y_0$$

nas incógnitas c_1 e c_2 puder ser resolvido para todo t_0 em $[a, b]$ e para todo o par de números x_0 e y_0. Pela teoria elementar dos determinantes isto é possível quando o determinante dos coeficientes

$$W(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{vmatrix}$$

não se anula no intervalo $[a, b]$. Esse determinante é o wronskiano das duas soluções (6), e as observações acima provam o seguinte teorema:

Teorema C *Se as duas soluções de (6) do sistema homogêneo (5) têm um wronskiano $W(t)$ que não se anula no intervalo $[a, b]$, então (7) é a solução geral de (5) nesse intervalo.*

Segue-se, desse teorema, que (8) é a solução geral de (3) em algum intervalo fechado, porque o wronskiano das duas soluções (4) é

$$W(t) = \begin{vmatrix} e^{3t} & e^{2t} \\ e^{3t} & 2e^{2t} \end{vmatrix} = e^{5t},$$

o qual nunca se anula. É útil conhecer, como esse exemplo sugere, que a anulação ou não-anulação do wronskiano $W(t)$ das duas soluções não depende da escolha de t. O seguinte teorema estabelece isto formalmente:

Teorema D *Se $W(t)$ é o wronskiano das duas soluções (6) do sistema homogêneo (5), então $W(t)$ é, ou identicamente nula, ou não se anula em nenhum ponto de $[a, b]$.*

Prova. Um cálculo simples mostra que $W(t)$ satisfaz a equação diferencial de primeira ordem

$$\frac{dW}{dt} = [a_1(t) + b_2(t)]\,W, \tag{9}$$

a partir da qual se segue que

$$W(t) = c\, e^{\int [a_1(t) + b_2(t)]\, dt} \tag{10}$$

para alguma constante c. A conclusão desse teorema é agora evidente a partir do fato de que o fator exponencial em (10) nunca se anula em $[a, b]$.

O Teorema C propicia um meio para verificar que (7) é a solução geral de (5): mostra que o wronskiano $W(t)$ das duas soluções (6) não se anula. Desenvolveremos agora um teste que é, muitas vezes, mais direto e conveniente.

As duas soluções (6) são chamadas *linearmente dependentes* em $[a, b]$ se uma é uma constante vezes a outra, no sentido de que

$$\begin{aligned} x_1(t) &= kx_2(t) \\ y_1(t) &= ky_2(t) \end{aligned} \qquad \text{ou} \qquad \begin{aligned} x_2(t) &= kx_1(t) \\ y_2(t) &= ky_1(t) \end{aligned}$$

para alguma constante k e para qualquer t em $[a, b]$; elas são ditas *linearmente independentes* se nenhuma é uma constante vezes a outra. É claro que a dependência linear é equivalente à condição de que existam duas constantes c_1 e c_2, pelo menos uma das quais não-nula, tais que

$$\begin{aligned} c_1x_1(t) + c_2x_2(t) &= 0 \\ c_1y_1(t) + c_2y_2(t) &= 0 \end{aligned} \tag{11}$$

para todos os t de $[a, b]$.

Teorema E *Se as duas soluções (6) do sistema homogêneo (5) são linearmente independentes em $[a, b]$, então (7) é a solução geral de (5) nesse intervalo.*

Prova. Em vista do Teorema C e D, é suficiente mostrar que as soluções (6) são linearmente dependentes se e somente se seu $W(t)$ é nulo. Comecemos por admitir que elas são linearmente dependentes, isto é,

$$\begin{aligned} x_1(t) &= kx_2(t) \\ y_1(t) &= ky_2(t). \end{aligned} \tag{12}$$

Então

$$\begin{aligned} W(t) &= \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} kx_2(t) & x_2(t) \\ ky_2(t) & y_2(t) \end{vmatrix} \\ &= kx_2(t)y_2(t) - kx_2(t)y_2(t) = 0 \end{aligned}$$

para todos os t em $[a, b]$. O mesmo argumento se aplica se a constante k estiver no outro lado das equações (12). Consideremos agora que $W(t)$ é nulo e mostremos que as soluções (6) são linearmente dependentes no sentido das equações (11). Tomemos t_0, um ponto qualquer de $[a, b]$. Desde que $W(t_0) = 0$, então o sistema de equações algébricas lineares

$$\begin{aligned} c_1x_1(t_0) + c_2x_2(t_0) &= 0 \\ c_1y_1(t_0) + c_2y_2(t_0) &= 0 \end{aligned}$$

tem uma solução c_1, c_2 sendo que esses números não são ambos zero. Então a solução de (5) dada por

$$\begin{cases} x = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) \\ y = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) \end{cases} \tag{13}$$

iguala a solução trivial para t. A partir da parte da unicidade do Teorema A, segue-se que (13) deve igualar a solução trivial no intervalo $[a, b]$, como (11) afirma, e a prova está completa.

O valor desse teste é que num problema específico é apenas uma matéria de inspeção decidir se as duas soluções de (5) são linearmente independentes ou não.

Voltemos agora ao sistema não-homogêneo (2) e concluiremos nossa discussão com

Teorema F *Se as duas soluções de (6) do sistema homogêneo (5) são linearmente independentes em* $[a, b]$, *e se*

$$\begin{cases} x = x_p(t) \\ y = y_p(t) \end{cases}$$

é uma solução particular de (2) nesse intervalo, então

$$\begin{cases} x = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + x_p(t) \\ y = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + y_p(t) \end{cases} \tag{14}$$

é a solução geral de (2) em $[a, b]$.

Prova: É suficiente mostrar que se

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

é uma solução arbitrária de (2), então

$$\begin{cases} x = x(t) - x_p(t) \\ y = y(t) - y_p(t) \end{cases}$$

é a solução de (5), e isto nós deixamos ao leitor.

O tratamento dado acima ao sistema linear (2) mostra como sua solução geral (14) pode ser construída por peças simples. Mas como encontramos essas peças? Infelizmente – como no caso das equações lineares de segunda ordem – não existem métodos gerais que funcionem sempre. Discutiremos a seguir um caso especial em que esse problema pode ser resolvido: aquele em que os coeficientes $a_i(t)$ e $b_i(t)$, $i = 1, 2$ são constantes.

Problemas

1. Demonstre o Teorema B.

2. Acabe a Prova do Teorema F.

3. Verifique a equação (9).

4. Considere a equação linear de segunda ordem

$$\frac{d^2x}{dt^2} + P(t)\frac{dx}{dt} + Q(t)x = 0 \tag{*}$$

reduzida ao sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = -Q(t)x - P(t)y. \end{cases} \tag{**}$$

Se $x_1(t)$ e $x_2(t)$ são soluções da equação (*) e se

$$\begin{cases} x = x_1(t) \\ y = y_1(t) \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x = x_2(t) \\ y = y_2(t) \end{cases}$$

são as correspondentes soluções de (**), mostre que o wronskiano da primeira no sentido demonstrado em "Observações Gerais sobre Sistemas" é precisamente o wronskiano da segunda no sentido aqui descrito.

5. (a) Mostre que

$$\begin{cases} x = e^{4t} \\ y = e^{4t} \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x = e^{-2t} \\ y = -e^{-2t} \end{cases}$$

são soluções do sistema homogêneo

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 3y \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + y. \end{cases}$$

(b) Mostre de duas maneiras que as soluções dadas do sistema em (a) são linearmente independentes num intervalo fechado e escreva a solução geral para esse sistema.

(c) Encontre uma solução particular

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

do sistema para o qual $x(0) = 5$ e $y(0) = 1$.

6. (a) Mostre que

$$\begin{cases} x = 2e^{4t} \\ y = 3e^{4t} \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x = e^{-t} \\ y = -e^{-t} \end{cases}$$

são soluções do sistema homogêneo

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 2y. \end{cases}$$

(b) Mostre de duas maneiras que as soluções dadas do sistema em (a) são linearmente independentes num intervalo fechado e escreva a solução geral do sistema.

(c) Mostre que

$$\begin{cases} x = 3t - 2 \\ y = -2t + 3 \end{cases}$$

é solução particular do sistema não-homogêneo

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 2y + t - 1 \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 2y - 5t - 2 \end{cases}$$

e escreva a solução geral desse sistema.

7. Obtenha as soluções dadas do sistema homogêneo no Problema 6:

   (a) por diferenciação da primeira equação com relação a t e eliminando y;

   (b) por diferenciação da segunda equação em relação a t e eliminando x;

8. Use o método sugerido no Problema 7 para calcular a solução geral do sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = y. \end{cases}$$

9. (a) Calcule a solução geral do sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x \\ \dfrac{dy}{dt} = y. \end{cases}$$

   (b) Mostre que qualquer equação de segunda ordem obtida a partir do sistema em (a) não é equivalente ao sistema, no sentido em que esta tem solução que não é parte de nenhuma solução do sistema. Assim, embora equações de ordem superior sejam equivalentes a sistemas, o reverso não é verdadeiro e sistemas são mais gerais.

Sistemas Lineares Homogêneos com Coeficientes Constantes

Estamos agora em condições de dar uma solução completa e explícita ao sistema simples

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_1 x + b_1 y \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = a_2 x + b_2 y, \end{cases} \tag{1}$$

onde a_1, b_1, a_2, e b_2 são constantes dadas. Alguns dos problemas imediatamente anteriores ilustravam um procedimento que pode muitas vezes ser aplicado nesse caso: diferenciar uma equação, eliminar uma das variáveis dependentes e resolver a equação linear de segunda ordem resultante. O método que agora descreveremos baseia-se na construção de um par de soluções linearmente independentes a partir de um dado sistema.

Recordando que a função exponencial tem a propriedade de que as suas derivadas são constantes vezes a própria função, então é natural procurar soluções de (1) sob a forma

$$\begin{cases} x = Ae^{mt} \\ y = Be^{mt}. \end{cases} \tag{2}$$

Se substituirmos (2) em (1), obteremos

$$Ame^{mt} = a_1 Ae^{mt} + b_1 Be^{mt}$$
$$Bme^{mt} = a_2 Ae^{mt} + b_2 Be^{mt};$$

Dividindo-se ambos os membros por e^{mt} chegamos ao sistema algébrico linear

$$\begin{aligned} (a_1 - m)A + b_1 B &= 0 \\ a_2 A + (b_2 - m)B &= 0 \end{aligned} \tag{3}$$

com A e B desconhecidos. É claro que (3) tem uma solução trivial $A = B = 0$, que transforma (2) em solução trivial de (1). Uma vez que procuramos uma solução não-trivial para (1), isto não nos ajuda. Contudo, sabemos que (3) tem soluções não-triviais desde que o determinante dos coeficientes se anule, isto é,

$$\begin{vmatrix} a_1 - m & b_1 \\ a_2 & b_2 - m \end{vmatrix} = 0.$$

Expandindo esse determinante, obteremos a equação quadrática

$$m^2 - (a_1 + b_2)m + (a_1b_2 - a_2b_1) = 0 \tag{4}$$

na incógnita m. Por analogia com nosso trabalho anterior, a chamaremos de *equação auxiliar* do sistema (1). Sejam m_1 e m_2 raízes de (4). Se substituirmos m em (3) por m_1, então saberemos que a equação resultante tem uma solução não-trivial A_1, B_1, e assim

$$\begin{cases} x = A_1e^{m_1t} \\ y = B_1e^{m_1t}. \end{cases} \tag{5}$$

Procedendo similarmente com m_2, encontramos outra solução não-trivial

$$\begin{cases} x = A_2e^{m_2t} \\ y = B_2e^{m_2t} \end{cases} \tag{6}$$

Para nos assegurarmos de que obtivemos duas soluções linearmente independentes, é necessário examinar em detalhes as três possibilidades para m_1 e m_2.

Raízes reais distintas Quando m_1 e m_2 são reais e distintas, então (5) e (6) são facilmente reconhecíveis (por quê?) como linearmente independentes e

$$\begin{cases} x = c_1A_1e^{m_1t} + c_2A_2e^{m_2t} \\ y = c_1B_1e^{m_1t} + c_2B_2e^{m_2t} \end{cases} \tag{7}$$

é a solução geral de (1).

Exemplo 1 No caso do sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = 4x - 2y, \end{cases} \tag{8}$$

(3) é

$$\begin{aligned} (1 - m)A + B &= 0 \\ 4A + (-2 - m)B &= 0. \end{aligned} \tag{9}$$

A equação auxiliar aqui é

$$m^2 + m - 6 = 0 \qquad \text{ou} \qquad (m + 3)(m - 2) = 0,$$

de modo que m_1 e m_2 são -3 e 2. Com $m = -3$, (9) torna-se

$$4A + B = 0$$
$$4A + B = 0.$$

Uma solução simples não-trivial desse sistema é $A = 1, B = -4$, de modo que temos

$$\begin{cases} x = e^{-3t} \\ y = -4e^{-3t} \end{cases} \tag{10}$$

como uma solução não-trivial de (8). Com $m = 2$, (9) se torna

$$-A + B = 0$$
$$4A - 4B = 0,$$

e uma solução simples não-trivial é $A = 1$ e $B = 1$. Isto leva a

$$\begin{cases} x = e^{2t} \\ y = e^{2t} \end{cases} \tag{11}$$

como outra solução de (8); e, uma vez que é claro que (10) e (11) são linearmente independentes,

$$\begin{cases} x = c_1e^{-3t} + c_2e^{2t} \\ y = -4c_1e^{-3t} + c_2e^{2t} \end{cases} \tag{12}$$

é a solução geral de (8).

Raízes complexas distintas Se m_1 e m_2 são números complexos distintos, então podem ser escritos na forma $a \pm ib$, onde a e b são números reais e $b \neq 0$. Nesse caso, esperamos que A e B obtidos a partir de (3) sejam números complexos e teremos duas soluções linearmente independentes:

$$\begin{cases} x = A_1{}^* e^{(a+ib)t} \\ y = B_1{}^* e^{(a+ib)t} \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x = A_2{}^* e^{(a-ib)t} \\ y = B_2{}^* e^{(a-ib)t} \end{cases} \tag{13}$$

Contudo, essas são soluções complexas, e é necessário calcular as soluções reais. Expressando os números A_1^* e B_1^* na forma padrão $A_1^* = A_1 + iA_2$ e $B_1^* = B_1 + iB_2$, e usando a expressão de Euler (7) então a primeira das soluções (13) pode ser escrita como

$$\begin{cases} x = (A_1 + iA_2)e^{at}(\cos bt + i \operatorname{sen} bt) \\ y = (B_1 + iB_2)e^{at}(\cos bt + i \operatorname{sen} bt) \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} x = e^{at}[(A_1 \cos bt - A_2 \operatorname{sen} bt) + i(A_1 \operatorname{sen} bt + A_2 \cos bt)] \\ y = e^{at}[(B_1 \cos bt - B_2 \operatorname{sen} bt) + i(B_1 \operatorname{sen} bt + B_2 \cos bt)]. \end{cases} \tag{14}$$

É fácil ver que se um par de funções complexas for solução de (1), na qual os coeficientes são constantes reais, então suas duas partes reais e suas duas partes imaginárias serão soluções reais. Segue-se disto que (14) leva a duas soluções reais

$$\begin{cases} x = e^{at}(A_1 \cos bt - A_2 \operatorname{sen} bt) \\ y = e^{at}(B_1 \cos bt - B_2 \operatorname{sen} bt) \end{cases} \tag{15}$$

e

$$\begin{cases} x = e^{at}(A_1 \operatorname{sen} bt + A_2 \cos bt) \\ y = e^{at}(B_1 \operatorname{sen} bt + B_2 \cos bt). \end{cases} \tag{16}$$

Pode-se mostrar que essas soluções são linearmente independentes (pediremos isto ao leitor no Problema 3) e a solução geral nesse caso é

$$\begin{cases} x = e^{at}[c_1(A_1 \cos bt - A_2 \operatorname{sen} bt) + c_2(A_1 \operatorname{sen} bt + A_2 \cos bt)] \\ y = e^{at}[c_1(B_1 \cos bt - B_2 \operatorname{sen} bt) + c_2(B_1 \operatorname{sen} bt + B_2 \cos bt)]. \end{cases} \tag{17}$$

Uma vez que já achamos a solução geral, não é necessário considerar a segunda das duas soluções (13).

Raízes reais iguais Quando m_1 e m_2 têm o mesmo valor m, então (5) e (6) não são linearmente independentes e teremos essencialmente uma só solução

$$\begin{cases} x = Ae^{mt} \\ y = Be^{mt}. \end{cases} \tag{18}$$

Nossa experiência leva-nos a esperar que uma segunda solução linearmente independente possa ser encontrada sob a forma

$$\begin{cases} x = Ate^{mt} \\ y = Bte^{mt}. \end{cases}$$

Infelizmente esse assunto não é tão simples assim, e devemos procurar por uma segunda solução sob a forma

$$\begin{cases} x = (A_1 + A_2 t)e^{mt} \\ y = (B_1 + B_2 t)e^{mt}, \end{cases} \tag{19}$$

de modo que a solução geral é

$$\begin{cases} x = c_1 Ae^{mt} + c_2(A_1 + A_2 t)e^{mt} \\ y = c_1 Be^{mt} + c_2(B_1 + B_2 t)e^{mt}.^* \end{cases} \tag{20}$$

As constantes A_1, A_2, B_1 e B_2 são achadas substituindo-se (19) no sistema (1). Em vez de tentar desenvolver a expressão no caso geral, ilustremos o método num exemplo simples.

Exemplo 2 No caso do sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - 4y \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y, \end{cases} \tag{21}$$

(3) é

$$\begin{aligned} (3 - m)A - 4B &= 0 \\ A + (-1 - m)B &= 0. \end{aligned} \tag{22}$$

---

* A única exceção a essa afirmação ocorre quando $a_1 = b_2 = a$ e $a_2 = b_1 = 0$, de modo que a equação auxiliar é $m^2 - 2am + a^2 = 0$, $m = a$, e as constantes A e B em (18) são completamente irrestritas. Nesse caso, a solução geral de (1) é, obviamente,

$$\begin{cases} x = c_1 e^{mt} \\ y = c_2 e^{mt}, \end{cases}$$

e o sistema é dito *não-acoplado* (uma vez que cada equação pode ser resolvida independentemente da outra).

A equação auxiliar é

$$m^2 - 2m + 1 = 0 \qquad \text{ou} \qquad (m-1)^2 = 0,$$

que tem raízes reais iguais a 1. Com $m = 1$, (22) se torna

$$\begin{aligned} 2A - 4B &= 0 \\ A - 2B &= 0. \end{aligned}$$

Uma solução simples não-trivial desse sistema é $A = 2, B = 1$, então

$$\begin{cases} x = 2e^t \\ y = e^t \end{cases} \tag{23}$$

é uma solução não-trivial de (21). Procuremos agora uma segunda solução linearmente independente na forma

$$\begin{cases} x = (A_1 + A_2 t)e^t \\ y = (B_1 + B_2 t)e^t. \end{cases} \tag{24}$$

Substituindo-se em (21), obtemos

$$\begin{aligned} (A_1 + A_2 t + A_2)e^t &= 3(A_1 + A_2 t)e^t - 4(B_1 + B_2 t)e^t \\ (B_1 + B_2 t + B_2)e^t &= (A_1 + A_2 t)e^t - (B_1 + B_2 t)e^t, \end{aligned}$$

o que se reduz a

$$\begin{aligned} (2A_2 - 4B_2)t + (2A_1 - A_2 - 4B_1) &= 0 \\ (A_2 - 2B_2)t + (A_1 - 2B_1 - B_2) &= 0. \end{aligned}$$

Desde que essas expressões são identidades em t, temos

$$\begin{aligned} 2A_2 - 4B_2 &= 0 \qquad & 2A_1 - A_2 - 4B_1 &= 0 \\ A_2 - 2B_2 &= 0, \qquad & A_1 - 2B_1 - B_2 &= 0. \end{aligned}$$

As duas equações à esquerda têm $A_2 = 2, B_2 = 1$ como uma solução simples não-trivial. Com isto, as duas equações à direita tornam-se

$$\begin{aligned} 2A_1 - 4B_1 &= 2 \\ A_1 - 2B_1 &= 1, \end{aligned}$$

de modo que podemos admitir $A_1 = 1$, $B_1 = 0$. Inserimos esses números em (24) e obtemos

$$\begin{cases} x = (1 + 2t)e^t \\ y = te^t \end{cases} \tag{25}$$

com nossa segunda solução. É óbvio que (23) e (25) são linearmente independentes, donde

$$\begin{cases} x = 2c_1e^t + c_2(1 + 2t)e^t \\ y = c_1e^t + c_2te^t \end{cases} \tag{26}$$

é a solução geral do sistema (21).

Problemas

1. Use os métodos descritos nesta seção para calcular a solução geral dos seguintes sistemas:

(a) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -3x + 4y \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + 3y; \end{cases}$

(b) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x - 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = 5x + 2y; \end{cases}$

(c) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x + 4y \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + y; \end{cases}$

(d) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x - 3y \\ \dfrac{dy}{dt} = 8x - 6y; \end{cases}$

(e) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x \\ \dfrac{dy}{dt} = 3y; \end{cases}$

(f) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -4x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 2y; \end{cases}$

(g) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 7x + 6y \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 6y; \end{cases}$

(h) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 5y. \end{cases}$

2. Mostre que a condição $a_2 b_1 > 0$ é suficiente, mas não necessária, para que o sistema (1) tenha duas soluções reais linearmente independentes na forma (2).

3. Mostre que o wronskiano das duas soluções (15) e (16) é dado por

$$W(t) = (A_1 B_2 - A_2 B_1)e^{2at},$$

e prove que $A_1 B_2 - A_2 B_1 \neq 0$.

4. Mostre que, na fórmula (20), as constantes A_2 e B_2 satisfazem o mesmo sistema algébrico linear que as constantes A e B, e que, conseqüentemente, podemos fazer $A_2 = A$ e $B_2 = B$ sem nenhuma perda de generalidade.

5. Considere o sistema linear não-homogêneo

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_1(t)x + b_1(t)y + f_1(t) \\ \dfrac{dy}{dt} = a_2(t)x + b_2(t)y + f_2(t) \end{cases} \tag{*}$$

e o sistema homogêneo correspondente

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_1(t)x + b_1(t)y \\ \dfrac{dy}{dt} = a_2(t)x + b_2(t)y. \end{cases} \tag{**}$$

(a) Se

$$\begin{cases} x = x_1(t) \\ y = y_1(t) \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x = x_2(t) \\ y = y_2(t) \end{cases}$$

forem soluções linearmente independentes de (**), isto é, se

$$\begin{cases} x = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) \\ y = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) \end{cases}$$

for a solução geral, mostre que

$$\begin{cases} x = v_1(t)x_1(t) + v_2(t)x_2(t) \\ y = v_1(t)y_1(t) + v_2(t)y_2(t) \end{cases}$$

será uma solução particular de (*) caso as funções $v_1(t)$ e $v_2(t)$ satisfaçam o sistema

$$v_1'x_1 + v_2'x_2 = f_1$$
$$v_1'y_1 + v_2'y_2 = f_2.$$

Essa técnica de encontrar uma solução particular de um sistema linear não-homogêneo é chamada *método de variação de parâmetros.*

(b) Aplique o mesmo método para calcular uma solução particular do sistema não-homogêneo

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y - 5t + 2 \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x - 2y - 8t - 8, \end{cases}$$

cujo sistema homogêneo correspondente foi resolvido no Exemplo 1.

Sistemas Não-Lineares. Equações de Volterra

Todos sabem que existe uma constante luta pela sobrevivência entre diferentes espécies de animais vivendo num mesmo ambiente. Um tipo de animal sobrevive comendo outro; um segundo, desenvolvendo métodos para evitar ser comido etc.

Como exemplo simples desse conflito universal entre o predador e sua presa, imaginemos uma ilha habitada por raposas e coelhos. As raposas comem coelhos e os coelhos comem mato. Consideremos que existe tanto mato que os coelhos têm abundância de comida. Quando os coelhos proliferam, as raposas florescem, e sua população cresce. Quando as raposas se tornam por demais numerosas e comem muitos coelhos, elas entram num período de fome, e sua população começa a declinar. Como as raposas diminuem, os coelhos começam a viver mais a salvo, e sua população começa a crescer outra vez. Isto propicia um novo crescimento na população de raposas e, à medida que o tempo passa, o processo de crescimento e decrescimento da população das raposas e coelhos se repete. Essas flutuações estão representadas na Fig. 22.22, onde o tamanho da população é expresso em função do tempo.

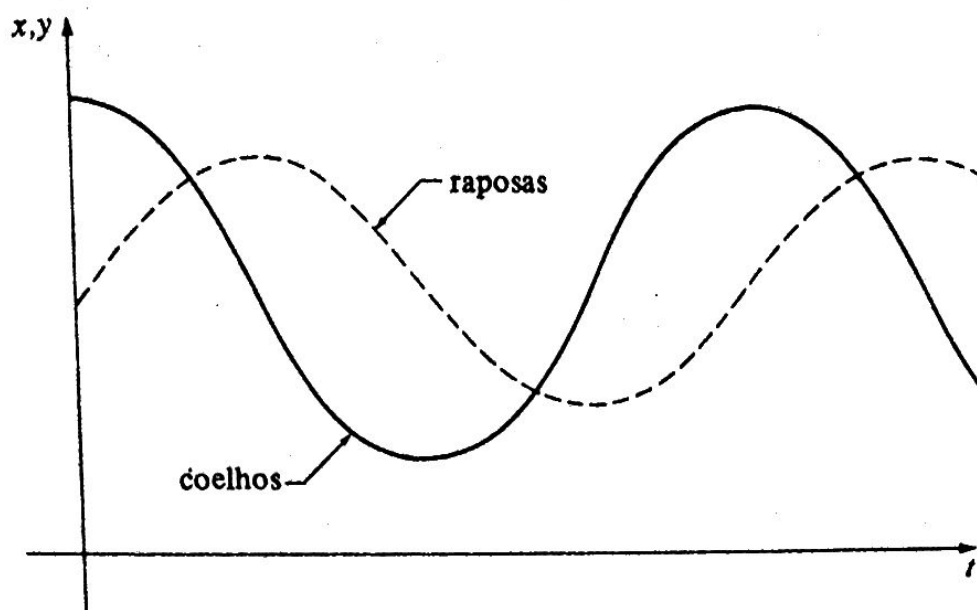



Figura 22.22

Problemas desse tipo têm sido estudados por matemáticos e biólogos, e é bastante interessante ver como as conclusões matemáticas que desenvolvemos confirmam as idéias expressas no parágrafo anterior. Na discussão da interação entre raposas e coelhos, aproximamo-nos de Volterra, que iniciou o tratamento quantitativo desses problemas*. Sendo x o número de coelhos no instante t, teremos

$$\frac{dx}{dt} = ax, \qquad a > 0,$$

como conseqüência de uma ilimitada existência de mato se o número y de raposas é zero. É natural considerar que o número de encontros por unidade de tempo entre raposas e coelhos é proporcional a x e a y. Se considerarmos que desses encontros resulta um coelho comido, então temos

$$\frac{dx}{dt} = ax - bxy, \qquad a \text{ e } b > 0.$$

Do mesmo modo,

$$\frac{dy}{dt} = -cy + dxy, \qquad c \text{ e } d > 0;$$

* Vito Volterra (1860-1940) foi um eminente matemático italiano. Seu trabalho anterior sobre equações (junto com o de Fredholm e Hilbert) deu início ao desenvolvimento impetuoso da análise linear, que tanto dominou as matemáticas durante a primeira metade do séc. XX. Suas excursões posteriores em Biologia Matemática enriqueceram tanto a Matemática como a Biologia. Para maiores detalhes, ver sua *Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie* (Gauthier-Villars, Paris, 1931); ou A. J. Lotka, *Elements of Mathematical Biology*, pp. 88-94, Dover, New York, 1956.

pois em ausência de coelhos as raposas morrem e seu crescimento depende do número de seus encontros com os coelhos. Para descrever a interação das duas espécies, temos o seguinte sistema não-linear

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(a - by) \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = -y(c - dx). \end{cases} \tag{1}$$

As equações (1) são chamadas *equações presa-predador de Volterra.* Infelizmente esse sistema não pode ser resolvido em termos de funções elementares. De outro lado, se pensarmos na solução desconhecida

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

como constituindo as equações paramétricas de uma curva no plano xy, então podemos calcular a equação retangular dessa curva. Eliminando t em (1) por divisão e separando as variáveis, obtemos

$$\frac{(a - by)\,dy}{y} = -\frac{(c - dx)\,dx}{x}.$$

A integração leva-nos agora a

$$a \ln y - by = -c \ln x + dx + \ln K$$

ou

$$y^a e^{-by} = Kx^{-c}e^{dx}, \tag{2}$$

onde a constante K é dada por

$$K = x_0{}^c y_0{}^a e^{-dx_0 - by_0}$$

em termos dos valores iniciais de x e y.

Se não podemos resolver (2) nem em x nem em y, podemos determinar pontos na curva por um método engenhoso devido a Volterra. Para fazer isto, igualamos os membros esquerdo e direito de (2) a novas variáveis z e w, e então desenhamos os gráficos C_1 e C_2 das funções

$$z = y^a e^{-by} \qquad \text{e} \qquad w = Kx^{-c}e^{dx} \tag{3}$$

como mostrado na Fig. 22.23. Desde que $z = w$, estamos confinados no terceiro quadrante à linha tracejada L. Ao valor máximo de z, dado pelo ponto A em C_1, corresponde um y e, através de M em L, aos pontos correspondentes A' e A'' em C_2 – a dois valores de x, e estes determinam os limites entre os quais x pode variar. Similarmente, o valor mínimo de w, dado por B em C_2, conduz a N em L e então a B' e B'' em $C_1{}'$ e esses pontos determinam os limites para Y. Desse modo encontramos os pontos p_1, p_2 e Q_1, Q_2 na curva desejada C_3.

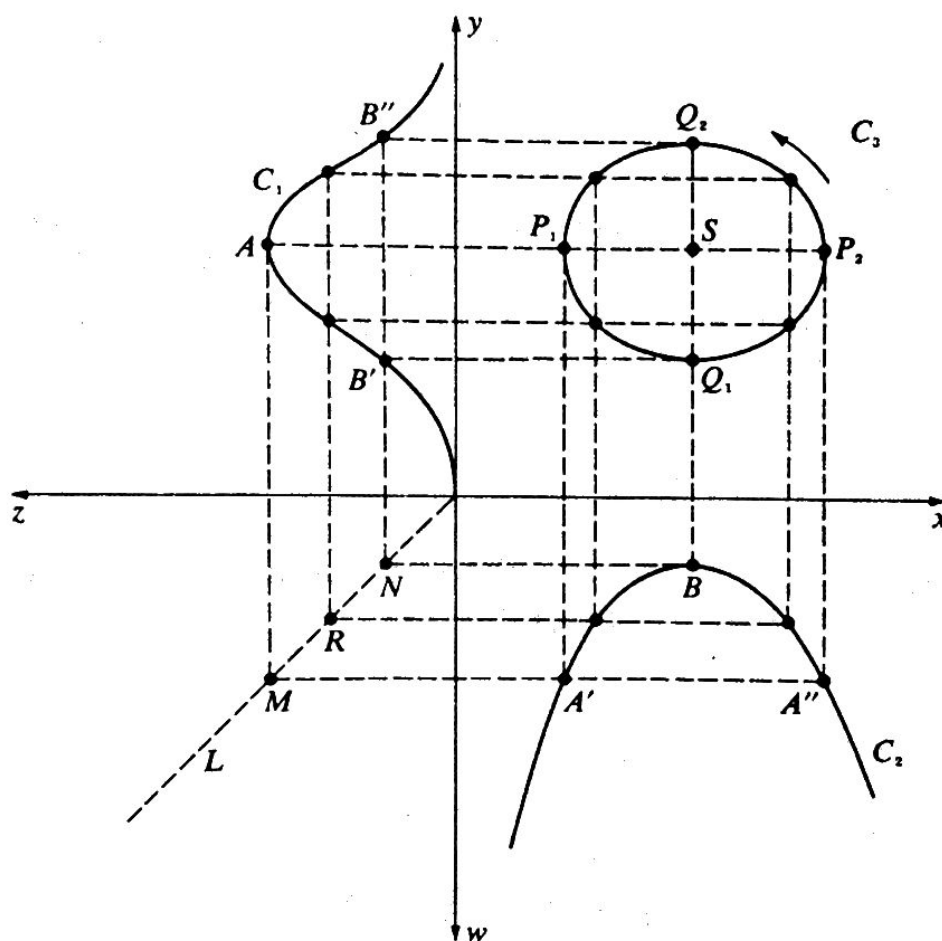



Figura 22.23

Pontos adicionais são facilmente encontrados a partir de um ponto qualquer R situado em L entre M e N e projetando-se sobre C_1 e C_3, como indicado na Fig. 22.23. Uma mudança no valor de K aumenta ou diminui B e isto contrai ou expande a curva C_3. Assim, quando K tem vários valores, obtemos uma família de ovais à volta do ponto S, a que se reduz C_3 quando o valor mínimo de w iguala o valor máximo de z.

Mostraremos agora que, à medida que t cresce, os pontos correspondentes (x, y) em C_3 se movem ao longo da curva no sentido anti-horário. Para verificar isto, note que as equações (1) dão as componentes vertical e horizontal da velocidade desse ponto. Um simples cálculo baseado nas fórmulas (3) mostra que o ponto S tem as coordenadas $x = c/d, y = a/b$. Quando $x < c/d$, segue-se, da segunda equação de (1), que dy/dt é negativa, de modo que o nosso ponto se move para baixo, através do arco $Q_2P_1Q_1$. Similarmente, ele mover-se-á para cima ao longo do arco $Q_1P_2Q_2$, de modo que a afirmação está provada.

Finalmente, usaremos o problema raposas-coelhos para ilustrar o importante *método de linearização*. Primeiro, observe que, se as populações de coelhos e raposas forem

$$x = \frac{c}{d} \qquad \text{e} \qquad y = \frac{a}{b}, \tag{4}$$

então o sistema (1) é satisfeito e temos $dx/dt = 0$ e $dy/dt = 0$, pelo que não há crescimento ou diminuição de x ou de y. As populações (4) são *populações em equilíbrio*, porque x e y podem se manter indefinidamente a si próprias em níveis constantes. É óbvio que este é o caso especial em que o mínimo de w iguala o máximo de z, de tal modo que a oval C_3 se reduz ao ponto S. Retornando ao caso geral e fazendo

$$x = \frac{c}{d} + X \qquad \text{e} \qquad y = \frac{a}{b} + Y,$$

X e Y podem ser considerados os desvios de x e y a partir de seus valores de equilíbrio. Um cálculo fácil mostra que se x e y em (1) forem substituídos por X e Y [o que significa transladar o ponto $(c/d, a/b)$ para a origem] então (1) se torna

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = -\dfrac{bc}{d}Y - bXY \\[2ex] \dfrac{dY}{dt} = \dfrac{ad}{b}X + dXY. \end{cases} \tag{5}$$

"Linearizamos" considerando que se X e Y são pequenos, então o termo xy em (5) pode ser desprezado sem erro sério. Essa consideração permite simplificar (5) tornando-a um sistema linear

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = -\dfrac{bc}{d}Y \\[2ex] \dfrac{dY}{dt} = \dfrac{ad}{b}X. \end{cases} \tag{6}$$

É fácil calcular a solução geral de (6), mas é ainda mais fácil eliminar t por divisão e obter

$$\frac{dY}{dX} = -\frac{ad^2}{b^2c}\frac{X}{Y},$$

cuja solução como se vê imediatamente, é

$$ad^2X^2 + b^2cY^2 = C^2.$$

A solução é uma família de elipses em torno da origem no plano XY. Uma vez que as elipses são qualitativamente similares às ovais da Fig. 22.23, temos uma base razoável para supor que (6) é uma aproximação aceitável para (5).

Confiamos em que o leitor achou interessante o problema das raposas e coelhos. Para além disso, contudo, pudemos apreciar o fato de que sistemas não-lineares nos apresentam problemas de uma natureza diferente dos estudados anteriormente. Pelo estudo de um sistema como (1), aprendemos a dirigir nossa atenção para o comportamento de soluções próximas de pontos no plano xy para as quais os membros direitos se anulam; vimos por que soluções periódicas (isto é, que conduzem a curvas simples fechadas como C_3 na Fig. 22.23) são importantes e desejáveis; e vimos um método para estudar sistemas não-lineares através de sistemas lineares que se aproximam daqueles.

Problemas

1. Elimine y do sistema (1) e obtenha uma equação de segunda ordem não-linear que seja satisfeita pela função $x(t)$.

2. Mostre que $d^2y/dt^2 > 0$ quando $dx/dt > 0$. O que significa esse resultado em termos da Fig. 22.22?

APÊNDICE A

TÓPICOS ADICIONAIS

A.1 ARQUIMEDES: A QUADRATURA DA PARÁBOLA

O título desta seção é uma versão um pouco alterada do título de um tratado de Arquimedes (*Sobre a Quadratura da Parábola*). A palavra *quadratura* é um termo antigo significando o ato ou o processo de se calcular áreas. Na Seção 6.2 (volume I) descrevemos resumidamente os primeiros estágios da quadratura, segundo Arquimedes, de um segmento da parábola. Nosso objetivo aqui é completar o argumento.

Para conveniência do leitor, repetimos a figura em discussão (Fig. A.1).

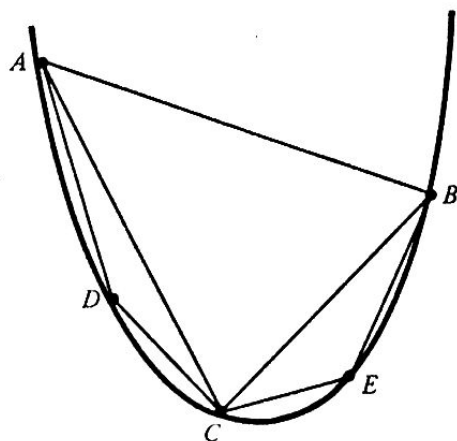



Figura A.1

O ponto central da prova é que a soma das áreas dos triângulos ACD e BCE é um quarto da área do triângulo ABC, e esta relação se repete em cada estágio sucessivo do processo. Provaremos esse fato, mas primeiro vejamos como isto nos permite finalizar a quadratura do segmento parabólico. A relação enunciada entre a área adicionada e a área anterior revela primeiramente que

$$ACD + BCE = \frac{1}{4} ABC;$$

e posteriormente a soma das áreas dos próximos quatro triângulos convenientemente somadas duas a duas será igual a

$$= \frac{1}{4} ACD + \frac{1}{4} BCE$$

$$= \frac{1}{4}(ACD + BCE)$$

$$= \frac{1}{4^2} ABC;$$

e assim indefinidamente. Portanto, pela natureza do processo de exaustão, é claro que

$$\text{a área do segmento parabólico } = ABC + \frac{1}{4} ABC + \frac{1}{4^2} ABC + \cdots$$

$$= ABC\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots\right).$$

Mas da Álgebra Elementar conhecemos a soma de uma série geométrica infinita de razão r, $|r| < 1$ *

$$1 + r + r^2 + \cdots = \frac{1}{1 - r}.$$

No nosso caso $r = \frac{1}{4}$, e, portanto,

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3},$$

e isto nos leva à conclusão:

* Esta é uma conseqüência imediata da fórmula (1) da Seção A.1 (Volume I).

$$\text{a área do segmento parabólico} = \frac{4}{3}\, ABC,$$

como Arquimedes descobriu e provou.

Estabeleçamos agora o fato geométrico enunciado acima, isto é, que $ACD + BCE = 1/4\ ABC$. Arquimedes utilizou raciocínio puramente geométrico, mas usaremos geometria analítica. Vamos supor que a parábola seja o gráfico de $y = ax^2$ e que A e B têm coordenadas $A = (x_0, ax_0^2)$ e $B = (x_2, ax_2^2)$ (Fig. A.2).

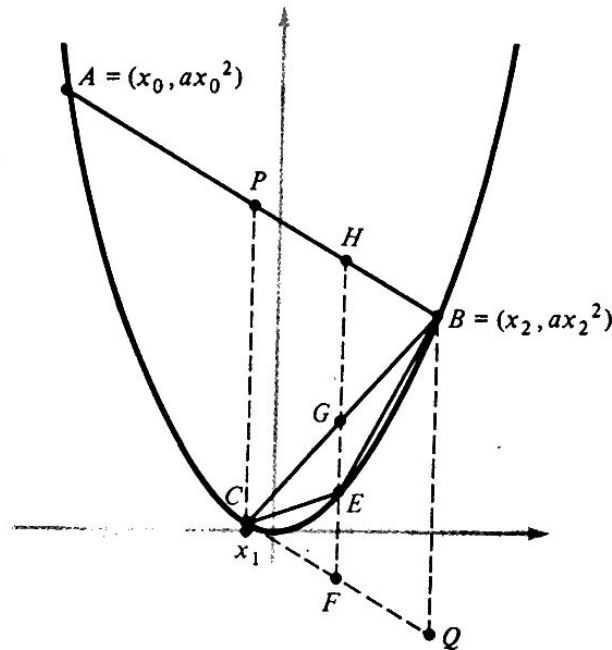



Figura A.2

Sendo x_1 a coordenada x de C, então, pela fórmula $dy/dx = 2ax$, vemos que o declive da tangente em C é $2ax_1$. Como escolhemos C de modo que a tangente em C seja paralela a AB, teremos

$$2ax_1 = \frac{ax_0^2 - ax_2^2}{x_0 - x_2} \qquad \text{ou} \qquad x_1 = \frac{1}{2}(x_0 + x_2).$$

Ou seja, a reta vertical por C bisseciona a corda AB num ponto P. Evidentemente basta provar que

$$BCE = \frac{1}{4}\, BCP. \tag{1}$$

Para isto, iniciemos completando o paralelogramo $CPBQ$. Pelo mesmo raciocínio anterior, a reta vertical por E bisseciona a corda BC num ponto G e, portanto, bisseciona também o segmento BP em H. Se mostrarmos que

$$EG = \frac{1}{2}\, GH, \tag{2}$$

então teremos que

$$BEG = \frac{1}{2} BGH \qquad \text{e} \qquad CEG = \frac{1}{2} BGH,$$

e assim

$$BCE = BGH.$$

Como, evidentemente, $BGH = \frac{1}{4} BCP$, chegaremos à prova de (1). Para provar (2), basta mostrar que $FE = \frac{1}{4} FH$, e fazemos isto mostrando que $FE = \frac{1}{4} QB$. Os cálculos são diretos:

$$\begin{aligned} FE &= a[\tfrac{1}{2}(x_1 + x_2)]^2 - [ax_1^2 + 2ax_1 \cdot \tfrac{1}{2}(x_2 - x_1)] \\ &= \tfrac{1}{4}a[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1^2 - 4x_1(x_2 - x_1)] \\ &= \tfrac{1}{4}a(x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2) = \tfrac{1}{4}a(x_1 - x_2)^2; \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} QB &= ax_2^2 - [ax_1^2 + 2ax_1(x_2 - x_1)] \\ &= a(x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2) = a(x_1 - x_2)^2. \end{aligned}$$

A.2 AS LÚNULAS DE HIPÓCRATES

De acordo com uma tradição, Hipócrates de Chios (cerca de 430 a. C. – não confundir com seu contemporâneo mais conhecido, o médico Hipócrates de Cos), era originalmente um mercador cujos bens foram roubados por piratas*. Ele então foi a Atenas, onde viveu por muitos anos, estudou Matemática e compilou um livro sobre os elementos de Matemática que influenciou fortemente Euclides um século mais tarde.

* Aristóteles, que raramente perdia uma chance de expressar seu desprezo pelos matemáticos, fez um relato dos mais aviltantes sobre a infelicidade de Hipócrates. "É fato bem conhecido", escreveu com gosto, "que gente brilhante num determinado campo pode ser bastante tolo em muitas outras coisas. Assim, Hipócrates, embora hábil em geometria, era tão estúpido e fraco que deixou um coletor de impostos de Bizâncio fraudá-lo numa fortuna." Isso escrito por um homem que afirmou que corpos mais pesados caem ao chão mais rapidamente e que os homens têm mais dentes que as mulheres.

Recordemos a descoberta de Hipócrates tal como enunciada na Seção 6.2 (volume I) a lúnula (região em forma de crescente) da Fig. A.3 limitada pelos arcos circulares ADB e AEB (o último tendo C como centro) tem uma área exatamente igual à área do quadrado hachurado cujo lado é o raio do círculo (Hipócrates encontrou também as áreas de duas outras espécies de lúnulas, mas não as discutiremos aqui).

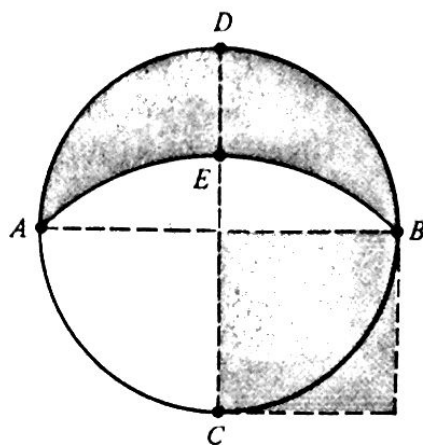



Figura A.3

Esse teorema muito surpreendente parece ser a primeira determinação precisa da área de uma região limitada por curvas. Sua prova é simples mas engenhosa e depende do último dos fatos geométricos seguintes, cada um dos quais implica o seguinte: (a) as áreas de dois círculos estão entre si assim como os quadrados dos raios (Fig. A.4); (b) setores de dois círculos com ângulos centrais iguais estão entre si assim como os quadrados dos raios (Fig. A.5); (c) segmentos de dois círculos com ângulos centrais iguais estão entre si assim como os quadrados dos raios (Fig. A.6). Vamos precisar de (c) no caso particular de ângulos centrais retos.

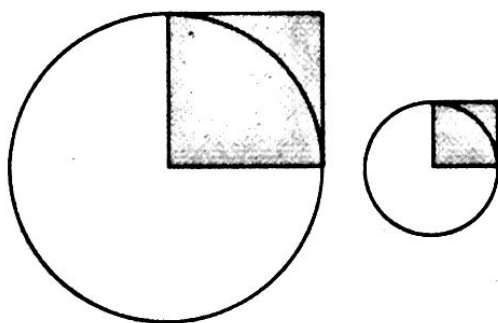



Figura A.4

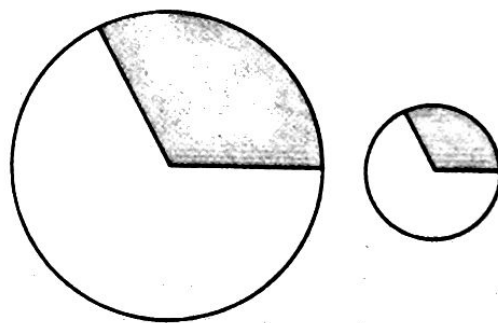



Figura A.5

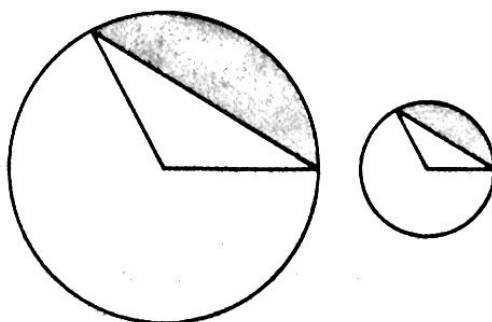



Figura A.6

A prova do Teorema de Hipócrates agora é a seguinte: redesenhemos as lúnulas como mostrado na Fig. A.7.

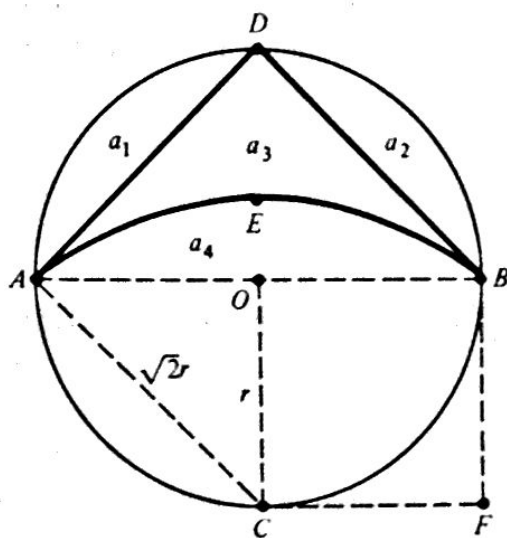



Figura A.7

As cordas que unem D a A e a B são tangentes ao arco AEB e dividem a lúnula em três regiões com áreas a_1, a_2 e a_3. Denotando-se o raio do menor círculo por r, o Teorema de Pitágoras afirma que o raio do círculo maior é $\sqrt{2}\,r$. É fácil ver que a_1 e a_2 são segmentos iguais do círculo menor e que a_4 é um segmento do círculo maior, todos com ângulos centrais retos. Usaremos agora a proposição (c) para inferir que

$$\frac{a_1}{a_4} = \frac{r^2}{(\sqrt{2}r)^2} = \frac{1}{2}.$$

Isto acarreta

$$a_1 = \frac{1}{2}a_4 \qquad \text{e} \qquad a_2 = \frac{1}{2}a_4,$$

logo

$$a_1 + a_2 = a_4.$$

Segue-se agora que

$$\begin{aligned}\text{área da lúnula} &= a_1 + a_2 + a_3\\ &= a_4 + a_3\\ &= \text{área do triângulo } ABD\\ &= r^2 = \text{área do quadrado } OBFC,\end{aligned}$$

e a demonstração está completa.

Hipócrates foi contemporâneo de Péricles, o grande líder político e cultural de Atenas na Idade de Ouro. Mas nada do legado de Péricles tem a qualidade duradoura dessa bela descoberta geométrica; até mesmo o Parthenon, cujo projeto e construção supervisionou, está se desintegrando. O raciocínio de Hipócrates é modelo de prova matemática, intocada pelo tempo: em poucos passos elegantes converte algo fácil de entender mas difícil de acreditar em algo impossível de duvidar.

A.3 COMO ARQUIMEDES DESCOBRIU A INTEGRAÇÃO

A descoberta por Arquimedes da fórmula do volume de uma esfera foi uma das maiores realizações matemáticas de todos os tempos. A fórmula em si teve importância óbvia, mas ainda mais importante foi o método que ele usou para descobri-la, pois esse método corresponde à primeira manifestação da idéia básica do cálculo integral.

Ele provou essa fórmula em seu tratado *Sobre a esfera e o cilindro* por meio de um argumento longo e rigoroso de perfeição clássica. Infelizmente, no entanto, esse argumento era do tipo dos que obrigam a acreditar mas fornecem pouco discernimento. Era como uma grande obra arquitetônica cujo arquiteto tivesse retirado todos os andaimes, queimado as plantas e ocultado seus pensamentos particulares dos quais o conceito global emergiu. Os matemáticos sempre estiveram cientes — pelos tratados formais de Arquimedes — do que ele descobriu. Entretanto, seu método de fazer descobertas permaneceu envolto em mistério até 1906, quando o acadêmico dinamarquês Heiberg revelou um manuscrito perdido tratando exatamente dessa questão*.

Nesse manuscrito Arquimedes descreveu a seu amigo Eratóstenes como ele "investigara alguns problemas de matemática por meio da mecânica**". A mais maravilhosa dessas investigações foi sua descoberta do volume de uma esfera. Para compreender seu trabalho, é necessário conhecer um pouco sobre o nível de conhecimento do qual ele partiu.

Segundo Arquimedes, foi Demócrito, dois séculos antes, quem descobriu que o volume de um cone é um terço do volume de um cilindro com a mesma altura e a mesma base. Nada é positivamente conhecido sobre o método de Demócrito, mas acredita-se que ele teve sucesso considerando primeiro uma pirâmide triangular (tetraedro), depois uma pirâmide arbitrária e finalmente um cone como o limite de pirâmides inscritas***.

---

* Veja o *Método em The Works of Archimedes*, T. L. Heath (ed.), Dover (sem data).

** *Método*, p. 13.

*** Veja o Capítulo 1 do livrete do autor, *Precalculus Mathematics in a Nutshell*, William Kaufmann, Inc. 1981.

Além disso, os gregos conheciam um pouco de geometria analítica, mas sem a nossa notação. Eles estavam a par da idéia de que um lugar geométrico plano poderia ser estudado considerando-se as distâncias de um ponto móvel a duas retas perpendiculares; e que, sendo constatada a soma dos quadrados dessas distâncias, eles sabiam tratar-se de uma circunferência. Em nossa notação, essa condição leva à equação $x^2 + y^2 = a^2$.

Além disso, foi o próprio Arquimedes quem virtualmente criou a mecânica grega. Como todos sabem descobriu a lei dos corpos flutuantes. Ele também descobriu o princípio da balança e muitos fatos sobre os centros de gravidade.

Estamos agora preparados para seguirmos Arquimedes em sua procura do volume de uma esfera. Ele considerou a esfera como gerada pela rotação de um círculo em torno de seu diâmetro. Em notação moderna, começamos com a circunferência

$$x^2 + y^2 = 2ax, \tag{1}$$

que tem raio a e é tangente ao eixo y na origem. Essa circunferência é mostrada à esquerda da Fig. A.8, quase idêntica à figura original de Arquimedes.

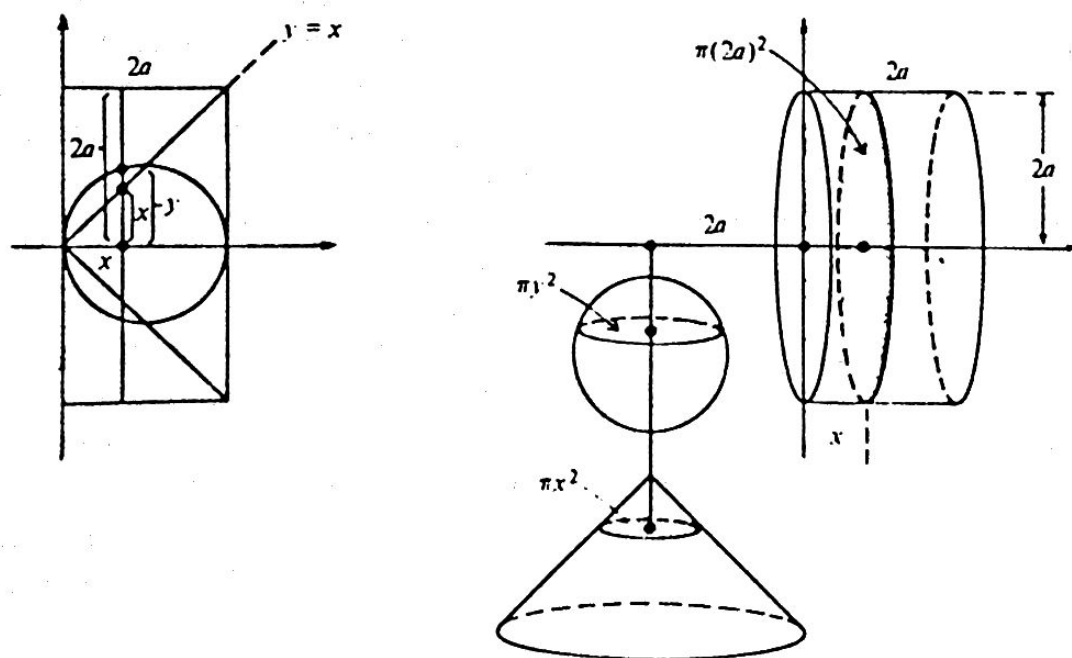



Figura A.8 O argumento da balança de Arquimedes.

A equação (1) contém o termo y^2, e como y^2 é a área da seção transversal variável da esfera x unidades à direita da origem, é natural multiplicar por π e escrever (1) na forma

$$\pi x^2 + \pi y^2 = \pi 2ax. \tag{2}$$

Isto leva-nos a interpretar πx^2 como a área da seção transversal variável do cone gerado pela rotação da reta $y = x$ em torno do eixo x, o que, por sua vez, sugere que procuremos uma interpretação semelhante para o termo $2ax$ do segundo membro da equação (2). Persistindo nesta linha, podemos talvez pensar em multiplicar por $2a$ e assim reescrever (2) como

$$2a(\pi x^2 + \pi y^2) = x\pi(2a)^2. \tag{3}$$

A motivação dessa mudança reside evidentemente no fato de que $\pi(2a)^2$ é a área da seção transversal do cilindro com mesma altura e mesma base que o cone.

Temos portanto, à esquerda da Fig. A.9, três discos circulares de área πy^2, πx^2 e $\pi(2a)^2$, que são as interseções de um único plano com três sólidos de revolução. Esse plano é perpendicular ao eixo x a uma distância x unidades à direita da origem e os sólidos são a esfera, o cone e o cilindro, como está indicado na figura.

No primeiro membro da equação (3), a soma das duas primeiras áreas é multiplicada por $2a$ e no segundo membro a terceira área é multiplicada por x. Essa observação levou Arquimedes à seguinte grande idéia, como se mostra à direita da Fig. A.9. Ele deixou o disco com raio $2a$ onde estava, numa posição vertical x unidades à direita da origem, e deslocou os discos com raios y e x a um ponto $2a$ unidades à esquerda da origem, onde os pendurou horizontalmente com seus centros sob esse ponto, suspenso por um fio sem peso. O objetivo dessa manobra pode ser compreendida considerando-se simplesmente o eixo x como braço de uma alavanca e a origem com seu fulcro ou ponto de apoio. Pode-se ver agora que a equação (3) trata de momentos. (Um *momento* é o produto do peso suspenso pelo comprimento do braço da alavanca.) Desse ponto de vista, a equação (3) afirma que as somas dos momentos dos dois discos à esquerda são iguais ao momento do único disco à direita e assim, pelo próprio princípio da alavanca de Arquimedes, essa balança está em equilíbrio.

Executamos agora a última etapa do raciocínio. Quando x cresce de 0 a $2a$, as três seções transversais varrem seus respectivos sólidos e preenchem esses sólidos. Como as três seções transversais estão em equilíbrio nesse processo, os próprios sólidos estão também em equilíbrio. Seja V o volume da esfera, que era desconhecido até que Arquimedes publicasse seu cálculo. Usando a fórmula de Demócrito para o volume do cone e também para o volume do cilindro e a localização óbvia de seu centro de gravidade, o equilíbrio dos sólidos nas posições mostradas na figura acarreta

$$2a[\tfrac{1}{3}\pi(2a)^2(2a) + V] = a\pi(2a)^2(2a). \tag{4}$$

Agora é fácil resolver (4) para V e obter

$$V = \tfrac{4}{3}\pi a^3.$$

As idéias discutidas aqui foram criadas por alguém que tem sido considerado – com toda a razão – como "o maior gênio do Mundo Antigo". Mas essas idéias são, apesar de tudo, apenas o começo. O ponto central do raciocínio está na transição de (3) para (4), das seções transversais

móveis aos sólidos completos. Com a vantagem da perspectiva histórica, podemos reconhecer essa transição como a essência da integração, que sabemos ser um processo de longo alcance e diversidade, com incontáveis aplicações nas Ciências e na Matemática. O próprio Arquimedes suspeitou do valor potencial de suas idéias: "Estou convencido de que esse método será de grande utilidade para a Matemática, pois prevejo que uma vez compreendido e consolidado, será usado para descobrir outros teoremas, que não ocorreram a mim, por outros matemáticos vivos ou ainda por nascer*."

A.4 UMA PROVA ELEMENTAR DA FÓRMULA DE LEIBNIZ

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

A fórmula em questão é

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots, \tag{1}$$

que foi abordada de um modo vago e não rigoroso na Seção 9.5 (volume I).

Comecemos a prova com a fórmula

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + t^8 - \cdots + t^{4n} - \frac{t^{4n+2}}{1+t^2}, \tag{2}$$

que é válida para todo t e pode ser conferida multiplicando-se ambos os membros por $1 + t2$. Agora consideremos um número x tal que $0 \leqslant x \leqslant 1$. Integrando (2) no intervalo $0 \leqslant t \leqslant x$, temos

$$\text{arc tg}^{-1} x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + \frac{x^{4n+1}}{4n+1} - R_n(x), \tag{3}$$

onde

$$R_n(x) = \int_0^x \frac{t^{4n+2}}{1+t^2}\, dt.$$

* *Método*, p. 14

É claro que $1 \leqslant 1 + t^2$, logo

$$0 \leq R_n(x) \leq \int_0^x t^{4n+2}\,dt$$

ou

$$0 \leq R_n(x) \leq \frac{x^{4n+3}}{4n+3}.$$

Para os x em consideração, essa relação mostra que

$$0 \leq R_n(x) \leq \frac{1}{4n+3},$$

logo $R_n(x) \to 0$ quando $n \to \infty$. Assim podemos usar (3) para deduzir que a fórmula

$$\text{arc tg}\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots \tag{4}$$

é válida para $0 \leqslant x \leqslant 1$. O segundo membro de (4) é, por definição, o limite do segundo membro de (3) quando $n \to \infty$ caso $R_n(x) \to 0$. Mas acabamos de mostrar que essa condição é verdadeira. Para obter a fórmula de Leibniz (1), simplesmente colocamos $x = 1$ na fórmula (4).

A.5 PRODUTO DE WALLIS

Como aplicação de integração por partes da Seção 10.7 (Volume I), obtivemos a seguinte fórmula de redução:

$$\int \text{sen}^n x\,dx = -\frac{1}{n}\text{sen}^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n}\int \text{sen}^{n-2} x\,dx.$$

Essa fórmula leva, de um modo elementar mas engenhoso, a uma expressão notável em que o número $\pi/2$ é apresentado na forma de um produto infinito:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}\cdots.$$

Essa expressão foi descoberta pelo matemático inglês John Wallis em 1656 e se chama *produto de Wallis*. Além de seu interesse intrínseco, a fórmula (2) é subjacente a outros desenvolvimentos importantes tanto em Matemática Pura como na Aplicada; por isso apresentamos aqui uma demonstração de (2).

Definindo-se I_n por

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x \, dx,$$

(1) revela que

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}. \tag{3}$$

É claro que

$$I_0 = \int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2} \qquad \text{e} \qquad I_1 = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x \, dx = 1.$$

Analisaremos agora, separadamente, os casos de índices pares e ímpares e utilizaremos (3) para calcular I_{2n} e I_{2n+1} como se segue:

$$\begin{aligned} I_{2n} &= \frac{2n-1}{2n} I_{2n-2} = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} I_{2n-4} \\ &= \cdots = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \frac{2n-5}{2n-4} \cdots \frac{1}{2} I_0 \qquad (4) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{\pi}{2}; \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} I_{2n+1} &= \frac{2n}{2n+1} I_{2n-1} = \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} I_{2n-3} \\ &= \cdots = \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \frac{2n-4}{2n-3} \cdots \frac{2}{3} I_1 \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{2n}{2n+1}. \qquad (5) \end{aligned}$$

Quanto ao próximo elo na cadeia desse raciocínio, necessitamos do fato de que a razão dessas duas quantidades tende a 1 quando $n \to \infty$,

$$\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} \to 1. \tag{6}$$

Para estabelecer esse limite, começamos observando que no intervalo $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$, temos $0 \leqslant \operatorname{sen} x \leqslant 1$ e, portanto,

$$0 \leq \operatorname{sen}^{2n+2} x \leq \operatorname{sen}^{2n+1} x \leq \operatorname{sen}^{2n} x.$$

Isto implica que

$$0 < \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n+2} x \, dx \leq \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n+1} x \, dx \leq \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n} x \, dx,$$

ou, equivalentemente,

$$0 < I_{2n+2} \leq I_{2n+1} \leq I_{2n}. \tag{7}$$

Dividindo-se por I_{2n} e usando-se

$$\frac{I_{2n+2}}{I_{2n}} = \frac{2n+1}{2n+2},$$

que se obtém de (3), (7) acarreta

$$\frac{2n+1}{2n+2} \leq \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} \leq 1.$$

Finalmente, dessas desigualdades temos

$$\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} \to 1 \text{ quando } n \to \infty,$$

que é equivalente a (6).

As etapas finais do argumento são as seguintes: dividindo (5) por (4), obtemos

$$\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2}{\pi},$$

logo

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}\left(\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}}\right).$$

Formando o limite quando $n \to \infty$ e usando (6), obtemos

$$\frac{\pi}{2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1},$$

que é o significado de (2).

Observamos também que o produto de Wallis (2) é equivalente à fórmula

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\left(1-\frac{1}{6^2}\right)\cdots=\frac{2}{\pi}. \tag{8}$$

A verdade dessa expressão é facilmente percebida escrevendo-se cada número entre parênteses à esquerda na forma fatorada,

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{6}\right)\left(1+\frac{1}{6}\right)\cdots=\frac{2}{\pi}$$

ou

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{6}\cdots=\frac{2}{\pi},$$

que é evidentemente equivalente a (2). A fórmula (8) reaparecerá no Apêndice A.7 como um caso particular de uma outra fórmula ainda mais maravilhosa*.

---

* Wallis foi Professor de Geometria em Oxford durante 54 anos, de 1649 até a sua morte, em 1703, com 87 anos de idade. Ele desempenhou um papel importante na formação do clima de pensamento em que floresceu Newton. Introduziu expoentes negativos e fracionários assim como o símbolo ∞ universalmente agora usado, para infinito, tendo sido o primeiro matemático a tratar as seções cônicas como curvas planas de segundo grau. O produto infinito de Wallis estimulou seu amigo Lord Brouncker (primeiro presidente da Royal Society), que chegou à descoberta da surpreendente fórmula

$$\frac{4}{\pi}=1+\cfrac{1^2}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2+\cfrac{7^2}{2+\cfrac{9^2}{2+\cdots}}}}},$$

A.6 COMO LEIBNIZ DESCOBRIU SUA FÓRMULA

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

A área de um quarto de círculo de raio 1 (Fig. A.9) é obviamente $\pi/4$. Seguindo Leibniz, calcularemos essa área de um modo diferente. A parte que realmente calculamos é a área A do segmento circular cortado pela corda OT, pois o resto do quarto de círculo é evidentemente um triângulo retângulo isósceles de área $1/2$.

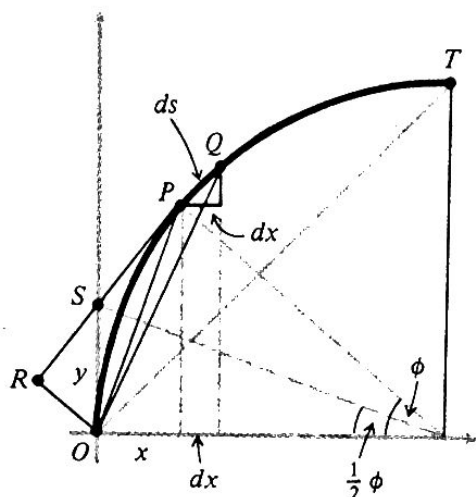



Figura A.9

Obteremos a área A mencionada integrando os elementos de área OPQ, onde o arco PQ é tão pequeno que virtualmente se confunde com um segmento de reta. Consideramos OPQ como um triângulo cuja base é o segmento PQ de comprimento ds e cuja altura é a distância OR do vértice O ao prolongamento da base PQ. Da semelhança entre os dois triângulos retângulos da figura obtemos

$$\frac{ds}{dx} = \frac{OS}{OR} \qquad \text{ou} \qquad OR\, ds = OS\, dx,$$

logo a área dA de OPQ é

$$dA = \tfrac{1}{2} OR\, ds = \tfrac{1}{2} OS\, dx = \tfrac{1}{2} y\, dx,$$

---

que provocou o surgimento da teoria das frações contínuas. (Ninguém sabe como Brouncker fez essa descoberta; uma prova baseada em trabalho de Euler no século seguinte é dada no capítulo sobre Brouncker em J. L. Coolidge, *The Mathematics of Great Amateurs*, Oxford University Press, 1949.). Entre as atividades de Wallis em seus últimos anos destaca-se uma vívida polêmica com o famoso filósofo Hobbes, que considerou ter descoberto a quadratura do círculo, publicando a prova naturalmente errada. Wallis refutou prontamente a prova, mas Hobbes era arrogante e muito ignorante para compreender a contraposição e defendeu-se cometendo novos erros, como se a validade de uma prova matemática pudesse ser estabelecida por retórica e invectiva.

onde y é o comprimento do segmento OS. O elemento de área varre o segmento circular em questão quando x cresce de 0 a 1, logo

$$A = \int dA = \frac{1}{2}\int_0^1 y\,dx;$$

e integrando por partes a fim de inverter os papéis de x e y, temos

$$A = \frac{1}{2}xy\Big]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 x\,dy = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\int_0^1 x\,dy, \tag{1}$$

onde os limites de integração são $y = 0$ e $y = 1$. Para continuarmos o cálculo, observamos que, como

$$y = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\phi \qquad \text{e} \qquad x = 1 - \cos\phi = 2\operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2}\phi,$$

a identidade trigonométrica

$$\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\phi = \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}\phi}{\cos^2 \frac{1}{2}\phi} = \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}\phi \sec^2 \frac{1}{2}\phi = \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}\phi\left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\phi\right)$$

acarreta

$$\frac{x}{2} = \frac{y^2}{1+y^2}.$$

A versão da série geométrica dada na fórmula (13) da Seção 9.5 (Volume I) permite-nos escrever essa expressão na forma

$$\frac{x}{2} = y^2(1 - y^2 + y^4 - y^6 + \cdots) = y^2 - y^4 + y^6 - y^8 + \cdots.$$

Logo (1) fica sendo

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2} - \int_0^1 (y^2 - y^4 + y^6 - y^8 + \cdots)\,dy \\
&= \frac{1}{2} - \left[\frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{5}y^5 + \frac{1}{7}y^7 - \frac{1}{9}y^9 + \cdots\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \cdots\right) \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots.
\end{aligned}$$

Somando-se $1/2$ a essa expressão para levar em conta a área do triângulo isósceles e igualando-se o resultado ao valor conhecido da área do quarto do círculo, que é $\pi/4$, temos a fórmula de Leibniz

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots .$$

Seria espantoso que ele tivesse tanto prazer e orgulho pelo resto de sua vida por essa descoberta?

A.7 A DESCOBERTA DE EULER DA FÓRMULA

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Na Seção 13.2 encontramos a fórmula de Euler para a soma dos inversos dos quadrados,

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}. \tag{1}$$

Nosso propósito neste apêndice é compreender o raciocínio heurístico que levou Euler a essa maravilhosa descoberta.

Comecemos com álgebra elementar. Se a e b são $\neq 0$, é claro que esses números são as raízes da equação

$$\left(1 - \frac{x}{a}\right)\left(1 - \frac{x}{b}\right) = 0. \tag{2}$$

Essa equação pode ser escrita na forma

$$1 - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)x + \frac{1}{ab}x^2 = 0, \tag{3}$$

em que é evidente que o oposto do coeficiente de x é a soma dos inversos das raízes. Substituindo-se x por x^2 e a e b por a^2 e b^2, (2) e (3) tornam-se

$$\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{b^2}\right) = 0 \tag{4}$$

e

$$1-\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)x^2+\frac{1}{a^2b^2}x^4=0. \tag{5}$$

As raízes de (4) são exatamente $\pm a$ e $\pm b$, e (5) é (4) na forma polinomial. A partir dessa última vemos que o oposto dos coeficientes de x^2 é a soma dos inversos dos quadrados das raízes positivas. Esse caminho pode ser ampliado aö passarmos para equações de graus superiores, pois a equação

$$\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{b^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{c^2}\right)=0$$

(cujas raízes são obviamente $\pm a$, $\pm b$ e $\pm c$) pode ser escrita sob a forma

$$1-\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)x^2+\left(\frac{1}{a^2b^2}+\frac{1}{a^2c^2}+\frac{1}{b^2c^2}\right)x^4-\frac{1}{a^2b^2c^2}x^6=0,$$

e assim por diante.

Vamos considerar a equação transcendente

$$\operatorname{sen} x=0$$

ou

$$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots=0.$$

Essa equação pode ser encarada como "uma equação polinomial de grau infinito" com um número infinito de raízes 0, $\pm\pi$, $\pm 2\pi$, $\pm 3\pi$, ... A raiz 0 pode ser eliminada dividindo-se por x. Teremos, nesse caso, a equação

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x}=0$$

ou

$$1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\cdots=0,$$

cujas raízes são $\pm\pi$, $\pm 2\pi$, $\pm 3\pi$, ... Conhecendo-se as raízes dessa equação, podemos tentar generalizar a situação descrita no parágrafo anterior escrevendo a série infinita

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

sob a forma do "produto infinito"

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} = \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right) \cdots . \tag{6}$$

Além disso, a analogia que fizemos sugere também que

$$\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + \cdots = \frac{1}{3!},$$

da qual segue-se imediatamente a fórmula de Euler (1). Como observação adicional, é interessante notar que fazendo-se $x = \pi/2$ em (6) obteremos

$$\begin{aligned}\frac{2}{\pi} &= \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{4^2}\right)\left(1 - \frac{1}{6^2}\right) \cdots \\ &= \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}\right)\left(\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4}\right)\left(\frac{5}{6} \cdot \frac{7}{6}\right) \cdots ,\end{aligned}$$

que é equivalente a

$$\frac{\pi}{2} = \left(\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3}\right)\left(\frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5}\right)\left(\frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7}\right) \cdots .$$

Como sabemos, este é o *produto de Wallis*, rigorosamente provado no Apêndice A.5.

Essas especulações arrojadas são características do gênio único de Euler. Esperamos, no entanto, que nenhum estudante suponha que elas tenham a força de uma prova rigorosa. Será visto que o ponto central da matéria é a questão do significado e da validade de (6), expressão conhecida como *produto infinito de Euler para o seno.* As falhas dessa discussão convidam à construção de uma teoria geral de produtos infinitos, dentro da qual fórmulas como (6) podem ter seu lugar como fatos firmemente estabelecidos. Essa meta é alcançada em campos mais avançados da Matemática.

Uma prova elementar rigorosa da fórmula (1) de Euler, baseada em idéias totalmente diferentes, é dada no próximo apêndice.

A.8 UMA PROVA RIGOROSA DA FÓRMULA DE EULER

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

A prova que apresentaremos aqui é devida a D. P. Giesy e foi publicada no *Mathematics Magazine*, vol. 45 (1972), pp. 148-149. Outras provas elementares (e algumas não tão elementares) podem ser vistas nas referências de Giesy.

Começamos definindo a função $f_n(x)$ por

$$f_n(x) = \tfrac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx. \tag{1}$$

Necessitaremos da fórmula fechada para essa função dada por

$$f_n(x) = \frac{\operatorname{sen}[(2n+1)x/2]}{2 \operatorname{sen}(x/2)}, \tag{2}$$

onde x não é múltiplo de 2π. Para provar essa fórmula, usamos a identidade trigonométrica $2 \cos \theta \operatorname{sen} \phi = \operatorname{sen}(\theta + \phi) - \operatorname{sen}(\theta - \phi)$. Usando-a escrevemos, com exceção da primeira, as identidades

$$2 \cdot \frac{1}{2} \operatorname{sen} \frac{1}{2} x = \operatorname{sen} \frac{1}{2} x,$$

$$2 \cos x \operatorname{sen} \frac{1}{2} x = \operatorname{sen} \frac{3}{2} x - \operatorname{sen} \frac{1}{2} x,$$

$$2 \cos 2x \operatorname{sen} \frac{1}{2} x = \operatorname{sen} \frac{5}{2} x - \operatorname{sen} \frac{3}{2} x,$$

$$\cdots$$

$$2 \cos nx \operatorname{sen} \frac{1}{2} x = \operatorname{sen} \frac{(2n+1)x}{2} - \operatorname{sen} \frac{(2n-1)x}{2}.$$

A fórmula (2) é agora facilmente obtida somando-se essas identidades e fazendo os cancelamentos óbvios. Usamos agora (1) para definir o número E_n e também para calculá-lo:

$$E_n = \int_0^{\pi} x f_n(x)\, dx = \frac{\pi^2}{4} + \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{(-1)^k - 1}{k^2} \right]. \tag{3}$$

Cada termo da integral, após o primeiro, é integrado por partes, obtendo-se o resultado enunciado. Como os termos pares da soma da direita são nulos, pode-se escrever (3) sob a forma

$$\frac{1}{2} E_{2n-1} = \frac{\pi^2}{8} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)^2}. \tag{4}$$

Nossa próxima meta é mostrar que $\lim E_{2n-1} = 0$. Com isto teremos provado a fórmula

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}, \tag{5}$$

que será usada para provar nosso resultado final. Usando-se a fórmula (2) e definindo $g(x)$ por

$$g(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{x/2}{\operatorname{sen}(x/2)}\right],$$

uma integração por partes leva a

$$E_{2n-1} = \frac{1}{4n-1}\left[2 + 2\int_0^{\pi} g(x) \cos\frac{(4n-1)x}{2}\, dx\right], \tag{6}$$

onde fizemos uso do limite fundamental

$$\lim_{x \to 0} \frac{x/2}{\operatorname{sen}(x/2)} = 1.$$

Nossa conclusão desejada de que $\lim E_{2n-1} = 0$ seguirá de (6) se pudermos mostrar que $g(x)$ é limitada no intervalo de integração. Mas $g(x)$ é crescente e é, portanto, limitada nesse intervalo por $g(\pi) = 1/2$. Assim a igualdade (5) está provada.

Para completar a prova da fórmula de Euler, dividimos os inteiros positivos em pares e ímpares e usamos (5) para escrever

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{1}{4}\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{k^2} + \frac{\pi^2}{8}.$$

Daí

$$\frac{3}{4}\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{8},$$

logo

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{4}{3}\cdot\frac{\pi^2}{8}=\frac{\pi^2}{6}.$$

A.9. MAIS INFORMAÇÕES SOBRE NÚMEROS IRRACIONAIS. π É IRRACIONAL

Os leitores que jamais pensaram no assunto poderão indagar do interesse nos números irracionais. A fim de compreender, vamos supor por um momento que os únicos números de que dispomos sejam os racionais – que, afinal de contas, são os únicos números usados para fazer medições científicas. Nessas circunstâncias, o símbolo $\sqrt{2}$ não teria significado, pois não há número racional cujo quadrado dê 2 (veja o Apêndice A.1. – Volume I). Uma conseqüência disto é que a circunferência $x^2 + y^2 = 4$ e a reta $y = x$, que passa pelo seu centro, não se interceptariam, isto é, apesar das aparências, não haveria um ponto que estivesse nas duas linhas, pois ambas seriam descontínuas no sentido de que faltam pontos em ambas: cada uma cruza a outra em uma lacuna. Isto sugere que o sistema de números racionais é um instrumento inadequado para representar os objetos contínuos da Geometria e os movimentos contínuos da Física. Além disso, sem os números irracionais a maioria das seqüências e séries não convergiria e a maioria das integrais não existiria; e como é também verdade que e e π não teriam significado (provaremos abaixo que π é irracional), a enorme e intrincada estrutura da análise matemática desmoronaria num amontoado de entulhos tão insignificante que seria melhor varrê-lo. Na prática, é claro que, se os irracionais não existissem, seria necessário inventá-los. Foram os antigos gregos que descobriram que números irracionais são indispensáveis em Geometria, e esta foi uma das mais importantes contribuições à civilização.

Na Seção 14.3 provamos que e é irracional supondo o contrário e construindo um número a que era então um inteiro positivo < 1 – uma impossibilidade óbvia. Essa estratégia é também a chave das provas dos dois seguintes teoremas, mas os detalhes são algo mais complicados.

Necessitaremos de algumas propriedades da função $f(x)$ definida por

$$f(x)=\frac{x^n(1-x)^n}{n!}=\frac{1}{n!}\sum_{k=n}^{2n}c_kx^k,$$

onde os c_k são certos inteiros e n é um inteiro positivo a ser especificado mais tarde. Primeiro, é claro que se $0 < x < 1$, então teremos

$$0 < f(x) < \frac{1}{n!}. \tag{2}$$

A seguir, $f(0) = 0$ e $f^{(m)}(0) = 0$ se $m < n$ ou $m > 2n$; além disso, se $n \leqslant m \leqslant 2n$, então

$$f^{(m)}(0) = \frac{m!}{n!} c_m,$$

e esse número é inteiro. Assim, $f(x)$ e todas as suas derivadas têm valores inteiros em $x = 0$. Como $f(1 - x) = f(x)$, o mesmo é verdadeiro em $x = 1$.

Teorema 1 *e^r é irracional para todo número racional $r \neq 0$.*

Prova Se $r = p/q$ e e^r é racional, então $(e^r)^q = e^p$ também será. Além disso, se e^{-p} é racional, o mesmo ocorre com e^p. Portanto, basta provar que e^p é irracional para todo inteiro positivo p.

Suponha que $e^p = a/b$ para certos inteiros positivos a e b. Definimos $f(x)$ por (1) e $F(x)$ por

$$F(x) = p^{2n}f(x) - p^{2n-1}f'(x) + p^{2n-2}f''(x) - \cdots - pf^{(2n-1)}(x) + f^{(2n)}(x), \tag{3}$$

e observamos que $F(0)$ e $F(1)$ são inteiros. A seguir,

$$\frac{d}{dx}[e^{px}F(x)] = e^{px}[F'(x) + pF(x)] = p^{2n+1}e^{px}f(x), \tag{4}$$

onde a última igualdade é obtida por um exame detalhado de $F'(x) + pF(x)$ baseado em (3). A equação (4) mostra que

$$b\int_0^1 p^{2n+1}e^{px}f(x)\,dx = b\left[e^{px}F(x)\right]_0^1 = aF(1) - bF(0),$$

que é inteiro. Entretanto, (2) implica que

$$0 < b\int_0^1 p^{2n+1}e^{px}f(x)\,dx < \frac{bp^{2n+1}e^p}{n!} = bpe^p\frac{(p^2)^n}{n!};$$

e como a expressão à direita $\to 0$ quando $n \to \infty$ (pelo Exemplo 3 da Seção 14.2), segue-se que o inteiro $aF(1) - bF(0)$ tem a propriedade de que

$$0 < aF(1) - bF(0) < 1$$

se n for suficientemente grande. Como não há inteiro positivo > 1, essa contradição completa a prova.

Chamando-se um ponto (x, y) do plano de *ponto racional* sempre que ambos x e y são números racionais, esse teorema afirma que a curva $y = e^x$ atravessa o plano de tal modo que deixa escapar todos os pontos racionais, exceto $(0, 1)$. Uma proposição equivalente é que $y = \ln x$ deixa escapar todos os pontos racionais exceto $(1, 0)$, logo $\ln 2, \ln 3, \ldots$ são todos irracionais. Podemos provar também que $y = \operatorname{sen} x$ deixa escapar todos os pontos racionais exceto $(0, 0)$ e que $y = \cos x$ deixa escapar todos os pontos racionais exceto $(0, 1)$*. Cada um desses teoremas implica que π é irracional, pois $\operatorname{sen} \pi = 0$ e $\cos \pi = -1$. Entretanto, preferimos provar a irracionalidade de π por meio do argumento direto que daremos a seguir.

Teorema 2 *π é irracional.*

Prova Evidentemente basta provar que π^2 é irracional, logo suporemos o contrário, que $\pi^2 = a/b$ para certos inteiros positivos a e b. Definimos novamente $f(x)$ por (1), mas dessa vez fazemos

$$F(x) = b^n[\pi^{2n}f(x) - \pi^{2n-2}f''(x) + \pi^{2n-4}f^{(4)}(x) - \cdots + (-1)^n f^{(2n)}(x)], \tag{5}$$

e novamente observamos que $F(0)$ e $F(1)$ são inteiros. Um cálculo baseado em (5) mostra que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[F'(x)\operatorname{sen}\pi x - \pi F(x)\cos\pi x] &= [F''(x) + \pi^2 F(x)]\operatorname{sen}\pi x \\ &= b^n\pi^{2n+2}f(x)\operatorname{sen}\pi x = \pi^2 a^n f(x)\operatorname{sen}\pi x.\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}\int_0^1 \pi a^n f(x)\operatorname{sen}\pi x\, dx &= \left[\frac{F'(x)\operatorname{sen}\pi x}{\pi} - F(x)\cos\pi x\right]_0^1 \\ &= F(1) + F(0),\end{aligned}$$

---

* Os detalhes podem ser encontrados no Capítulo II do excelente livro de I. Niven, *Irrational Numbers*, Wiley, 1956.

que é inteiro. Mas (2) implica que

$$0 < \int_0^1 \pi a^n f(x) \operatorname{sen} \pi x \, dx < \frac{\pi a^n}{n!} < 1$$

se n for suficientemente grande; essa contradição – de que $F(1) + F(0)$ é inteiro positivo < 1 – conclui a prova.

O método subjacente de prova usado nos Teoremas 1 e 2 foi criado pelo matemático francês Hermite, em 1873, mas os detalhes do último argumento foram primeiro publicados por Niven, em 1947.

A.10 NÚMEROS ALGÉBRICOS E TRANSCENDENTES. *e* É TRANSCENDENTE

No Apêndice A.9, consideramos a classificação de números reais em racionais e irracionais. Discutiremos agora uma distinção semelhante mas mais profunda e mais importante entre números algébricos e transcendentes.

Um número real diz-se *algébrico* se satisfizer uma equação polinomial da forma

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \tag{1}$$

com coeficientes inteiros, onde $a_n \neq 0$; se não satisfizer uma equação como esta, chama-se *transcendente**. Por exemplo, $\sqrt{2}$ e $\sqrt[3]{2 + \sqrt{2}}$ são algébricos, pois são raízes de $x^2 - 2 = 0$ e $x^6 - 4x^3 + 2 = 0$. Qualquer número racional p/q é algébrico, pois é raiz da equação do primeiro grau $qx - p = 0$. Os números algébricos podem, portanto, ser vistos como uma generalização natural dos números racionais. Se um número algébrico satisfizer (1) não sendo raiz de nenhuma equação de grau menor, dizemos que ele é de grau n. Assim, os números racionais são números algébricos de grau 1; $\sqrt{2}$ é de grau 2, pois é irracional e satisfaz uma equação do segundo grau.

Como o próprio nome sugere, números algébricos são de grande interesse e importância por muitas razões que provêm da Álgebra e da Teoria dos Números. Explicaremos resumidamente como eles aparecem também em Geometria e depois concluíremos com algumas aplicações clássicas da análise a esse assunto.

---

* Os números complexos são classificados exatamente da mesma maneira, mas na maior parte deste apêndice trataremos apenas dos números reais.

Construções Geométricas

Os matemáticos gregos antigos enfrentaram problemas geométricos de construção de figuras com propriedades especificadas. Eles, com freqüência, conseguiram resolver seus problemas, mas, às vezes, isto não ocorria como na quadratura do círculo. Esse problema consistia em começar com um dado círculo e construir um quadrado de mesma área. Nesse contexto, a palavra "construir" tem um significado especial, pois os únicos instrumentos permitidos são uma régua sem escala e um compasso.

Toda construção com régua e compasso começa com certos dados iniciais, consistindo em uma coleção finita de pontos, retas e circunferências num plano. A construção então continua gerando novos pontos, retas e circunferências, por meio de alguma combinação das seguintes operações: com a régua podemos desenhar a reta determinada por dois pontos dados; com o compasso podemos desenhar a circunferência cujo centro é um ponto dado e cujo raio é a distância entre dois pontos dados; e podemos determinar os pontos de interseção (se houver) de retas e circunferências dadas. Quando entendido dessa maneira, o problema da quadratura do círculo reduz-se a começar com um segmento de comprimento 1 (podemos tomar o raio da circunferência dada como a unidade de medida) e construir um segmento de comprimento $\sqrt{\pi}$. Esse problema ficou sem solução por mais de 2.000 anos e foi resolvido apenas no século XIX pelo matemático alemão Lindemann que provou ser insolúvel.

Começando-se com um único segmento de comprimento 1, então é bastante fácil mostrar que o comprimento de qualquer segmento construtível é um número algébrico cujo grau é uma potência de 2*. Em particular, se um número real não for algébrico de modo nenhum, é certamente não-construtível, no sentido que estamos considerando. Segundo esse caminho, Lindemann provou que um círculo não pode ser "transformado" em quadrado: ele demonstrou (em 1882) que π é transcendente e, portanto, não-construtível: a partir daí segue-se que $\sqrt{\pi}$ também não é construtível**. A prova de Lindemann é bastante difícil. Reconduzimos então nossa atenção para o problema mais simples de mostrar que números transcendentes realmente existem.

Teorema de Liouville

Os primeiros números conhecidos como transcendentes foram exibidos pelo matemático francês Liouville, em 1851. Ele produziu seus exemplos com a ajuda do seguinte teorema, que,

---

* Uma discussão elementar muito clara pode ser encontrada no Capítulo III de R. Courant e H. Robbins, *What is Mathematics?* Oxford Press, 1941. Para tratamentos um pouco mais profundos baseados mais firmemente na teoria de extensões de corpos da Álgebra Moderna, veja Burton W. Jones, *An Introduction do Modern Algebra,* Macmillan, 1975; I. T. Adamson, *Introduction to Field Theory,* Oliver and Boyd, 1964; ou Seth Warner, *Modern Algebra,* Prentice-Hall, 1965.

** Ferdinand Lindemann (1852-1939) foi um discípulo de Weierstrass e lecionou na Universidade de Munich desde 1893 até sua aposentadoria. Existe um busto seu nessa instituição e além de seu nome está gravada a letra π, tendo por moldura um círculo e um quadrado recordando sua grande realização científica (basta uma como essa!). Ele também tentou por muitos anos, sem sucesso, provar o último teorema de Fermat.

numa interpretação grosseira, diz que um número irracional algébrico não pode ser aproximado muito de perto por números racionais p/q a menos que se permita que os denominadores q sejam muito grandes.

Teorema 1 *Seja α um número algébrico real de grau $n > 1$; nessas condições existe uma constante $c > 0$ tal que*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{c}{q^n}$$

para todos os números racionais p/q com $q > 0$.

Prova Por hipótese, α é uma raiz real de uma equação polinomial

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0,$$

onde os coeficientes são inteiros, $n > 1$ e $a_n \neq 0$; por hipótese também, α não satisfaz qualquer equação como essa de grau menor (e, em particular, não é racional). Seja M um majorante qualquer de $|f'(x)|$ no intervalo $-1 \leqslant x \leqslant \alpha + 1$. Definindo-se c como o menor dentre os números 1 e $1/M$, provaremos que c tem a propriedade exigida.

Primeiro, se $|\alpha - p/q| \geqslant 1$, então é óbvio que

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq c \geq \frac{c}{q^n},$$

pois q é um inteiro positivo.

Se $|\alpha - p/q| < 1$, argumentamos como se segue. Começamos observando que p/q não pode ser uma raiz de $f(x) = 0$, pois, se fosse, poderíamos dividir $f(x)$ por $x - p/q$ e escrever a equação na forma $(x - p/q) \cdot g(x) = 0$, onde $g(x)$ é um polinômio de grau $n - 1$ com coeficientes inteiros; α (sendo irracional) satisfaria então a equação $g(x) = 0$, contrariando a hipótese. Temos portanto, $f(p/q) \neq 0$, logo

$$\left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right| = \frac{|a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \cdots + a_0 q^n|}{q^n} \geq \frac{1}{q^n}.$$

A seguir, o Teorema do Valor Médio implica que

$$\left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right| = \left|f\left(\frac{p}{q}\right) - f(\alpha)\right| = \left|\frac{p}{q} - \alpha\right| \left|f'(a)\right|$$

para algum número a entre p/q e α e, portanto, pertencente ao intervalo em que $|f'(x)|$ é limitado por M. Isto acarreta

$$\frac{1}{q^n} \leq \left| f\left(\frac{p}{q}\right) \right| \leq \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| M,$$

logo

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{1}{M} \cdot \frac{1}{q^n} \geq \frac{c}{q^n},$$

e a prova está terminada.

Como conseqüência direta desse teorema, temos o seguinte: sendo α um número irracional com a propriedade de que para cada $n > 1$ existem racionais p/q que fazem

$$q^n \left| \alpha - \frac{p}{q} \right|$$

tão pequenos quanto quisermos, então α não pode ser algébrico e, portanto, deve ser transcendente. Esse fato permite-nos produzir muitos exemplos concretos de números transcendentes, como por exemplo,

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{10^{1!}} + \frac{1}{10^{2!}} + \frac{1}{10^{3!}} + \cdots + \frac{1}{10^{m!}} + \cdots \\ &= 0.110001000000000000000001 00 \ldots . \end{aligned}$$

Para ver que α é transcendente, notemos primeiro que α é irracional, pois o decimal é não-periódico. A seguir, seja $n > 1$ um inteiro dado; para todos m, $m > n$, aproximamos α pela m-ésima soma parcial p/q da série; então $q = 10^{m!}$ e

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| = \frac{1}{10^{(m+1)!}} + \frac{1}{10^{(m+2)!}} + \cdots < \frac{2}{10^{(m+1)!}}.$$

Segue-se agora que

$$q^n \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| = (10^{m!})^n \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \quad < 2 \cdot \frac{(10^{m!})^n}{10^{(m+1)!}} = 2 \left(\frac{10^n}{10^{m+1}} \right)^{m!} \to 0$$

quando $m \to \infty$, logo α é transcendente. É claro que podemos produzir muitos outros exemplos desse tipo considerando as somas das séries

$$\frac{a_1}{10^{1!}} + \frac{a_2}{10^{2!}} + \cdots + \frac{a_m}{10^{m!}} + \cdots,$$

onde os numeradores são quaisquer dígitos 1, 2, ..., 9. Esses números irracionais são todos transcendentes, e a razão essencial é que cada um é o limite de uma seqüência de racionais muito rapidamente convergentes.

Essa abordagem torna possível exibir muitos exemplos de números transcendentes, mas é muito mais difícil provar a transcendência de números particulares que ocorrem mais ou menos naturalmente em Matemática. O início real foi estabelecido pelo trabalho de Hermite, que mostrou, em 1873, que e é transcendente (veja abaixo); a prova de Lindemann da transcendência de π, em 1882, foi uma extensão absolutamente direta das idéias de Hermite. Mas o progresso subseqüente foi lento. Em sua famosa comunicação feita em Paris em 1900, o grande matemático alemão David Hilbert propôs uma lista de 23 problemas não-resolvidos que ele considerava como sendo os maiores desafios aos matemáticos do futuro. O 17º desta relação era, em parte, provar que e^{π} e $2^{\sqrt{2}}$ são transcendentes. Gelfond teve sucesso em provar a afirmação para e^{π} em 1929, e Kuzmin provou-a para $2^{\sqrt{2}}$ em 1930. Essa linha de pensamento alcançou o clímax em 1934-1935, quando esses fatos tomaram seu lugar como casos particulares de um profundo teorema de Gelfond e Schneider, que enunciamos sem demonstração*.

Teorema 2 *Se α e β são números algébricos reais ou complexos tais que α é diferente de 0 e de 1 e β não é um número real racional, então α^{β} é transcendente.*

A transcendência de $2^{\sqrt{2}}$ é uma conseqüência óbvia desse teorema e, para os estudantes que conhecem um pouco de números complexos, a transcendência de e^{π} segue-se do fato de que e^{π} é um dos valores de $e^{-2i\ln i} = i^{-2i}$, e este último tem a forma requerida no teorema. Entretanto, a despeito desses avanços, há ainda muitos problemas abertos e não se conhece nada acerca da natureza de qualquer dos seguintes números:

$$e + \pi,\ e\pi,\ \pi^{e},\ 2^{e},\ 2^{\pi}.$$

* As principais referências são o livro de Niven, mencionado no Apêndice A.9; C. L. Siegel, *Transcendental Numbers*, Princeton, 1949; e A. O. Gelfond, *Transcendental and Algebraic Numbers*, Dover, 1960. Veja também o comunicado de Hilbert "Mathematical Problems", *Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 8 (1902), pp. 437-479. As circunstâncias que envolvem a comunicação de Hilbert, que talvez seja a segunda mais importante conferência científica jamais dada, são interessantemente descritas na biografia de C. Reid, *Hilbert*, Springer-Verlag, 1970, pp. 69-84.

A Transcendência de e

O argumento que apresentamos é a versão simplificada de Hilbert da prova original de Hermite.

Começamos supondo que e é algébrico de grau n, o que significa que satisfaz uma equação da forma

$$a_n e^n + \cdots + a_2 e^2 + a_1 e + a_0 = 0, \tag{2}$$

onde os coeficientes são inteiros e a_n, $a_0 \neq 0$. A estratégia da prova é obter uma contradição aproximando bastante as várias potências de e' por racionais:

$$e^n = \frac{M_n + \epsilon_n}{M}, \quad \ldots, \quad e^2 = \frac{M_2 + \epsilon_2}{M}, \quad e = \frac{M_1 + \epsilon_1}{M}, \tag{3}$$

onde M, M_n, ..., M_2, M_1 são inteiros e os termos de erro E_n/M, ... E_2/M, E_1/M são muito pequenos. Substituindo-se (3) em (2) e multiplicando por M, o resultado será

$$[a_n M_n + \cdots + a_1 M_1 + a_0 M] + [a_n \epsilon_n + \cdots + a_1 \epsilon_1] = 0. \tag{4}$$

A primeira expressão entre colchetes é um inteiro; escolheremos os M de modo que ela não seja nula. Ao mesmo tempo, escolheremos os ϵ tão pequenos que a segunda expressão entre colchetes seja < 1 em valor absoluto,

$$|a_n \epsilon_n + \cdots + a_1 \epsilon_1| < 1. \tag{5}$$

Essa contradição (um inteiro não-nulo mais um número de valor absoluto < 1 não pode ser 0) completará então a prova.

Os estudantes certamente concordarão que é um plano simples e razoável. Mas o aspecto notável da prova de Hermite é a maneira extremamente engenhosa com que ele define os M e os ϵ por meio de uma integral cuja estrutura é exatamente adaptada a esse objetivo. A integral de Hermite define M:

$$M = \int_0^\infty \frac{x^{p-1}[(x-1)(x-2)\cdots(x-n)]^p e^{-x}}{(p-1)!}\, dx, \tag{6}$$

onde n é o grau de (2) e p é um primo a ser especificado mais tarde. Veremos que M é um inteiro para qualquer p e será essencial saber que p pode ser tão grande quanto quisermos (há infinitos primos!). É claro, de (3), que para cada $k = 1, 2, ..., n$ devemos ter $M_k + \epsilon_k = e^k M$; e essa condição será satisfeita se definirmos M_k e ϵ_k quebrando o intervalo de integração de $e^k M$ no ponto k:

$$M_k = e^k \int_k^\infty \frac{x^{p-1}[(x-1)\cdots(x-n)]^p e^{-x}}{(p-1)!}\, dx, \tag{7}$$

$$\epsilon_k = e^k \int_0^k \frac{x^{p-1}[(x-1)\cdots(x-n)]^p e^{-x}}{(p-1)!}\, dx. \tag{8}$$

Daremos agora a demonstração de que para uma escolha adequada de p, esses M e ϵ têm as propriedades desejadas.

Precisaremos da seguinte fórmula da teoria elementar da função gama: para um inteiro positivo qualquer m,

$$\int_0^\infty x^m e^{-x}\, dx = m!. \tag{9}$$

A prova é fácil e começa com uma integração por partes (com $u = x^m$, $dv - e^{-x} dx$):

$$\int_0^\infty x^m e^{-x}\, dx = \Big[-x^m e^{-x}\Big]_0^\infty + m\int_0^\infty x^{m-1} e^{-x}\, dx$$
$$= m\int_0^\infty x^{m-1} e^{-x}\, dx.$$

A integral da direita é a mesma que a da esquerda, exceto pelo expoente de x que foi reduzido de 1. Logo, continuando da mesma maneira, teremos

$$\int_0^\infty x^m e^{-x}\, dx = m\int_0^\infty x^{m-1} e^{-x}\, dx = m(m-1)\int_0^\infty x^{m-2} e^{-x}\, dx$$
$$= \cdots = m(m-1)(m-2)\cdots 2\cdot 1\int_0^\infty e^{-x}\, dx = m!,$$

pois o valor da última integral é 1.

Voltamos agora ao cálculo da integral (6). A expressão $(x-1)(x-2)\ldots(x-n)$ é um polinômio.

$$x^n + \cdots \pm n!$$

com coeficientes inteiros; elevando a expressão à p-ésima potência obteremos

$$[(x-1)(x-2)\cdots(x-n)]^p = x^{np} + \cdots \pm (n!)^p,$$

onde novamente os coeficientes são inteiros. Isto permite-nos escrever (6) na forma

$$M = \frac{\pm(n!)^p}{(p-1)!}\int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}\,dx + \sum_{i=1}^{np}\frac{b_i}{(p-1)!}\int_0^\infty x^{p-1+i}e^{-x}\,dx,$$

onde os b_i são inteiros. Aplicando-se (9) teremos

$$M = \pm(n!)^p + \sum_{i=1}^{np} b_i\frac{(p-1+i)!}{(p-1)!},$$

que é um inteiro. Se nos restringirmos agora a primos $p > n$, então o primeiro termo aqui é um inteiro não divisível por p. Entretanto,

$$b_i\frac{(p-1+i)!}{(p-1)!} = b_i p(p+1)\cdots(p-1+i)$$

é divisível por p, logo M é certamente um inteiro não divisível por p. Podemos acrescentar a condição posterior de que $p > |a_0|$; como $a_0 \neq 0$, segue-se que o termo a_0M em (4) não é divisível por p (se um primo divide um produto, ele deve dividir um dos fatores).

A seguir, consideramos a integral (7), da definição de M_k:

$$M_k = \int_k^\infty \frac{x^{p-1}[(x-1)\cdots(x-n)]^p e^{-(x-k)}}{(p-1)!}\,dx.$$

Introduzindo-se uma nova variável $y = x - k$, teremos

$$M_k = \int_0^\infty \frac{(y+k)^{p-1}[(y+k-1)\cdots y\cdots(y+k-n)]^p e^{-y}}{(p-1)!}\,dy.$$

Agora a expressão entre colchetes contém y no k-ésimo lugar, logo a potência p-ésima da expressão é um polinômio em y com termos que vão de y^p a y^{np}. Concluímos que

$$(y+k)^{p-1}[(y+k-1)\cdots y\cdots(y+k-n)]^p$$

é um polinômio com coeficientes inteiros cujos termos vão de y^p a y^{p-1+np}, logo

$$M_k = \sum_{i=1}^{np}\frac{c_i}{(p-1)!}\int_0^\infty y^{p-1+i}e^{-y}\,dy = \sum_{i=1}^{np} c_i\frac{(p-1+i)!}{(p-1)!},$$

onde os c_i são inteiros. Pelo mesmo raciocínio anterior, cada M_k é um inteiro divisível por p, logo a primeira expressão entre colchetes em (4) é um inteiro não divisível por p. Concluímos que para os primos p em consideração, o número

$$a_n M_n + \cdots + a_1 M_1 + a_0 M$$

é um inteiro não-nulo, pois se fosse nulo seria divisível por p.

Tudo que resta mostrar é que (5) é verdadeira se p for suficientemente grande; como n é fixo, é suficiente provar que cada $|\epsilon_k|$ pode ser feito tão pequeno quanto quisermos tomando p suficientemente grande. Para estabelecer isto, observamos que

$$\begin{aligned} |\epsilon_k| &\leq e^k \int_0^k \frac{x^{p-1}|(x-1)\cdots(x-n)|^p e^{-x}}{(p-1)!}\,dx \\ &\leq e^n \int_0^n \frac{x^{p-1}|(x-1)\cdots(x-n)|^p e^{-x}}{(p-1)!}\,dx \\ &\leq \frac{e^n n^{p-1}}{(p-1)!} \int_0^n |(x-1)\cdots(x-n)|^p\,dx. \end{aligned}$$

Se B for um majorante de $(x-1)\ldots(x-n)$ no intervalo $0 \leqslant x \leqslant n$, segue-se que

$$|\epsilon_k| \leq \frac{e^n n^{p-1}}{(p-1)!} B^p n = e^n \frac{(nB)^p}{(p-1)!};$$

e como a expressão da direita $\to 0$ quando $p \to \infty$, a prova está terminada.

A.11 A SÉRIE $\Sigma 1/p_n$ DOS INVERSOS DOS PRIMOS

No Apêndice A.7 (Volume I) demos a prova de Euclides do fato de que existem infinitos números primos. Cerca de 2.000 anos depois da época de Euclides, em 1737, Euler descobriu duas novas demonstrações fundamentalmente diferentes; os métodos que ele utilizou lançaram os fundamentos de um novo ramo da Matemática, que agora se chama *Teoria Analítica dos Números.*

A fim de compreender as idéias de Euler, começamos recordando que a série harmônica

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

diverge. Por outro lado, sabemos que para todo expoente $s > 1$, a série

$$1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots + \frac{1}{n^s} + \cdots$$

converge; a chamada *função zeta* é definida como sendo a soma dessa série

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots,$$

uma função da variável s*.

A descoberta básica de Euler foi a identidade notável que liga a função zeta com os números primos

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1 - 1/p^s}, \tag{1}$$

onde a expressão da direita denota o produto dos números $1/(1 - p^{-s})$ para todos os primos $2, 3, 5, 7, 11, \ldots$, isto é, onde

$$\prod_p \frac{1}{1 - 1/p^s} = \frac{1}{1 - 1/2^s} \cdot \frac{1}{1 - 1/3^s} \cdot \frac{1}{1 - 1/5^s} \cdot \frac{1}{1 - 1/7^s} \cdots.$$

Para ver como a identidade (1) aparece, recordamos que a série geométrica $1/(1 - x) = 1 + x + x^2 \ldots$ é válida para $|x| < 1$; logo, para cada primo p, temos

$$\frac{1}{1 - 1/p^s} = 1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \frac{1}{p^{3s}} + \cdots.$$

Sem nos determos na justificativa do processo, multiplicamos agora essas séries para todos os primos p, lembrando que cada inteiro $n > 1$ pode ser expresso de maneira única como produto de potências de primos diferentes. Isto acarreta

$$\prod_p \frac{1}{1 - 1/p^s} = \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \frac{1}{p^{3s}} + \cdots\right)$$
$$= 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots + \frac{1}{n^s} + \cdots$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \zeta(s),$$

que é a identidade (1).

* Denotamos a variável independente por s (em vez de p, como no Capítulo 14), a fim de manter a notação costumeira da Teoria dos Números.

Um dos argumentos de Euler está baseado em (1). Começamos observando que se houvesse apenas um número finito de primos, então o produto do segundo membro de (1) seria um produto finito ordinário e teria evidentemente um valor finito para todo $s > 0$, inclusive para $s = 1$. Entretanto, o valor do primeiro membro de (1) para $s = 1$ é a série harmônica

$$\zeta(1) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots ,$$

que diverge a infinito. Esse argumento, que levou a uma contradição e que pode ser transformado numa prova rigorosa, mostra que existe um número infinito de primos. O segundo argumento de Euler repousa sobre sua descoberta de que *a série dos inversos dos primos diverge,*

$$\sum \frac{1}{p_n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \cdots = \infty, \tag{2}$$

pois se houvesse apenas um número finito de primos, é óbvio que essa série não poderia divergir.

A prova de (2) que demos aqui inicia-se com a série geométrica

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots ,$$

$$\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots ,$$

$$\frac{1}{1-\frac{1}{5}} = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \cdots ,$$

$$\cdots$$

$$\frac{1}{1-1/p_n} = 1 + \frac{1}{p_n} + \frac{1}{p_n{}^2} + \cdots .$$

Multiplicando-se essas séries para formar uma nova série cujos termos são todos os possíveis produtos de termos escolhidos, um de cada uma das séries à direita, então essa nova série converge em qualquer ordem ao produto dos números à esquerda*. Como todo inteiro maior que 1 se expressa de modo único como produto de potências de primos diferentes, o produto dessas séries é a série dos inversos de todos os inteiros positivos cujos fatores primos são $\leqslant p_n$. Em particular, todos os inteiros positivos $\leqslant p_n$ têm essa propriedade, logo

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3}} \cdots \frac{1}{1-1/p_n} \geq \sum_{k=1}^{p_n} \frac{1}{k} > \int_1^{p_n+1} \frac{dx}{x} = \ln(p_n+1) > \ln p_n .$$

* Essa afirmação segue-se de um dos teoremas provados no Apêndice B.2.

(É na transição feita, aqui, da soma à integral que usamos as idéias da Seção 14.5.) Segue-se que

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_n}\right)<\frac{1}{\ln p_n},$$

e tomando logaritmos de ambos os membros temos

$$\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1-\frac{1}{p_k}\right)<-\ln\ln p_n. \qquad (3)$$

A seguir devemos mostrar que

$$-\frac{2}{p_k}<\ln\left(1-\frac{1}{p_k}\right), \qquad (4)$$

pois quando esse resultado for aplicado a (3), teremos

$$-2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{p_k}<-\ln\ln p_n$$

ou

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{p_k}>\frac{1}{2}\ln\ln p_n,$$

e nossa conclusão de que $\Sigma\, 1/p_n$ diverge seguirá do fato de que $\ln\ln p_n\to\infty$. Para estabelecer (4) e completar o argumento, basta observar que a reta $y = 2x$ está abaixo da curva $y=\ln(1+x)$ no intervalo $-\frac{1}{2}\leqslant x<0$ e que todo primo é $\geqslant 2$*.

A.12 OS NÚMEROS DE BERNOULLI E ALGUMAS DESCOBERTAS MARAVILHOSAS DE EULER

Neste apêndice obteremos várias fórmulas descobertas por Euler que estão entre as verdades mais elegantes de toda a Matemática. Usamos a palavra "obteremos" em vez de "provaremos" pois alguns de nossos argumentos são pouco formais e exigem idéias mais avançadas do que podemos apresentar aqui para tornar a demonstração totalmente rigorosa no sentido demandado pelo

---

* Outras provas de (2) podem ser vistas em: I. Niven, *Amer. Math. Monthly*, 1971, pp. 272-273; C. V. Eynden, *Amer. Math. Monthly*, 1980, pp. 394-397.

conceito moderno de prova matemática. Entretanto, o simples fato de não podermos aqui fechar todas as lacunas no raciocínio parece uma desculpa muito fraca para negar aos estudantes uma oportunidade de apreciar rapidamente algumas das maravilhas que podem ser encontradas nessa parte do Cálculo. Para aqueles que desejarem ir mais a fundo, provas completas são encontradas no tratado de K. Knopp mencionado na Seção 14.11.

Os Números de Bernoulli

Como

$$\frac{e^x - 1}{x} = 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \cdots$$

para $x \neq 0$, e essa série de potências tem o valor 1 em $x = 0$, a função inversa $x/(e^x - 1)$ tem uma expansão em série de potências válida em alguma vizinhança da origem se o valor desta função for definido como sendo 1 em $x = 0$. Escrevemos essa série na forma

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n = B_0 + B_1 x + \frac{B_2}{2!} x^2 + \cdots . \tag{1}$$

Os números B_n definidos dessa maneira são chamados *números de Bernoulli*, e é claro que $B_0 = 1$. É fácil ver que

$$\frac{x}{e^x - 1} = \frac{x}{2}\left(\frac{e^x + 1}{e^x - 1} - 1\right) = -\frac{x}{2} + \frac{x}{2} \cdot \frac{e^x + 1}{e^x - 1}. \tag{2}$$

Um teste de rotina mostra que o segundo termo da direita é uma função par, logo $B_1 = -\frac{1}{2}$ e $B_n = 0$ se n for ímpar e > 1. Escrevendo (1) na forma

$$\left(\frac{B_0}{0!} + \frac{B_1}{1!} x + \frac{B_2}{2!} x^2 + \cdots\right)\left(\frac{1}{1!} + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \cdots\right) = 1,$$

fica claro que o coeficiente de x^{n-1} no produto da esquerda é igual a zero se $n > 1$. Pela regra da multiplicação de séries de potências, isto implica

$$\frac{B_0}{0!} \cdot \frac{1}{n!} + \frac{B_1}{1!} \cdot \frac{1}{(n-1)!} + \frac{B_2}{2!} \cdot \frac{1}{(n-2)!} + \cdots + \frac{B_{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{1}{1!} = 0,$$

e multiplicando-se por $n!$, obtemos

$$\frac{n!}{0!n!}B_0 + \frac{n!}{1!(n-1)!}B_1 + \frac{n!}{2!(n-2)!}B_2 + \cdots + \frac{n!}{(n-1)!1!}B_{n-1} = 0. \qquad (3)$$

Essa equação pode também ser escrita mais resumidamente como

$$\binom{n}{0}B_0 + \binom{n}{1}B_1 + \binom{n}{2}B_2 + \cdots + \binom{n}{n-1}B_{n-1} = 0$$

ou

$$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}B_k = 0,$$

onde $\binom{n}{k}$ é o coeficiente binomial $n!/[k!(n-k)!]$. Tomando $n = 3, 5, 7, 9, 11, \ldots$ em (3) e fazendo uma pequena aritmética, descobrimos facilmente que

$$B_2 = \tfrac{1}{6}, \quad B_4 = -\tfrac{1}{30}, \quad B_6 = \tfrac{1}{42}, \quad B_8 = -\tfrac{1}{30}, \quad B_{10} = \tfrac{5}{66}, \ \ldots .$$

Esses cálculos podem ser continuados recursivamente tanto quanto quisermos, assim todos os números de Bernoulli podem ser considerados como conhecidos, mesmo que considerável trabalho possa ser exigido para obtermos qualquer um deles. Salientamos que é óbvio, levando-se (3) em consideração e pelo modo de calcular, que todo B_n é racional.

A Série de Potências da Tangente

Começamos agora a explorar aplicações desses números.

Na equação (2) para o 1º membro, usamos o fato de que

$$\frac{x}{2}\cdot\frac{e^x+1}{e^x-1} = \frac{x}{2}\cdot\frac{e^{x/2}+e^{-x/2}}{e^{x/2}-e^{-x/2}}$$

obtendo

$$\frac{x}{2}\cdot\frac{e^{x/2}+e^{-x/2}}{e^{x/2}-e^{-x/2}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_{2n}}{(2n)!}x^{2n}. \qquad (4)$$

No primeiro membro dessa equação, substituímos agora x por $2ix$, o que acarreta

$$\frac{2ix}{2}\cdot\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{e^{ix}-e^{-ix}} = x\,\frac{(e^{ix}+e^{-ix})/2}{(e^{ix}-e^{-ix})/2i} = x\operatorname{cotg} x,$$

pelas fórmulas de sen x e cos x que foram deduzidas na Seção 14.12. Fazendo a mesma substituição no segundo membro de (4), temos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!}(2ix)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n}B_{2n}}{(2n)!} x^{2n},$$

logo

$$x \operatorname{cotg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n}B_{2n}}{(2n)!} x^{2n}. \tag{5}$$

A identidade trigonométrica $\operatorname{tg} x = \operatorname{cotg} x - 2 \operatorname{cotg} 2x$ nos possibilita usar (5) para escrever

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n}B_{2n}}{(2n)!} x^{2n-1} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n}B_{2n}}{(2n)!} (2x)^{2n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n}B_{2n}}{(2n)!} x^{2n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n}B_{2n}}{(2n)!} 2^{2n} x^{2n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n}B_{2n}}{(2n)!} (1 - 2^{2n}) x^{2n-1}, \end{aligned}$$

logo

$$\operatorname{tg} x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n}(2^{2n} - 1)B_{2n}}{(2n)!} x^{2n-1}.$$

Essa é a série de potências completa de $\operatorname{tg} x$ que foi encontrada diversas vezes em forma truncada na Seção 14.11. Baseado em nosso conhecimento dos números de Bernoulli, os primeiros termos dessa série são fáceis de calcular explicitamente,

$$\operatorname{tg} x = x + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{2}{15}x^5 + \tfrac{17}{315}x^7 + \tfrac{62}{2835}x^9 + \cdots .$$

A Expansão da Cotangente em Frações Parciais

Usando métodos inteiramente diferentes, Euler descobriu uma outra expansão notável da cotangente: se x não for inteiro, então

$$\pi \operatorname{cotg} \pi x = \frac{1}{x} + 2x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 - n^2}. \tag{6}$$

Examinaremos essa fórmula de dois pontos de vista bem diferentes, e daremos duas deduções.

Primeiro, é bem fácil ver que (6) é análoga à expansão de uma função racional em frações parciais. Por exemplo, se considerarmos a função racional $(2x + 1)/(x^2 - 3x + 2)$ e observarmos que o denominador tem raízes 1 e 2 e pode, portanto, ser fatorado em $(x - 1)(x - 2)$, isto leva à expansão

$$\frac{2x+1}{x^2-3x+2} = \frac{2x+1}{(x-1)(x-2)} = \frac{c_1}{x-1} + \frac{c_2}{x-2}$$

para certas constantes c_1 e c_2. A constante c_1 pode agora ser determinada multiplicando-se por $x - 1$ e permitindo a x tender a 1; analogamente para c_2. Formalmente, (6) pode ser obtida da mesma maneira, notando que $\operatorname{cotg} \pi x = \cos \pi x / \operatorname{sen} \pi x$ tem denominador com raízes $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ e deve, portanto, poder ser expresso na forma

$$\operatorname{cotg} \pi x = \frac{a}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{b_n}{x-n} + \frac{c_n}{x+n} \right). \tag{7}$$

Desta expressão, as constantes a, b_n e c_n podem ser determinadas pelo procedimento sugerido (elas são iguais a $1/\pi$) e (7) pode então ser rearranjada para chegar a (6). Por motivos que agora serão óbvios, é costume nos referirmos a (6) como *expansão da cotangente em frações parciais.* O principal defeito dessa dedução sugestiva, mas um tanto quanto tentativa, é naturalmente o fato de que não temos garantia *a priori* de que uma expressão da forma (7) seja possível.

Um outro modo de chegarmos a (6) é iniciarmos com o produto infinito (6) do Apêndice A.7:

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} = \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right) \cdots.$$

Tomando-se o logaritmo de ambos os membros para obter

$$\ln \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right),$$

e depois derivando, o resultado, como é fácil ver, será

$$\operatorname{cotg} x - \frac{1}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2x}{n^2\pi^2 - x^2}$$

ou

$$\operatorname{cotg} x = \frac{1}{x} + 2x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 - n^2\pi^2};$$

substituindo-se x por πx e depois multiplicando por πx, obtemos

$$\pi x \operatorname{cotg} \pi x = 1 + 2x^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 - n^2}, \tag{8}$$

que é equivalente a (6).

A Fórmula de Euler para $\Sigma 1/n^{2k}$

Obteremos agora um grande desfecho de (5) e (8), substituindo x por πx em (5) e igualando as duas expressões de πx cotg πx,

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2x^2}{n^2 - x^2} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{2k} B_{2k}}{(2k)!} (\pi x)^{2k}, \tag{9}$$

onde usamos k como índice de somatório à direita por motivos que surgirão num momento. Cada termo da série da esquerda é fácil de se expandir em série geométrica,

$$\frac{-2x^2}{n^2 - x^2} = -2 \frac{x^2/n^2}{1 - x^2/n^2} = -2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{x^2}{n^2}\right)^k = -2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{n^{2k}},$$

logo (9) pode ser escrita como

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{n^{2k}}\right) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{2k} B_{2k}}{(2k)!} \pi^{2k} x^{2k}.$$

Trocamos agora a ordem do somatório à esquerda e obtemos

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(-2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}\right) x^{2k} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{2k} B_{2k}}{(2k)!} \pi^{2k} x^{2k};$$

igualando os coeficientes de x^{2k}, temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = (-1)^{k-1} \frac{2^{2k} B_{2k}}{2(2k)!} \pi^{2k}$$

para todo k inteiro positivo. Em particular, para $k = 1, 2, 3$, temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}.$$

É notável que por quase 150 anos não tenha havido progresso nenhum na determinação da soma exata de qualquer das séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^7}, \quad \ldots .$$

Talvez seja necessário um segundo Euler para promover essa ruptura, mas não há nenhum à vista.

A.13 EVOLUTAS E INVOLUTAS

Nosso principal objetivo neste apêndice é estabelecer a propriedade das ciclóides, enunciadas na Seção 17.2. Alcançaremos este objetivo descrevendo tão sucintamente quanto possível o contexto natural em que essa propriedade aparece como um exemplo rotineiro.

Seja P um ponto móvel sobre uma curva dada C e suponhamos que a curvatura k jamais seja nula na parte de C que consideramos, ou seja, o raio de curvatura $r = 1/|k|$ existe em todos os pontos. Desenhemos a normal a C em P em direção ao lado côncavo da curva e seja Q o ponto sobre essa normal cuja distância a P é r (Fig. A.10).

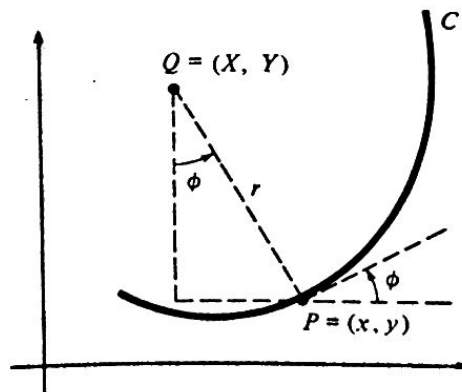



Figura A.10 O centro de curvatura.

O ponto Q chama-se *centro de curvatura* de C correspondente ao ponto P. Quando P move-se ao longo de C, o correspondente centro de curvatura Q gera um lugar geométrico chamado *evoluta* de C. A evoluta de uma circunferência é um único ponto, o seu centro. Em geral, no entanto, a evoluta de uma curva é uma outra curva.

Determinamos o centro de curvatura Q da seguinta maneira: suponhamos que C seja o gráfico de uma função $y=f(x)$; assim

$$k=\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} \qquad \text{e} \qquad r=\frac{1}{|k|}=\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|}.$$

Denotemos o ponto P por suas coordenadas (x, y); seja o ponto correspondente Q denotado por (X, Y). É claro, a partir da Fig. A.10, que

$$x-X=\pm r\operatorname{sen}\phi, \qquad Y-y=\pm r\cos\phi, \tag{1}$$

onde utilizamos os sinais mais ou menos conforme a curva seja côncava para cima ou para baixo. Lembrando o significado do sinal da curvatura, vemos que (1) pode ser escrita como

$$x-X=\frac{1}{k}\operatorname{sen}\phi, \qquad Y-y=\frac{1}{k}\cos\phi. \tag{2}$$

Como

$$\operatorname{sen}\phi=\frac{dy}{ds}=\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} \qquad \text{e} \qquad \cos\phi=\frac{dx}{ds}=\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}},$$

as equações (2) tornam-se

$$X=x-\frac{y'(1+y'^2)}{y''}, \qquad Y=y+\frac{1+y'^2}{y''}. \tag{3}$$

Essas equações dão as coordenadas de Q e, portanto, as equações paramétricas da evoluta, sendo a variável x usada como parâmetro. Se a curva dada C for definida por equações paramétricas $x=x(t)$ e $y=y(t)$, então teremos

$$k=\frac{x'y''-y'x''}{(x'^2+y'^2)^{3/2}}, \qquad \operatorname{sen}\phi=\frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}, \qquad \cos\phi=\frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}},$$

onde agora as "linhas" denotam derivadas em relação a t. Nesse caso, as equações (3) são substituídas por

$$X=x-\frac{y'(x'^2+y'^2)}{x'y''-y'x''}, \qquad Y=y+\frac{x'(x'^2+y'^2)}{x'y''-y'x''}, \tag{4}$$

que são equações paramétricas da evoluta tendo t como parâmetro,

Exemplo 1 Determine a evoluta da parábola $y = x^2$.

Solução Como $y' = 2x$ e $y'' = 2$, as equações (3) levam a

$$X = -4x^3, \qquad Y = \frac{6x^2 + 1}{2}$$

após simplificação. É fácil eliminar o parâmetro x e pôr a equação da evoluta na forma

$$27X^2 = 16(Y - \tfrac{1}{2})^3.$$

A aparência dessa curva em relação à parábola dada é mostrada na Fig. A.11.

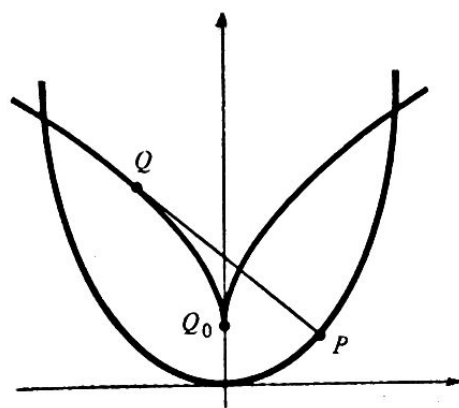



Figura A.11 A evoluta de uma parábola.

Há dois fatos importantes sobre a relação entre uma curva e sua evoluta que são fáceis de visualizar examinando a Fig. A.11. Primeiro: a reta PQ é tangente à evoluta em Q. Segundo: fazendo x crescer, acarretando que P suba o ramo direito da parábola, o comprimento de arco Q_0Q ao longo da evoluta cresce exatamente à mesma taxa de crescimento do comprimento da tangente PQ.

Essas propriedades podem ser verificadas bem facilmente para a parábola e sua evoluta usando as fórmulas dadas no Exemplo 1. Entretanto, em vez de parar para tratar desse caso particular, provaremos as afirmações tomando uma curva genérica.

Convém simplificar os cálculos supondo que $k > 0$ em cada ponto da curva dada C; o caso $k < 0$ pode ser tratado de modo análogo. Essa hipótese permite-nos escrever as equações (2) como

$$X = x - r \operatorname{sen} \phi, \qquad Y = y + r \cos \phi. \tag{5}$$

Como $k = d\phi/ds$ e $r = 1/k = ds/d\phi$, temos

$$r\,\text{sen}\,\phi = \frac{ds}{d\phi}\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{d\phi}, \qquad r\cos\phi = \frac{ds}{d\phi}\frac{dx}{ds} = \frac{dx}{d\phi}. \tag{6}$$

Derivando agora as equações (5) com relação a ϕ e usando (6), obtemos

$$\frac{dX}{d\phi} = \frac{dx}{d\phi} - r\cos\phi - \frac{dr}{d\phi}\,\text{sen}\,\phi = -\frac{dr}{d\phi}\,\text{sen}\,\phi$$

e (7)

$$\frac{dY}{d\phi} = \frac{dy}{d\phi} - r\,\text{sen}\,\phi + \frac{dr}{d\phi}\cos\phi = \frac{dr}{d\phi}\cos\phi,$$

logo

$$\frac{dY}{dX} = -\frac{\cos\phi}{\text{sen}\,\phi} = -\frac{1}{\text{tg}\;\phi}. \tag{8}$$

As declividades da curva dada C e sua evoluta (Fig. A.12) são tg ϕ e dY/dX.

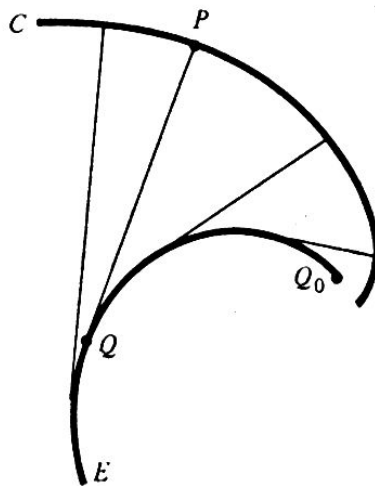



Figura A.12 Uma evoluta genérica.

Podemos concluir, a partir das equações (8), que *a normal PQ à curva em P é tangente à evoluta no centro de curvatura Q.* Ao ir de (7) a (8), é evidentemente necessário supor que $dr/d\phi \neq 0$ sobre C. Que esta não é uma condição supérflua pode ser visto pelo exemplo da circunferência, cuja evoluta é um único ponto.

Para estabelecer a segunda propriedade, seja S o comprimento da evoluta de um ponto fixo Q_0 ao ponto variável Q correspondente a P. Então $dS^2 = dX^2 + dY^2$, e, por (7), temos

$$\left(\frac{dS}{d\phi}\right)^2 = \left(\frac{dX}{d\phi}\right)^2 + \left(\frac{dY}{d\phi}\right)^2 = \left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2. \tag{9}$$

Se a direção dos S crescentes for escolhida de modo que ambos S e r cresçam juntas, então, de (9), temos

$$\frac{dS}{d\phi} = \frac{dr}{d\phi}.$$

Por integração obtemos

$$S = r + \text{constante}. \tag{10}$$

Segue-se de (10) que *o comprimento de um arco da evoluta entre dois pontos quaisquer Q_1 e Q_2 é igual à diferença entre os raios de curvatura nos pontos correspondentes P_1 e P_2.*

Esses resultados sobre a relação geométrica entre uma curva C e sua evoluta E podem ser expressos de uma outra maneira. Consideremos um fio flexível inelástico enrolado em torno da evoluta. Se o fio for mantido tenso sendo desenrolado da evoluta e se, além disso, a extremidade P desse fio começa na curva original C, então, quando desenrolamos o fio, o ponto P traça a curva C. Isto explica o nome evoluta, pois provém do latim *evolvere*, desenrolar. Além disso, a curva original C é dita involuta da evoluta E.

Exemplo 2 Determine a evoluta da ciclóide $x = a(\theta - \operatorname{sen}\theta), y = a(1 - \cos\theta)$.

Solução Calculamos

$$x' = a(1 - \cos\theta), \qquad y' = a\operatorname{sen}\theta,$$
$$x'' = a\operatorname{sen}\theta, \qquad y'' = a\cos\theta,$$

e aplicamos as fórmulas (4). Após simplificação, o resultado é

$$X = a(\theta + \operatorname{sen}\theta),$$
$$Y = -a(1 - \cos\theta).$$

Estas são evidentemente as equações paramétricas de outra ciclóide congruente à original mas deslocada $2a$ unidades para baixo e πa unidades para a direita (Fig. A.13).

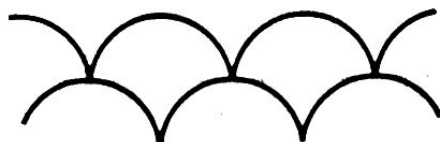



Figura A.13 A evoluta de uma ciclóide.

Como a ciclóide inferior é a evoluta da superior, a superior é uma involuta da inferior no sentido da propriedade acima discutida. Esse fato fornece uma justificativa da construção de Huygens do pêndulo cicloidal, descrito no final da Seção 17.2.

A.14 OBTENÇÃO DA FÓRMULA DE EULER $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ POR INTEGRAÇÃO DUPLA

A série geométrica $1/(1-r) = 1 + r + r^2 + \ldots$ permite-nos escrever

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^1 \frac{dx\,dy}{1-xy} &= \int_0^1 \int_0^1 (1 + xy + x^2y^2 + \cdots)\,dx\,dy \\
&= \int_0^1 \left(x + \frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{3}x^3y^2 + \cdots\right)\Big]_0^1 dy \\
&= \int_0^1 \left(1 + \frac{y}{2} + \frac{y^2}{3} + \cdots\right) dy \\
&= \left(y + \frac{y^2}{2^2} + \frac{y^3}{3^2} + \cdots\right)\Big]_0^1 = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots.
\end{aligned}$$

A soma da série de Euler $\Sigma 1/n^2$ é, portanto, o valor da integral dupla

$$I = \int_0^1 \int_0^1 \frac{dx\,dy}{1-xy}.$$

Calcularemos essa integral – e desse modo determinaremos a soma da série – por meio de uma rotação do sistema de coordenadas de ângulo $\theta = \pi/4$.

Se fizermos a rotação de um ângulo arbitrário θ, levando o sistema xy para o sistema uv (Fig. A. 14).

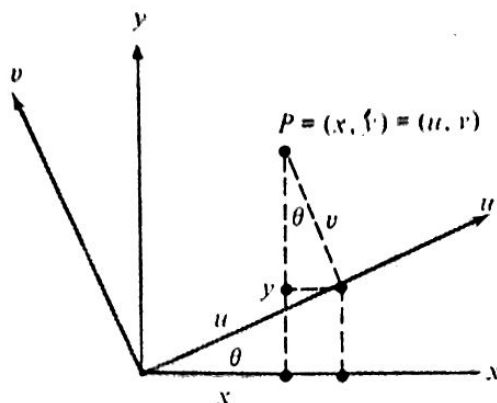



Figura A.14

as equações de transformação serão

$$x = u\cos\theta - v\,\mathrm{sen}\,\theta,$$
$$y = u\,\mathrm{sen}\,\theta + v\cos\theta.$$

Quando $\theta = \pi/4$, essas equações tornam-se

$$x = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}(u - v),$$
$$y = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}(u + v),$$

logo temos

$$xy = \frac{1}{2}(u^2 - v^2) \qquad \text{e} \qquad 1 - xy = \frac{2 - u^2 + v^2}{2}.$$

Por inspeção da Fig. A.15,

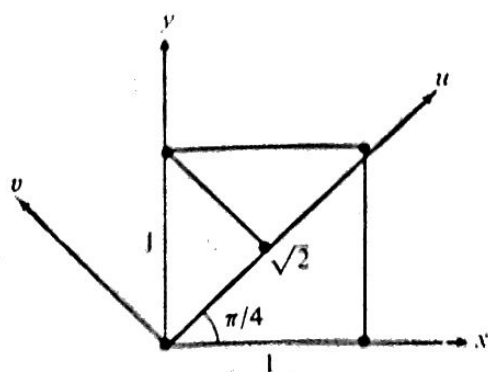



Figura A.15

vemos que a integral I pode ser escrita na forma

$$I = 4\int_0^{\sqrt{2}/2}\int_0^u \frac{dv\,du}{2-u^2+v^2} + 4\int_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{2}-u} \frac{dv\,du}{2-u^2+v^2}.$$

Denotando-se as integrais à direita por I_1 e I_2, teremos

$$\begin{aligned} I_1 &= 4\int_0^{\sqrt{2}/2}\left[\int_0^u \frac{dv}{2-u^2+v^2}\right] du\;. \\ &= 4\int_0^{\sqrt{2}/2}\left[\frac{1}{\sqrt{2-u^2}}\ \text{arc tg}^{-1}\left(\frac{v}{\sqrt{2-u^2}}\right)\right]_0^u du \\ &= 4\int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{1}{\sqrt{2-u^2}}\ \text{arc tg}^{-1}\left(\frac{u}{\sqrt{2-u^2}}\right) du. \end{aligned}$$

Para continuar o cálculo, usamos a substituição

$$u = \sqrt{2}\,\text{sen}\,\theta, \qquad \sqrt{2-u^2} = \sqrt{2}\cos\theta, \qquad du = \sqrt{2}\cos\theta\, d\theta,$$
$$\text{arc tg}^{-1}\left(\frac{u}{\sqrt{2-u^2}}\right) = \text{arc tg}^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}\,\text{sen}\,\theta}{\sqrt{2}\cos\theta}\right) = \theta.$$

Então

$$I_1 = 4\int_0^{\pi/6} \frac{1}{\sqrt{2}\cos\theta}\cdot\theta\cdot\sqrt{2}\cos\theta\, d\theta = 2\theta^2\Big]_0^{\pi/6} = \frac{\pi^2}{18}.$$

Para calcular I_2, escrevemos

$$\begin{aligned} I_2 &= 4\int_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}}\left[\int_0^{\sqrt{2}-u} \frac{dv}{2-u^2+v^2}\right] du \\ &= 4\int_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{\sqrt{2-u^2}}\ \text{arc tg}^{-1}\left(\frac{v}{\sqrt{2-u^2}}\right)\right]_0^{\sqrt{2}-u} du \\ &= 4\int_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2-u^2}}\ \text{arc tg}^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}-u}{\sqrt{2-u^2}}\right) du. \end{aligned}$$

Para continuar o cálculo, usamos a mesma substituição anterior e o fato adicional de que

$$\begin{aligned}\text{arc tg}^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}-u}{\sqrt{2-u^2}}\right) &= \text{arc tg}^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}\,\text{sen}\,\theta}{\sqrt{2}\cos\theta}\right) = \text{arc tg}^{-1}\left(\frac{1-\text{sen}\,\theta}{\cos\theta}\right)\\ &= \text{arc tg}^{-1}\left(\frac{\cos\theta}{1+\text{sen}\,\theta}\right) = \text{arc tg}^{-1}\left(\frac{\text{sen}\,(\pi/2-\theta)}{1+\cos\,(\pi/2-\theta)}\right).\\ &= \text{arc tg}^{-1}\left(\frac{2\,\text{sen}\,\frac{1}{2}(\pi/2-\theta)\cos\frac{1}{2}(\pi/2-\theta)}{2\cos^2\frac{1}{2}(\pi/2-\theta)}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right).\end{aligned}$$

Isto nos possibilita escrever

$$\begin{aligned}I_2 &= 4\int_{\pi/6}^{\pi/2}\frac{1}{\sqrt{2}\cos\theta}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\theta\right)\sqrt{2}\cos\theta\,d\theta = 4\left[\frac{\pi}{4}\theta-\frac{1}{4}\theta^2\right]_{\pi/6}^{\pi/2}\\ &= 4\left[\left(\frac{\pi^2}{8}-\frac{\pi^2}{16}\right)-\left(\frac{\pi^2}{24}-\frac{\pi^2}{144}\right)\right] = \frac{\pi^2}{9}.\end{aligned}$$

Completamos o cálculo somando esses resultados:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = I = I_1 + I_2 = \frac{\pi^2}{18}+\frac{\pi^2}{9} = \frac{\pi^2}{6}.$$

É interessante observar que

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1\frac{dx\,dy\,dz}{1-xyz} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3},$$

de modo que qualquer pessoa que calcule essa integral tripla descobrirá a soma da série à direita: este é um problema aberto desde que Euler levantou a questão em 1736.

A.15 INTEGRAIS DE SUPERFÍCIE E O TEOREMA DA DIVERGÊNCIA

Nesta seção e na próxima estenderemos as idéias do Capítulo 21 a três dimensões e daremos uma breve introdução intuitiva a dois teoremas fundamentais sobre integrais da análise vetorial. Esses teoremas são, grosso modo, semelhantes entre si, pois ambos fazem asserções da seguinte natureza:

A integral de uma certa função sobre a fronteira de uma região é igual à integral de uma função relacionada sobre a própria região.

É possível gastar considerável tempo analisando itens puramente matemáticos como o do significado de região e de sua fronteira, mas nesse pequeno esboço procederemos informalmente e concentraremos nossa atenção no significado físico do que estamos fazendo.

O conceito de *gradiente*, como o apresentamos no Capítulo 19, aplica-se apenas a campos escalares, isto é, a funções cujos valores são números. O gradiente de um campo escalar $f(x, y, z)$ é um campo vetorial que representa a taxa de variação de f, pois em qualquer ponto sua componente numa dada direção é a derivada direcional de f nessa direção. Nosso propósito aqui é considerar o problema mais complexo de descrever a taxa de variação de um campo *vetorial*. Há dois instrumentos fundamentais para medir a taxa de variação de um campo vetorial: a *divergência* e o *rotacional*.

Recordamos que o gradiente de um campo escalar $f(x, y, z)$ é definido por

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k},$$

onde o símbolo ∇ ("del") representa o operador diferencial vetorial

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}.$$

Se $\mathbf{F} = L\mathbf{i} + M\mathbf{j} + N\mathbf{k}$ é um dado campo vetorial, podemos aplicar ∇ a $\mathbf{F}$ de duas maneiras: usando os produtos escalar e vetorial. Interpretamos o produto escalar de ∇ e $\mathbf{F}$ como sendo

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\mathbf{F} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)\cdot(L\mathbf{i} + M\mathbf{j} + N\mathbf{k}) \\ &= \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z}.\end{aligned}$$

Essa quantidade escalar chama-se *divergência* de $\mathbf{F}$ e é, com freqüência, denotada por div $\mathbf{F}$:

$$\text{div}\,\mathbf{F} = \nabla\cdot\mathbf{F} = \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z}. \tag{1}$$

O produto vetorial de ∇ e $\mathbf{F}$ é interpretado como sendo

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ L & M & N \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}\right)\mathbf{k}.$$

Essa quantidade vetorial chama-se ***rotacional*** de $\mathbf{F}$, e é, com freqüência, denotada por rot $\mathbf{F}$ (ou curl $\mathbf{F}$):

$$\text{rot } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F}. \tag{2}$$

Exemplo 1 Calcule a divergência e o rotacional do campo vetorial $\mathbf{F} = 2x^2y\mathbf{i} + 3xz^3\mathbf{j} + xy^2z^2\mathbf{k}$.

Solução Usando as fórmulas (1) e (2), obtemos imediatamente

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} &= \frac{\partial}{\partial x}(2x^2y) + \frac{\partial}{\partial y}(3xz^3) + \frac{\partial}{\partial z}(xy^2z^2) \\ &= 4xy + 2xy^2z \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2x^2y & 3xz^3 & xy^2z^2 \end{vmatrix} \\ &= (2xyz^2 - 9xz^2)\mathbf{i} + (-y^2z^2)\mathbf{j} + (3z^3 - 2x^2)\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Evidentemente não há nenhuma dificuldade em realizar os cálculos acima. As questões reais são: o que significam e qual seu valor? No restante desta seção exploraremos o significado da divergência; para isto precisamos do conceito de fluxo.

O Significado da Divergência

Utilizaremos um exemplo de hidrodinâmica para motivar as idéias. Suponhamos que uma corrente de fluido (gás ou líquido) esteja escoando por uma região do espaço. Num dado ponto (x, y, z), seja sua densidade a função escalar $\delta = \delta(x, y, z)$ e seja sua velocidade a função vetorial $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z)$. Consideremos o campo vetorial $\mathbf{F} = \delta\mathbf{v}$. Consideremos agora um pequeno pedaço plano de superfície dentro do fluido, com área ΔA e vetor unitário normal $\mathbf{n}$ (Fig. A.16). Pensemos nesse pedaço como uma peça de tela ou malha, de modo que o fluido possa atravessá-lo

sem obstrução. Desejamos determinar uma expressão para a quantidade de fluido que atravessa o pedaço por unidade de tempo. É claro, a partir da figura, que o fluido que passa pelo pedaço num intervalo de tempo pequeno Δt forma um pequeno tubo de volume aproximado $(\mathbf{v}\Delta t)\cdot\mathbf{n}\Delta A$ e a massa aproximada do fluido nesse tubo é $\delta(\mathbf{v}\Delta t)\cdot\mathbf{n}\Delta A$*.

A massa aproximada do fluido atravessando a área ΔA por unidade de tempo é, portanto, $\delta\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\Delta A$ ou $\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\Delta A$. Este é chamado *fluxo* do campo vetorial $\mathbf{F}$ através da área ΔA.

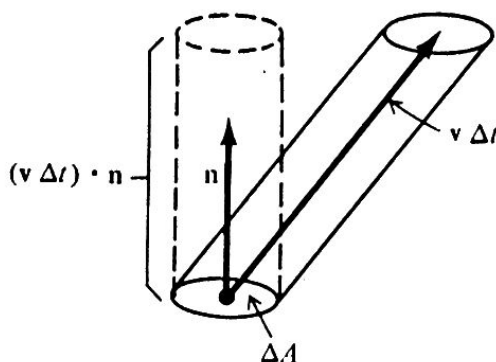



Figura A.16

Apresentaremos agora uma definição alternativa da divergência de $\mathbf{F}$ e depois mostraremos que essa nova definição está de acordo com a dada pela fórmula (1). O propósito dessa manobra é chegar a uma imagem da divergência que leve a uma compreensão intuitiva do que ela significa.

Considere um ponto $P = (x, y, z)$ no centro de uma caixa retangular pequena com arestas $\Delta x, \Delta y$ e Δz (Fig. A. 17).

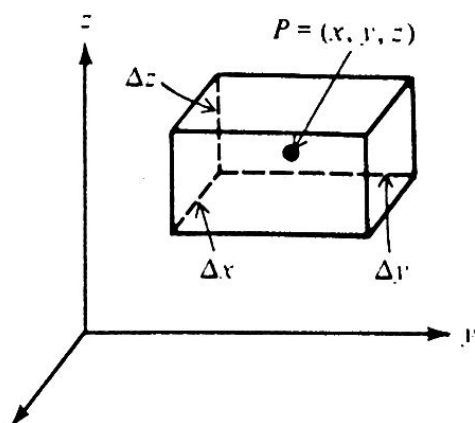



Figura A.17

* Admitimos nessa discussão que todas as funções são contínuas; logo quando ΔA e Δt são quantidades muito pequenas, o vetor ν muda muito pouco de direção ou módulo, de um ponto de ΔA a outro, e a densidade δ muda muito pouco, de um ponto do tubo a outro.

Calculamos o fluxo total do campo vetorial **F** através das seis faces dessa caixa (sobre cada face escolhemos **n** como sendo a normal unitária exterior). Dividimos então esse fluxo total pelo volume $\Delta V = \Delta x \, \Delta y \, \Delta z$ da caixa e tomamos o limite desse fluxo por unidade de volume quando as dimensões da caixa tendem a zero. Esta é a nossa nova definição de divergência de **F** no ponto $P = (x, y, z)$.

$$\text{div } \mathbf{F} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} (\text{fluxo de } \mathbf{F} \text{ através das faces}). \tag{3}$$

Fisicamente, a fórmula representa a massa do fluxo que emerge de um pequeno elemento de volume contendo o ponto P, por unidade de tempo por unidade de volume.

Para mostrar que essa definição está de acordo com a fórmula (1), realizemos um cálculo grosseiro do limite (3), onde $\mathbf{F} = L\mathbf{i} + M\mathbf{j} + N\mathbf{k}$. Sobre a face frontal da caixa da Fig. A.17, vemos que a normal unitária exterior é **i**, logo o fluxo é aproximadamente $L(x + \frac{1}{2} \Delta x, y, z) \, \Delta y \, \Delta z$. Como a normal unitária exterior sobre a face de trás é $-\mathbf{i}$, o fluxo através dessa face é aproximadamente $-L(x - \frac{1}{2} \Delta x, y, z) \, \Delta y \, \Delta z$, e, portanto, o fluxo global através das faces frontal e posterior é aproximadamente

$$[L(x + \tfrac{1}{2}\Delta x, y z) - L(x - \tfrac{1}{2}\Delta x, y, z)] \, \Delta y \, \Delta z.$$

Analogamente, as faces nas direções dos eixos y e z contribuem para o fluxo com quantidades aproximadas

$$[M(x, y + \tfrac{1}{2}\Delta y, z) - M(x, y - \tfrac{1}{2}\Delta y, z)] \, \Delta x \, \Delta z$$

e

$$[N(x, y, z + \tfrac{1}{2}\Delta z) - N(x, y, z - \tfrac{1}{2}\Delta z)] \, \Delta x \, \Delta y.$$

A seguir, dividimos a soma dessas três quantidades — o fluxo total através de todas as faces da caixa — por $\Delta V = \Delta x \, \Delta y \, \Delta z$. Obtemos

$$\frac{L(x + \frac{1}{2}\Delta x, y, z) - L(x - \frac{1}{2}\Delta x, y, z)}{\Delta x} + \frac{M(x, y + \frac{1}{2}\Delta y, z) - M(x, y - \frac{1}{2}\Delta y, z)}{\Delta y}$$
$$+ \frac{N(x, y, z + \frac{1}{2}\Delta z) - N(x, y, z - \frac{1}{2}\Delta z)}{\Delta z}.$$

Finalmente, se tomarmos o limite dessa expressão quando $\Delta x, \Delta y, \Delta z \to 0$, então a fórmula (3) leva à definição anterior (1), como foi enunciado*.

$$\text{div } \mathbf{F} = \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z}.$$

Esse resultado permite-nos considerar (3) como a definição básica da divergência e (1) como meramente uma fórmula para calculá-la em coordenadas cartesianas.

Integrais de Superfície

Seja S uma superfície lisa e $f(x, y, z)$ uma função contínua definida sobre S. A *integral de superfície de* f *sobre* S é denotada por

$$\iint_S f(x, y, z)\, dA, \tag{4}$$

e é definida como um limite de somas da seguinte maneira: subdividimos a superfície em n pequenas parcelas com áreas $\Delta A1, \Delta A_2, \ldots, \Delta A_n$. A seguir, escolhemos um ponto (x_i, y, z_i) na i-ésima parcela, calculamos o valor $f(x_i, y_i, z_i)$ da função nesse ponto, multiplicamos esse valor pela área ΔA_i obtendo o produto $f(x_i, y_i, z_i)\, \Delta A_i$ e formamos a soma desses produtos,

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\, \Delta A_i. \tag{5}$$

Finalmente, fazemos n tender a infinito de tal modo que o diâmetro máximo das parcelas tende a zero, isto é, fazemos uma seqüência de subdivisões da superfície S em parcelas cada vez menores, construindo para cada subdivisão uma soma da forma (5). Se essas somas tenderem a um valor-limite, independente da maneira em que as subdivisões forem formadas e da maneira pela qual os pontos (x_i, y_i, z_i) são escolhidos, esse limite é a definição da integral de superfície (4):

$$\iint_S f(x, y, z)\, dA = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\, \Delta A_i.$$

Pode ser desencorajador para os estudantes saber que só raramente calculamos, de fato, uma integral da superfície. É o *conceito* dessas integrais que é importante, porque elas fornecem uma linguagem adequada para expressar certas idéias básicas da Matemática e da Física.

---

* Aqui usamos um modo um pouco diferente de definir a derivada de uma função. Veja o Problema Suplementar 9 do Capítulo 2 (Volume I)

Para vermos o que uma integral de superfície pode representar, voltemos ao nosso exemplo da hidrodinâmica. Consideremos um fluido escoando através de uma certa região do espaço, e sejam $\delta = \delta(x, y, z)$ e $v = v(x, y, z)$ sua densidade e velocidade, respectivamente. Suponhamos que S seja uma superfície lisa que está na região e imaginemos S como um pedaço curvo de tela ou malha que permite a passagem do fluido através dele sem qualquer resistência (Fig. A. 18).

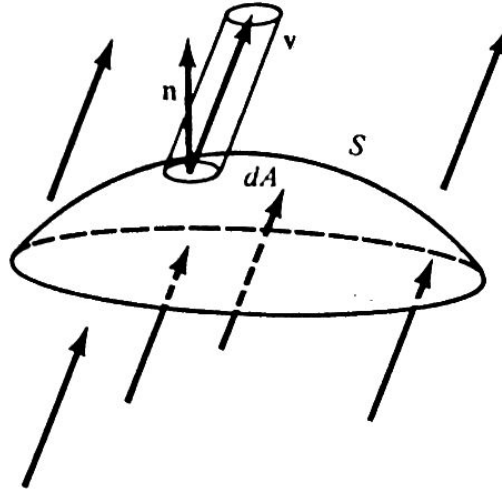



Figura A. 18

Como vimos em nossa discussão anterior, a massa do fluido que atravessa um elemento de área dA e normal unitária $\mathbf{n}$, por unidade de tempo, é $\delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA$ ou $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dA$, onde $\mathbf{F} = \delta \mathbf{v}$. Portanto, a integral de superfície

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dA \tag{6}$$

dá a taxa de fluxo do fluido através de toda a superfície S em termos de massa por unidade de tempo. Este é chamado *fluxo de F através de S.*

Geralmente, se $\mathbf{F}$ é um campo vetorial qualquer, a integral de superfície (6) é ainda chamada *fluxo de* $\mathbf{F}$ através da superfície S. O significado físico dessa integral depende obviamente da natureza da grandeza física representada por $\mathbf{F}$. Uma variedade de interpretações e aplicações aparece fazendo-se $\mathbf{F}$ ser um campo vetorial relacionado ao fluxo de calor ou gravitacional ou elétrico ou magnético. A Hidrodinâmica é apenas uma das várias áreas em que esses conceitos são úteis.

Restringimo-nos a uma superfície lisa na discussão acima, a fim de garantir que o vetor unitário normal $\mathbf{n}$ seja uma função contínua da posição de sua extremidade inicial, e isto, por sua vez, é necessário para garantir que o integrando $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$ em (6) seja uma função escalar contínua. Uma superfície chama-se *lisa por partes* se consistir em um número finito de partes lisas. As superfícies com as quais trabalhamos são *lisas por partes*, e o valor de uma integral da forma (6) sobre uma superfície dessas é definido como sendo a soma de seus valores sobre as partes lisas.

O Teorema da Divergência

Integrais de superfície como (6) adquirem uma importância especial quando são estendidas sobre superfícies fechadas. Uma superfície S se diz *fechada* se ela é a fronteira de uma região limitada do espaço. Como exemplos, mencionamos as superfícies de uma esfera, de um cubo, de um cilindro e de um tetraedro.

O *Teorema da Divergência* (também chamado *Teorema de Gauss*) afirma que

O fluxo de um campo vetorial **F** *através de uma superfície fechada* S *é igual à integral da divergência de* **F** *sobre a região* R *limitada por* S.

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dA = \iiint_R \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV. \tag{7}$$

Esta é uma afirmação bastante crua, sem quaisquer hipóteses ou restrições cuidadosamente formuladas que caracterizam os teoremas matemáticos mais respeitáveis. Forneceremos uma "prova" igualmente crua – que, no entanto, tem o grande mérito de mostrar, de pronto, porque o teorema é verdadeiro.

Primeiro, usamos planos paralelos aos planos coordenados, para subdividir a região R num grande número de caixas retangulares pequenas (Fig. A. 19) (ignoramos as caixas incompletas que não ficam inteiramente dentro de R).

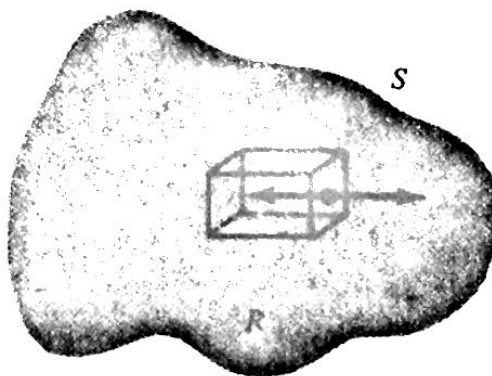



Figura A.19

Para a caixa da figura, com volume ΔV, a definição (3) afirma que o fluxo de **F** sobre as faces é dado pela fórmula aproximada

$$\text{Fluxo de } \mathbf{F} \text{ sobre as faces} \cong (\operatorname{div} \mathbf{F})\, \Delta V. \tag{8}$$

Observamos agora que o fluxo de $\mathbf{F}$ através da superfície S é aproximadamente igual ao fluxo total sobre todas as faces de todas as caixas, pois para duas caixas adjacentes o fluxo de uma através da face comum cancela precisamente o fluxo da outra através da mesma face, restando apenas o fluxo através de todas as faces exteriores. Em vista de (8), teremos

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dA \cong \sum (\text{div } \mathbf{F}) \, \Delta V.$$

Finalmente, utilizando o fato de que a soma à direita é uma soma aproximadora para a integral tripla da divergência de $\mathbf{F}$ sobre R, obtemos (7), tomando subdivisões cada vez menores de R.

Exemplo 2 Faça um cálculo direto de fluxo do campo vetorial $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ através da superfície do cilindro cuja superfície lateral é $x^2 + y^2 = a^2$ e cujas bases são $z = 0$ e $z = b$. Calcule também esse fluxo aplicando o Teorema da Divergência.

Solução Sobre a superfície lateral L, temos $\mathbf{n} = (x\mathbf{i} + y\mathbf{j})/a$ logo o fluxo sobre L é

$$\iint_L \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dA = \iint_L \frac{x^2 + y^2}{a} \, dA = \iint_L a \, dA = a(2\pi ab) = 2\pi a^2 b.$$

Sobre o topo T temos $\mathbf{n} = \mathbf{k}$, logo sobre T, $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = z = b$, e o fluxo é

$$\iint_T \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dA = \iint_T b \, dA = b(\pi a^2) = \pi a^2 b.$$

Na base, temos $\mathbf{n} = -\mathbf{k}$, logo sobre b, $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = -z = 0$, e o fluxo é

$$\iint_B \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dA = \iint_B 0 \, dA = 0.$$

Portanto, o fluxo sobre a superfície total é $2\pi a^2 b + \pi a^2 b + 0 = 3\pi a^2 b$. Para calcular esse fluxo aplicando o Teorema da Divergência, temos apenas de observar que

$$\text{div } \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(z) = 3,$$

e, portanto,

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dA = \iiint_R \text{div } \mathbf{F} \, dV = \iiint_R 3 \, dV = 3(\text{volume}) = 3\pi a^2 b.$$

O Teorema da Divergência é um teorema profundo da análise matemática, com muitas aplicações importantes em várias Ciências Físicas. O esboço superficial dessas idéias que demos aqui — junto com um esboço análogo do Teorema de Stokes na próxima seção — foi talvez tão longe quanto um curso introdutório de Cálculo deve ir. Os estudantes que desejarem aprender mais devem continuar e fazer cursos avançados (Análise Vetorial, Teoria do Potencial, Física Matemática etc.), em que esses temas são completamente desenvolvidos.

Problemas

1. Calcule a divergência do campo vetorial **F** se

(a) $\mathbf{F} = (y - z)\mathbf{i} + (z - x)\mathbf{j} + (x - y)\mathbf{k}$;
(b) $\mathbf{F} = (2z^2 - \operatorname{sen} e^y)\mathbf{i} + xy\mathbf{j} - xz\mathbf{k}$;
(c) $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} + xz^3\mathbf{j} + (2z - yz)\mathbf{k}$;
(d) $\mathbf{F} = e^x \operatorname{sen} y\mathbf{i} + e^x \cos y\mathbf{j} + e^z \operatorname{sen} x\mathbf{k}$;
(e) $\mathbf{F} = \frac{x}{r}\mathbf{i} + \frac{y}{r}\mathbf{j} + \frac{z}{r}\mathbf{k}$, quando $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Nos Problemas 2 a 6, utilize o Teorema da Divergência para determinar o fluxo do campo vetorial dado sobre a superfície S dada.

2. $\mathbf{F} = x\mathbf{i} - y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$; S é a superfície do cilindro do Exemplo 2.

3. $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$; S é a superfície do elipsóide $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$.

4. $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$; S é a superfície do tetraedro formado pelo plano $x/a + y/b + z/c = 1$ $(a, b, c > 0)$ e os planos coordenados.

5. $\mathbf{F} = x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$; S é a superfície da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

6. $\mathbf{F} = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$; S é a superfície do cone $z^2 = m^2(x^2 + y^2)$, $0 \leq z \leq h$.

7. Sendo **R** o vetor posição $x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ e $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ o seu comprimento, calcule a divergência do campo de forças central $\mathbf{F} = f(r)(\mathbf{R}/r)$, onde $f(r)$ é uma função diferenciável arbitrária.

8. Calcule o fluxo do campo vetorial definido no Problema 7 sobre a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ se

(a) $f(r) = r$; (b) $f(r) = \frac{1}{r^2}$.

9. Se n é um número positivo e $f(r)$ (do Problema 7) $= 1/r^n$, mostre que a divergência do campo de forças **F** é nula se $n = 2$ e apenas nesse caso.

10. Verifique o Teorema da Divergência para o campo vetorial $\mathbf{F} = 2z\mathbf{i} + (x - y)\mathbf{j} + (2xy + z)\mathbf{k}$ e a caixa retangular cujas faces são $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 2$, $z = 0$, $z = 3$.

11. Use o Teorema da Divergência para calcular o fluxo de $\mathbf{F}$ sobre a superfície da caixa do Problema 10 se $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 2$, $z = 0$, $z = 3$.

    (a) $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$;
    (b) $\mathbf{F} = xz\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$.

A.16 TEOREMA DE STOKES

O Teorema de Stokes é uma extensão do Teorema de Green para três dimensões, envolvendo superfícies curvas e suas fronteiras no lugar de regiões planas e suas fronteiras. Sir George Stokes (1819-1903) foi um físico-matemático britânico muito eminente. Introduziu o teorema conhecido por seu nome numa questão de exame para estudantes na Universidade de Cambridge, em 1854. Um apanhado bastante completo da personalidade de Stokes e de seu trabalho científico pode ser encontrado em G. E. Hutchinson, *The Enchanted Voyage*, Yale University Press, 1962. Enunciaremos o teorema após alguns preliminares que nos ajudarão a compreender seu significado.

Suponhamos que $\mathbf{F} = L\mathbf{i} + M\mathbf{j} + N\mathbf{k}$ seja um campo vetorial definido numa certa região do espaço. Será conveniente, nessa seção, pensarmos em $\mathbf{F}$ como o campo de velocidades de um fluido que escoa. Suponhamos também que C seja uma curva que está na região e é especificada por certas equações paramétricas. A integral de linha de $\mathbf{F}$ ao longo de C, denotada por

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} \qquad \text{ou} \qquad \int_C L\,dx + M\,dy + N\,dz,$$

é definida e calculada exatamente da mesma maneira que em duas dimensões e não exige outra explicação. Se C é uma curva fechada (Fig. A.26), a integral de linha é usualmente escrita como

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}.$$

Essa integral mede a tendência do fluido circular ou rodar em torno de C e chama-se *circulação* de $\mathbf{F}$ em torno de C.

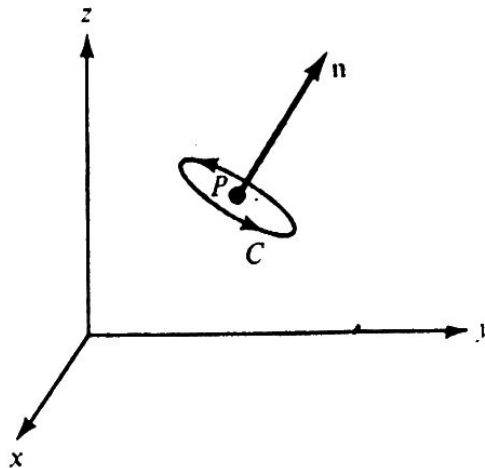



Figura A. 20

Suponhamos agora que C seja uma pequena curva fechada simples que está num plano com vetor unitário normal $\mathbf{n}$, onde o sentido de $\mathbf{n}$ está relacionado com o sentido de C pela regra do polegar direito, e seja P um ponto dentro de C (Fig. A. 20). Se ΔA é a área da região englobada por C, então

$$\frac{1}{\Delta A}\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}$$

pode ser encarada como a circulação de $\mathbf{F}$ por unidade de área em torno de P, e o limite

$$\lim_{\Delta A\to 0}\frac{1}{\Delta A}\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}$$

chama-se *densidade da circulação de* $\mathbf{F}$ *em* P *em torno de* $\mathbf{n}$. A chave dessas observações é que esse conceito está intimamente relacionado com o rotacional do campo vetorial $\mathbf{F}$, que foi definido no Apêndice A.15 por

$$\text{rot } \mathbf{F} = \nabla\times\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ L & M & N \end{vmatrix}. \tag{1}$$

De fato, pode ser mostrado que o rotacional de $\mathbf{F}$ tem a propriedade de que em qualquer ponto a sua componente numa dada direção $\mathbf{n}$ é exatamente a densidade da circulação de $\mathbf{F}$ em torno de $\mathbf{n}$,

$$(\text{rot } \mathbf{F})\cdot\mathbf{n} = \lim_{\Delta A\to 0}\frac{1}{\Delta A}\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}. \tag{2}$$

A prova de (2) é bastante complicada e não será dada aqui; ela pode ser encontrada em qualquer bom livro de análise vetorial.

Podemos visualizar o significado de (2) de um modo concreto se imaginarmos uma pequena roda de pás colocada num ponto P no fluido que escoa. O eixo da roda está apontado na direção de **n** (Fig. A. 21).

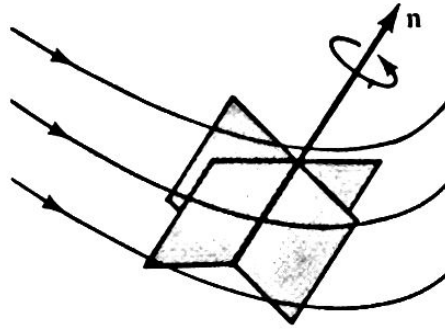



Figura A.21

A circulação do fluido em torno de **n** levará a roda de pás a girar, e a velocidade com que ela girará será proporcional à densidade da circulação. A roda de pás irá girar mais rápido quando **n** apontar na direção em que a densidade de circulação é máxima e (2) afirma que isto acontece quando **n** aponta na mesma direção que o rot **F**. Concluímos que em cada ponto do espaço o vetor rot **F** tem a direção em que a densidade de circulação é máxima e módulo igual a essa densidade de circulação máxima. A roda de pás que descrevemos aqui pode, portanto, ser encarada como um instrumento imaginário para se descobrir a direção e o módulo do rotacional. Estamos agora prontos para o principal teorema desta seção. O *Teorema de Stokes* assevera o seguinte (Fig. A. 22):

Se S *é uma superfície com curva de fronteira* C*, então a circulação do campo vetorial* **F** *em torno de* C *é igual à integral sobre* S *da componente normal do rotacional de* **F**,

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R} = \iint_S (\text{rot } \mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\, dA. \qquad (3)$$

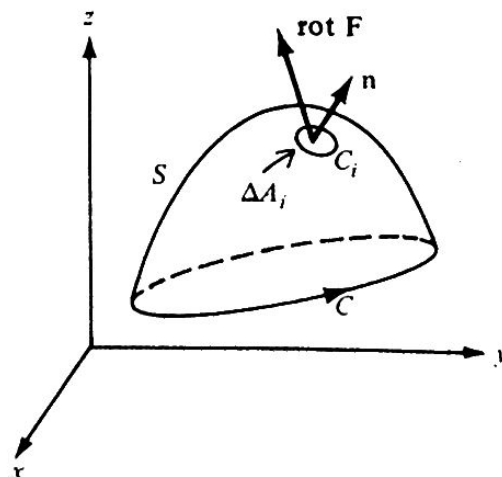



Figura A. 22

Exatamente como no caso do Teorema da Divergência do Apêndice A.15, optamos por manter essa proposição tão simples quanto possível, não a complicando com as hipóteses e restrições que seriam necessárias para convertê-la num genuíno teorema matemático. Por exemplo, é necessário admitir que S seja uma superfície bilateral (orientável) com a direção do vetor unitário normal $\mathbf{n}$ relacionada à direção de C pela regra do polegar direito, como está mostrado na figura. Além disso, $\mathbf{n}$ deve ser contínua, $\mathbf{F}$ deve ser contínua, L, M e N devem ter derivadas parciais contínuas e assim por diante.

Essa versão grosseira e intuitiva do Teorema de Stokes tem uma "prova" grosseira e intuitiva baseada na equação (2). Primeiro subdividimos a superfície num grande número de pequenas parcelas com áreas ΔA_i e curvas de fronteira C_i. Aplicando (2) à i-ésima parcela, obtemos a equação aproximada

$$\oint_{C_i} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R} \cong (\text{rot } \mathbf{F})\cdot \mathbf{n}\, \Delta A_i.$$

Somando-se os primeiros membros dessas equações para todas as curvas C_i, as integrais de linha sobre todas as fronteiras interiores comuns se cancelam, pois são calculadas uma vez em cada sentido, deixando apenas a integral de linha sobre a fronteira exterior C (Fig. A. 23).

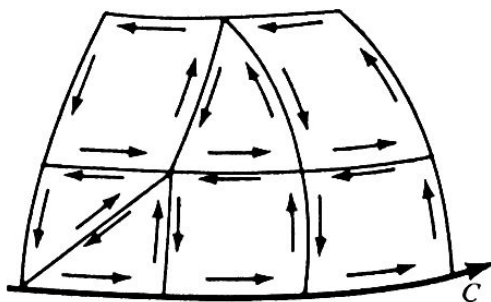



Figura A. 23

Assim, obtemos

$$\oint_{C} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R} \cong \sum (\text{rot } \mathbf{F})\cdot \mathbf{n}\, \Delta A_i, \tag{4}$$

Tomando subdivisões cada vez menores, obtemos (3), pois as somas do segundo membro de (4) são somas aproximadoras da integral de superfície do segundo membro de (3).

Exemplo 1 Se a superfície R for uma região R que está no plano xy, então $n = k$, e, por (1), vemos que

$$(\text{rot } \mathbf{F})\cdot \mathbf{n} = \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y},$$

logo (3) reduz-se a

$$\oint_C L\,dx + M\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}\right) dA.$$

Este é o Teorema de Green (Seção 21.3), que é um caso particular do Teorema de Stokes.

Exemplo 2 Calcule a integral de linha

$$I = \oint_C y^3z^2\,dx + 3xy^2z^2\,dy + 2xy^3z\,dz$$

sobre a curva fechada C cuja equação vetorial é $\mathbf{R} = a \text{ sen } t\mathbf{i} + b \cos t\mathbf{j} + c \cos t\mathbf{k}$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, onde $abc \neq 0$.

Solução Essa integral é a circulação em torno de C do campo vetorial $\mathbf{F} = y^3z^2\mathbf{i} + 3xy^2z^2\mathbf{j} + 2xy^3z\mathbf{k}$. Um cálculo simples mostra que rot $\mathbf{F} = \nabla + \mathbf{F} = 0$. Se S for qualquer superfície cuja fronteira é C, então o segundo membro de (3) tem o valor 0 nesse caso e, portanto, pelo Teorema de Stokes, afirmamos que $I = 0$.

Além disso, para esses $\mathbf{F}$ e C, particulares, não é muito difícil verificar o Teorema de Stokes calculando I diretamente. Temos

$$I = \int_0^{2\pi} [(b^3 \cos^3 t)(c^2 \cos^2 t)(a \cos t) + 3(a \text{ sen } t)(b^2 \cos^2 t)(c^2 \cos^2 t)(-b \text{ sen } t)$$
$$+ 2(a \text{ sen } t)(b^3 \cos^3 t)(c \cos t)(-c \text{ sen } t)]\,dt$$
$$= ab^3c^2 \int_0^{2\pi} [\cos^6 t - 5 \cos^4 t \text{ sen}^2 t]\,dt = ab^3c^2 \text{ sen } t \cos^5 t \Big]_0^{2\pi} = 0.$$

Na Seção 21.2 provamos que três propriedades dos campos vetoriais no plano são equivalentes entre si. O Teorema de Stokes torna possível estender essas idéias de um modo natural ao espaço tridimensional. Especificamente, se **F** for um campo vetorial definido numa região simplesmente conexa do espaço, então qualquer uma das quatro seguintes propriedades implica as três restantes*.

(a) $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} = 0$ para toda curva fechada simples C.
(b) $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$ é independente do caminho.
(c) **F** é um campo gradiente, isto é, $\mathbf{F} = \nabla f$ para algum campo escalar f.
(d) rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$.

A equivalência de (a), (b) e (c) é estabelecida exatamente da mesma maneira como foi feito no caso de duas dimensões; o fato de que (c) implica (d) é um cálculo direto, e o Teorema de Stokes permite-nos mostrar muito facilmente que (d) implica (a). Um campo vetorial com qualquer uma dessas propriedades diz-se *conservativo* ou *irrotacional* [por causa de (d)].

Vimos que o Teorema da Divergência relaciona uma integral sobre uma superfície fechada com uma correspondente integral de volume sobre a região do espaço englobada pela superfície e que o Teorema de Stokes relaciona uma integral sobre uma curva fechada com uma correspondente integral de superfície sobre qualquer superfície limitada pela curva. Como sugerimos no início do Apêndice A.15, essas afirmações são muito semelhantes e são presumivelmente algo ligadas uma com a outra. Verifica-se que ambos os teoremas são casos particulares de um teorema poderoso da análise moderna chamado *Teorema de Stokes Generalizado*. Os estudantes que desejarem compreender essas relações devem estudar a teoria das formas diferenciais.

Problemas

1. Mostre que a propriedade (c) implica a propriedade (d), isto é, mostre que rot $\nabla f = \mathbf{0}$.

2. Se S for uma superfície fechada imersa em uma região do espaço em que um campo vetorial **F** está definido, mostre que

$$\iint_S (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} \, dA = 0.$$

3. Se um campo vetorial $\mathbf{F} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$ for o campo de velocidades de um fluido que escoa, esboce esse campo no plano xy, isto é, esboce um número suficiente de vetores-velocidade em vários pontos que permite compreender a natureza do movimento. Calcule rot **F**, sendo C a circunferência $\mathbf{R} = r \cos \theta \mathbf{i} + r \text{ sen } \theta \mathbf{j} + 0\mathbf{k}$ $(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$ no plano xy e verifique a fórmula

---

* Uma região do espaço tridimensional diz-se *simplesmente conexa* se toda curva fechada simples da região puder se contraída continuamente a um ponto sem passar por pontos que não estejam na região.

$$(\text{rot } \mathbf{F})\cdot\mathbf{n} = \frac{1}{A}\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}$$

para esta circunferência e o seu interior no plano xy.

4. Repita o Problema 3 para os campos vetoriais

   (a) $\mathbf{F} = ax\mathbf{j}$, onde a é uma constante positiva;
   (b) $\mathbf{F} = f(r)\mathbf{R}$, onde r é o comprimento do vetor-posição $\mathbf{R} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ e $f(r)$ é uma função diferenciável arbitrária.

Nos Problemas 5 a 11, aplique o Teorema de Stokes para determinar $\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}$ para $\mathbf{F}$ e C dados. Em cada caso, suponha C orientada no sentido anti-horário.

5. $\mathbf{F} = y(x - z)\mathbf{i} + (2x^2 + z^2)\mathbf{j} + y^3 \cos xz\mathbf{k}$; C é a fronteira do quadrado $0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2, z = 5$.
6. $\mathbf{F} = (z - y)\mathbf{i} + y\mathbf{j} + x\mathbf{k}$; C é a interseção da metade superior da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ com o cilindro $r = 2\cos\theta$.

7. $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + (x + y + z)\,\mathbf{k} + (x + y)\,\mathbf{j}$; C é a elipse em que o plano $z = x$ intercepta o cilindro $x^2 + y^2 = 1$.
8. $\mathbf{F} = (y - x)\mathbf{i} + (x - z)\mathbf{j} + (x - y)\mathbf{k}$; C é a fronteira da parte triangular do plano $x + y + 2z = 2$, que fica no primeiro octante.

9. $\mathbf{F} = (3y + z)\mathbf{i} + (\text{sen}\, y - 3x)\mathbf{j} + (e^z + x)\mathbf{k}$; C é a circunferência $x^2 + y^2 = 1, z = 5$.

10. $\mathbf{F} = 2z\mathbf{i} + 6x\mathbf{j} - 3y\mathbf{k}$; C é a elipse em que o plano $z = y + 1$ intercepta o cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

11. $\mathbf{F} = e^{x^2}\mathbf{i} + (x + z)\,\text{sen}\, y^3\mathbf{j} + (y^2 - x^2 + 2yz)\mathbf{k}$; C é a fronteira da parte triangular do plano $x + y + z = 2$, que fica no primeiro octante.

Nos Problemas 12 a 15, verifique o Teorema de Stokes para os $\mathbf{F}$, S e C dados

12. $\mathbf{F} = (z - y)\mathbf{i} + (x + z)\mathbf{j} - (x + y)\mathbf{k}$; S é a parte do parabolóide $z = 9 - x^2 - y^2$, que fica acima do plano xy, e C é sua circunferência de fronteira $x^2 + y^2 = 9$ no plano xy, orientada no sentido anti-horário.

13. $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + zx\mathbf{k}$; S é a parte do plano $x + y + z = 1$, que fica no primeiro octante, e C é sua fronteira orientada no sentido anti-horário.

14. $\mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$; S é a metade superior da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, e C é sua circunferência de fronteira $x^2 + y^2 = 4$ no plano xy, orientada no sentido anti-horário.

15. $\mathbf{F} = (x, y)\,\mathbf{i} + (y + z)\mathbf{j} + (z + x)\mathbf{k}$; S é o disco elíptico $x^2/a^2 + y^2/b^2 \leq 1, z = 0$, e C é sua fronteira orientada no sentido anti-horário.

16. Seja S a metade superior do elipsóide $x^2 + y^2 + z^2/9 = 1$, orientado de modo que n seja orientada para cima. Sendo $\mathbf{F} = x^3\mathbf{i} + y^4\mathbf{j} + z^3 \operatorname{sen} xy\mathbf{k}$, calcule

$$\iint_S (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} \, dA$$

substituindo S por uma superfície mais simples, com a mesma fronteira.

17. Repita o Problema 16 sendo $\mathbf{F} = xz^2\mathbf{i} + x^3\mathbf{j} + \cos xz\mathbf{k}$ e S a metade superior do elipsóide $x^2 + y^2 + 4z^2 = 1$, com n orientada para cima.

APÊNDICE B

A TEORIA DO CÁLCULO

B.1 TESTES DA RAZÃO GENERALIZADOS DE RAABE E GAUSS

Os testes de convergência que discutiremos neste apêndice são mais delicados que o teste da razão e permitem-nos chegar à conclusão final sobre a convergência de muitas séries que têm a propriedade de que $a_{n+1}/a_n \to 1$ por valores inferiores. Começamos com o seguinte Teorema Geral de Kummer*.

Teorema 1 *Suponha que* $a_n > 0$, $b_n > 0$ *e que* $\Sigma 1/b_n$ *diverge. Se*

$$\lim \left(b_n - \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot b_{n+1} \right) = L,$$

então Σa_n *converge se* $L > 0$ *e diverge se* $L < 0$.

---

* O matemático alemão Ernst Eduard Kummer (1810-1893) é lembrado principalmente por seu trabalho sobre a aritmética dos campos de números algébricos, por meio da qual ele provou o último teorema de Fermat para muitos expoentes primos. Deu contribuições também à Geometria (a entidade conhecida como "superfície de Kummer" foi muito mais tarde encontrada por Eddington relacionada à teoria de Dirac do elétron) e estendeu o trabalho de Gauss sobre séries hipergeométricas. Era um homem bem-humorado, bastante afável e com grande perspicácia. Ensinou em Breslau até 1855, quando a morte de Gauss alterou o mapa matemático da Europa, Dirichlet sucedeu Gauss em Göttingen e Kummer substituiu Dirichlet em Berlim.

Prova Se $L > 0$, então

$$b_n - \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot b_{n+1} \geq h > 0$$

para todo $n \leqslant n_0$, para algum n_0 e

$$a_n b_n - a_{n+1} b_{n+1} \geq h a_n > 0 \tag{1}$$

para esses n. Isto mostra que $\{a_n b_n\}$ é uma seqüência decrescente de números positivos a partir de $n \geqslant n_0$; logo $K = \lim a_n b_n$ existe. Agora é claro que $\sum_{n=n_0}^{\infty} (a_n b_n - a_{n+1} b_{n+1})$ é uma série telescópica convergente (com soma $a_{n_0} b_{n_0} - K$), logo, por (1) e pelo teste de convergência, concluímos que $\Sigma h a_n$ converge e, portanto, Σa_n também converge.

A seguir, se $L < 0$ temos

$$a_n b_n - a_{n+1} b_{n+1} \leq 0$$

para todo $n \geqslant n_0$, para algum n_0; logo $\{a_n b_n\}$ é uma seqüência crescente de números positivos para esses n. Segue-se que

$$a_n b_n \geq a_{n_0} b_{n_0} \quad \text{ou} \quad a_n \geq (a_{n_0} b_{n_0}) \cdot \frac{1}{b_n}$$

para $n \geqslant n_0$; logo Σa_n diverge, pois $\Sigma 1/b_n$ diverge.

Os estudantes observarão que para $b_n = 1$ no Teorema de Kummer, obteremos o teste da razão. Como outra aplicação deduzimos o *teste de Raabe**.

Teorema 2 *Se $a_n > 0$ e*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{A}{n} + \frac{A_n}{n}, \tag{2}$$

onde $A_n \to 0$, então Σa_n converge se $A > 1$ e diverge se $A < 1$.

---

* Joseph Ludwig Raabe (1801-1859) nasceu numa família pobre em Galícia e estudou em Viena. Quando a cólera varreu aquela cidade em 1831, ele mudou-se para Zurique. Em 1833 a embaixada austríaca de Berna pediu ao Governo de Zurique que mandasse Raabe de volta à Áustria, pois ele havia violado a lei austríaca ao assumir uma posição na Universidade de Zurique. Esse pedido ridículo foi muito sensatamente ignorado e Raabe ficou o resto de sua vida ocupando vários postos da Universidade. Ele era um homem de modéstia pouco comum e considerado um professor muito talentoso. Ele é conhecido nos dias de hoje apenas pelo teste de convergência aqui discutido, mas também trabalhou em soma de séries, sistemas de equações diferenciais lineares e no problema do movimento do centro de gravidade dos planetas.

Prova Façamos $b_n = n$ no Teorema de Kummer. Então

$$\lim\left(b_n - \frac{a_{n+1}}{a_n}\cdot b_{n+1}\right) = \lim\left[n - \left(1 - \frac{A}{n} + \frac{A_n}{n}\right)(n+1)\right]$$
$$= \lim\left[-1 + \frac{A(n+1)}{n} - \frac{A_n(n+1)}{n}\right]$$
$$= A - 1,$$

e pelo Teorema de Kummer segue-se que Σa_n converge se $A > 1$ e diverge se $A < 1$.

Por motivos práticos, vale a pena notar que o teste de Raabe pode ser formulado mais convenientemente da seguinte maneira: se $a_n > 0$ e

$$\lim n\left[1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right] = A, \tag{3}$$

então Σa_n converge se $A > 1$ e diverge se $A < 1$.

Para provar, é suficiente expressar (3) na forma equivalente

$$n\left[1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right] = A - A_n \tag{4}$$

onde $A_n \to 0$, pois (4) é simplesmente uma outra maneira de escrever (2).

Exemplo 1 Se aplicarmos o teste da razão à série

$$\frac{1}{2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6} + \cdots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)} + \cdots, \tag{5}$$

descobriremos que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)(2n+1)}{2\cdot 4\cdots(2n)(2n+2)}\cdot\frac{2\cdot 4\cdots(2n)}{1\cdot 3\cdots(2n-1)} = \frac{2n+1}{2n+2} \to 1 \text{ por valores inferiores;}$$

logo o teste falha. Entretanto,

$$n\left[1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right] = n\left(1 - \frac{2n+1}{2n+2}\right) = \frac{n}{2n+2} \to \frac{1}{2},$$

logo (5) diverge pelo teste de Raabe.

Exemplo 2 Considere agora a série relacionada à anterior em que cada termo é quadrado,

$$\left[\frac{1}{2}\right]^2 + \left[\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right]^2 + \left[\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right]^2 + \cdots + \left[\frac{1\cdot 3\cdot 5 \cdots (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6 \cdots (2n)}\right]^2 + \cdots . \tag{6}$$

Aqui vemos que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+1)^2}{(2n+2)^2} \to 1 \text{ por valores inferiores;}$$

logo o teste da razão falha novamente. Além disso, temos também

$$n\left[1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right] = n\left[1 - \frac{4n^2+4n+1}{4n^2+8n+4}\right] = \frac{4n^2+3n}{4n^2+8n+4} \to 1,$$

logo o teste de Raabe também falha nesse caso.

Quando, no teste de Raabe, $A = 1$, voltamos ao *teste de Gauss.*

Teorema 3 *Se* $a_n > 0$ *e*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{A}{n} + \frac{A_n}{n^{1+c}}$$

onde $c > 0$ *e* A_n *é limitada quando* $n \to \infty$, *então* Σa_n *converge se* $A > 1$ *e diverge se* $A \leqslant 1$.

Prova Se $A \neq 1$, a afirmação segue do teste de Raabe, pois $A_n/n^c \to 0$. Restringimos portanto nossa atenção ao caso $A = 1$. Façamos $b_n = n \ln n$ no Teorema de Kummer. Então

$$\begin{aligned}
\lim\left[b_n - \frac{a_{n+1}}{a_n}\cdot b_{n+1}\right] &= \lim\left[n \ln n - \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{A_n}{n^{1+c}}\right)(n+1)\ln(n+1)\right] \\
&= \lim\left[n \ln n - \frac{(n^2-1)}{n}\ln(n+1) - \frac{(n+1)}{n}\cdot\frac{A_n \ln(n+1)}{n^c}\right] \\
&= \lim\left[n \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) + \frac{\ln(n+1)}{n} - \frac{(n+1)}{n}\cdot\frac{A_n \ln(n+1)}{n^c}\right] \\
&= -1 + 0 - 0 = -1,
\end{aligned}$$

e a divergência da série, nesse caso, é uma conseqüência do Teorema de Kummer.

Gauss realmente expressou seu teste de forma especializada adaptada à série em que a_{n+1}/a_n é um quociente de dois polinômios tendo iguais os termos de maior grau. Essa versão é conhecida também como *teste de Gauss.*

Teorema 4 *Se* $a_n > 0$ *e*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^k + \alpha n^{k-1} + \cdots}{n^k + \beta n^{k-1} + \cdots}, \tag{7}$$

então Σa_n *converge se* $\beta - \alpha > 1$ *e diverge se* $\beta - \alpha \leq 1$.

Prova Se o quociente do segundo membro de (7) for desenvolvido obteremos

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{\beta - \alpha}{n} + \frac{A_n}{n^2},$$

onde A_n é um quociente da forma

$$\frac{\gamma n^{k-2} + \cdots}{n^{k-2} + \cdots}$$

e é, portanto, evidentemente limitado quando $n \to \infty$. A afirmação segue agora do Teorema 3, com $c = 1$.

Exemplo 3 Temos uma aplicação simples ao considerarmos a série (6) para a qual o teste de Raabe falhou. Assim,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{4n^2 + 4n + 1}{4n^2 + 8n + 4} = \frac{n^2 + n + \frac{1}{4}}{n^2 + 2n + 1},$$

logo $\beta - \alpha = 2 - 1 = 1$, e a série diverge pelo teste de Gauss.

Exemplo 4 O objetivo original de Gauss ao estabelecer seu teste era estudar a importante *série hipergeométrica*

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)b(b+1)\cdots(b+n-1)}{n!c(c+1)\cdots(c+n-1)} x^n \tag{8}$$

quando $x = 1$:

$$1 + \frac{a \cdot b}{1 \cdot c} + \frac{a(a+1)b(b+1)}{1 \cdot 2c(c+1)} + \cdots + \frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)b(b+1)\cdots(b+n-1)}{n!c(c+1)\cdots(c+n-1)} + \cdots. \tag{9}$$

Aqui nós supomos que nenhuma das constantes a, b, c é zero ou inteiro negativo. Essa condição para a e b impede que a série se interrompa; essa condição relativa a c evita a divisão por zero. A razão

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(a+n)(b+n)}{(n+1)(c+n)} = \frac{n^2+(a+b)n+ab}{n^2+(c+1)n+c}$$

é positiva para n suficientemente grande, logo os últimos termos de (9) têm o mesmo sinal. Toda série como essa pode ser tratada pelo teste de Gauss (ou pelo teste da razão ou pelo teste de Raabe); e como nesse caso $\beta - \alpha = (c+1) - (a+b)$, vemos que (9) converge se $c > a+b$ e diverge se $c \leqslant a+b$.

A série hipergeométrica (8) é extremamente interessante e versátil e é capaz de representar virtualmente toda função que surge em análise elementar*. Aqui nos restringimos a observar que, quando $a = 1$ e $b = c$, ela se reduz à série geométrica ordinária – daí seu nome.

Problemas

1. Mostre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1\cdot 3\cdot 5 \cdots (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6 \cdots (2n)}\right]^3$$

converge. De forma mais geral, seja k um inteiro positivo arbitrário; mostre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1\cdot 3\cdot 5 \cdots (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6 \cdots (2n)}\right]^k$$

converge se $k > 2$ e diverge se $k \leqslant 2$.

---

* Veja o Problema 1 na p. 178 do livro do autor, *Differential Equations*, McGraw-Hill, 1972.

2. Determine o comportamento de convergência das seguintes séries:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5 \cdots (2n-1)}{4\cdot 6\cdot 8 \cdots (2n+2)}$;

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cdot 7\cdot 12 \cdots (5n-3)}{6\cdot 11\cdot 16 \cdots (5n+1)}$;

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cdot 4\cdot 6 \cdots (2n)}{3\cdot 5\cdot 7 \cdots (2n+1)}$;

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cdot 4\cdot 6 \cdots (2n)}{5\cdot 7\cdot 9 \cdots (2n+3)}$;

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5 \cdots (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6 \cdots (2n)} \cdot \frac{1}{n}$.

3. Determine os inteiros positivos k para os quais as seguintes séries convergem:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2\cdot 4\cdot 6 \cdots (2n)}{3\cdot 5\cdot 7 \cdots (2n+1)}\right]^k$;

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2\cdot 4\cdot 6 \cdots (2n)}{5\cdot 7\cdot 9 \cdots (2n+3)}\right]^k$;

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5 \cdots (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6 \cdots (2n)} \cdot \frac{1}{n^k}$.

4. Determine os valores de a e b (onde nenhum deles é zero ou negativo) para os quais as seguintes séries convergem:

(a) $\frac{a}{b} + \frac{a(a+1)}{b(b+1)} + \cdots + \frac{a(a+1) \cdots (a+n-1)}{b(b+1) \cdots (b+n-1)} + \cdots$;

(b) $\frac{a}{b} + \frac{a(a+2)}{b(b+2)} + \cdots + \frac{a(a+2) \cdots (a+2n-2)}{b(b+2) \cdots (b+2n-2)} + \cdots$.

B.2 CONVERGÊNCIA ABSOLUTA VERSUS CONVERGÊNCIA CONDICIONAL

Começamos com dois exemplos simples:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots \tag{1}$$

e

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots . \tag{2}$$

Como vimos na Seção 14.7 há uma importante distinção entre essas séries. Pelo teste da série alternada, ambas são convergentes. Entretanto, se trocarmos os sinais de todos os termos negativos — isto é, se substituirmos cada termo por seu valor absoluto — então as séries se tornam

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

e

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots ;$$

a primeira dessas séries diverge, enquanto a segunda ainda converge.

Foi esse fenômeno que levou-nos na Seção 14.7 a dar a seguinte definição: uma série Σa_n diz-se *absolutamente convergente* se $\Sigma |a_n|$ converge. Assim, (2) é absolutamente convergente mas (1) não é. O leitor cuidadoso observará que essa definição em si mesmo não diz nada sobre a convergência de Σa_n. Entretanto, provamos na Seção 14.7 que a convergência absoluta implica de fato a convergência ordinária.

A série (1) mostra que o recíproco desse teorema é falso, isto é, a convergência não implica a convergência absoluta. Convergência absoluta é, portanto, uma propriedade mais forte que convergência ordinária, e veremos que séries absolutamente convergentes têm diversas propriedades importantes que não compartilham com séries convergentes em geral. Isto nos leva a uma outra definição que foi dada mas não prosseguida na Seção 14.7: uma série que é convergente mas não absolutamente convergente diz-se *condicionalmente convergente*. Nosso objetivo presente é estabelecer algumas das propriedades gerais das séries absolutamente convergentes e também enfatizar o contraste entre essas séries e aquelas que são apenas condicionalmente convergentes. Por exemplo, veremos que o rearranjo dos termos de uma série absolutamente convergentes não tem efeito sobre seu comportamento ou sobre sua soma, mas que o rearranjo de uma série condicionalmente convergente pode ter um efeito inesperado.

É conveniente iniciar esse programa considerando uma série arbitrária Σa_n e definindo p_n e q_n por

$$p_n = \frac{|a_n| + a_n}{2} \quad \text{e} \quad q_n = \frac{|a_n| - a_n}{2}. \tag{3}$$

É claro que $p_n = a_n$ e $q_n = 0$ se $a_n \geq 0$ e que $p_n = 0$ e $q_n = -an$ se $a_n < 0$. Conseqüentemente, se a série dada é uma mistura de termos positivos e negativos, então podemos pensar em Σp_n como consistindo nos termos positivos de Σa_n e em Σq_n como consistindo nos opostos de seus termos negativos. Isto não é bem correto porque muitos p_n e q_n podem ser nulos mas nos fornece um ponto de vista útil para a compreensão dos teoremas seguintes.

Teorema 1 *Considere uma série Σa_n e defina p_n e q_n por (3). Se Σa_n converge condicionalmente, então ambas as séries Σp_n e Σq_n divergem; e se Σa_n converge absolutamente, então ambas as séries Σp_n e Σq_n convergem, e as somas dessas séries estão relacionadas pela equação $\Sigma a_n = \Sigma p_n - \Sigma q_n$.*

Prova É claro, a partir de (3), que $a_n = p_n - q_n$ e $|a_n| = p_n + q_n$. Nossos instrumentos básicos são essas equações e o fato de que séries convergentes podem ser somadas ou subtraídas termo a termo.

Para provar a primeira afirmação, assumimos que Σa_n converge e $\Sigma |a_n|$ diverge. Se Σq_n converge, então a equação $p_n = a_n + q_n$ mostra que Σp_n também deve convergir. Analogamente, se Σp_n converge, a equação $q_n = p_n - a_n$ mostra que Σq_n também converge. Assim, se uma das duas séries, Σp_n ou Σq_n, converge, então ambas devem convergir; nesse caso a equação $|a_n| = p_n + q_n$ implica que $\Sigma |a_n|$ converge – contrariamente à hipótese. Isto prova que a convergência condicional de Σa_n implica que ambas as séries Σp_n e Σq_n divergem. Para estabelecer a segunda afirmação, assumimos que $\Sigma |a_n|$ converge. Sabemos que Σa_n também converge, logo as equações (3) implicam que ambas as séries Σp_n e Σq_n convergem. Segue-se daí que

$$\sum p_n - \sum q_n = \sum (p_n - q_n) = \sum a_n,$$

e a prova está terminada.

A primeira parte desse teorema é ilustrada pela série condicionalmente convergente (1) em que Σp_n e Σq_n são as séries divergentes

$$1 + 0 + \frac{1}{3} + 0 + \frac{1}{5} + \cdots \qquad \text{e} \qquad 0 + \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{4} + \cdots .$$

No caso da série absolutamente convergente (2), Σp_n e Σq_n são

$$1 + 0 + \frac{1}{3^2} + 0 + \frac{1}{5^2} + \cdots \qquad \text{e} \qquad 0 + \frac{1}{2^2} + 0 + \frac{1}{4^2} + \cdots ,$$

ambas convergentes. Resumindo, o Teorema 1 mostra que a convergência de uma série absolutamente convergente deve-se à pequenez de seus termos, enquanto a de uma série condicionalmente convergente deve-se não só à pequenez de seus termos mas também aos cancelamentos entre seus termos positivos e negativos.

No final da Seção 14.4 provamos um teorema sobre rearranjo de uma série convergente de termos não-negativos. Estenderemos agora esse teorema ao caso de séries absolutamente convergentes.

Teorema 2 *Se Σa_n é uma série absolutamente convergente com soma s, e se os a_n são rearranjados de um modo qualquer para formar uma nova série Σb_n, então essa nova série é também absolutamente convergente com soma s.*

Prova A série $\Sigma|a_n|$ é convergente e consiste em termos não-negativos. Como os b_n são exatamente os a_n numa ordem diferente, segue-se, do teorema acima mencionado, que $\Sigma|b_n|$ também converge e, portanto, Σb_n é absolutamente convergente. Se $\Sigma b_n = t$, então o Teorema 1 permite-nos escrever

$$s = \sum a_n = \sum p_n - \sum q_n \tag{4}$$

e

$$t = \sum b_n = \sum P_n - \sum Q_n, \tag{5}$$

onde cada uma das séries constituintes da direita é convergente e consiste em termos não-negativos. Mas os P_n e Q_n são simplesmente os p_n e q_n numa ordem diferente, logo, por uma outra aplicação do teorema da Seção 14.4, temos $\Sigma P_n = \Sigma p_n$ e $\Sigma Q_n = \Sigma q_n$. O fato de que $t = s$ segue-se agora imediatamente de (4) e (5).

Esse teorema foi provado em 1837 por Dirichlet, que descobriu o fenômeno descrito no Problema 10 da Seção 14.3 e foi o primeiro a compreender o significado de séries absolutamente convergentes.

Em grande contraste com o comportamento de séries absolutamente convergentes enunciado no Teorema 2, veremos que a soma de uma série condicionalmente convergente depende de modo essencial da ordem de seus termos e que o valor dessa soma pode ser mudado, se desejarmos, por um conveniente rearranjo desses termos. Esse fato foi descoberto e provado em 1854 pelo grande matemático alemão Riemann e é conhecido como *Teorema do Rearranjo de Riemann*. Pode ser formulado como se segue.

Teorema 3 *Seja Σa_n uma série condicionalmente convergente. Então seus termos podem ser rearranjados de modo a produzir uma série convergente cuja soma é um número arbitrário previamente dado ou uma série que diverge a ∞ ou uma série que diverge a $-\infty$.*

Prova A idéia da prova é surpreendentemente simples. Começamos usando o Teorema 1 para formar as duas séries absolutamente convergentes de termos não-negativos Σp_n e Σq_n.

Para estabelecer a primeira afirmação, seja s um número qualquer e construamos um rearranjo da série dada como se segue. Começamos escrevendo p em ordem até que a soma parcial

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_{n_1},$$

seja a primeira $\geqslant s$; a seguir, continuamos com $-q$, até que a soma parcial total

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_{n_1} - q_1 - q_2 - \cdots - q_{m_1}$$

seja a primeira $\leqslant s$, depois com p, até que a soma parcial total

$$p_1 + \cdots + p_{n_1} - q_1 - \cdots - q_{m_1} + p_{n_1+1} + \cdots + p_{n_2}$$

seja a primeira $\geqslant s$ e assim por diante. A possibilidade de cada uma dessas etapas é garantida pela divergência de Σp_n e Σq_n, e o rearranjo resultante de Σa_n converge a s, pois $p_n \to 0$ e $q_n \to 0$.

A fim de fazer o rearranjo divergir a ∞, basta escrever suficientes p para produzir

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_{n_1} \geq 1,$$

depois inserir $-q_1$, depois continuar com p até

$$p_1 + \cdots + p_{n_1} - q_1 + p_{n_1+1} + \cdots + p_{n_2} \geq 2,$$

depois inserir $-q_2$ e assim por diante. Podemos produzir divergência a $-\infty$ por uma construção análoga.

Uma das principais aplicações do Teorema 2 relaciona-se com a multiplicação de séries. Em relação a isto, é conveniente indexar os termos da série que consideramos por $n = 0, 1, 2, \ldots$ Se multiplicamos duas séries

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_n + \cdots \qquad \text{e} \qquad b_0 + b_1 + \cdots + b_n + \cdots \tag{6}$$

formando todos os possíveis produtos $a_i b_j$ (como no caso de somas finitas), então obtemos a seguinte disposição duplamente infinita:

$$\begin{array}{cccccc} a_0b_0 & a_0b_1 & a_0b_2 & a_0b_3 & \cdots \\ a_1b_0 & a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \cdots \\ a_2b_0 & a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & \cdots \\ a_3b_0 & a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 & \cdots \\ & & \cdots & & \end{array} \tag{7}$$

Há muitas maneiras de arranjar esses produtos numa única série infinita; dessas, duas nos são importantes. A primeira é agrupá-los em diagonal, como está indicado pelas flechas:

$$a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0) + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0) + \cdots . \tag{8}$$

Essa série pode ser definida como $\Sigma_{n=0}^{\infty} c_n$, onde

$$c_n = a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_nb_0.$$

Chama-se *produto* (ou, às vezes, *produto de Cauchy*) das duas séries (6) e é particularmente útil para se trabalhar com séries de potências.

Um segundo método de arranjar (7) numa série é por quadrados, como sugerido pelas linhas quebradas:

$$a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_1 + a_1b_0) + (a_0b_2 + a_1b_2 + a_2b_2 + a_2b_1 + a_2b_0) + \cdots . \tag{9}$$

A vantagem desse arranjo é que a n-ésima soma parcial s_n de (9) é dada por

$$s_n = (a_0 + a_1 + \cdots + a_n)(b_0 + b_1 + \cdots + b_n), \tag{10}$$

e isto é útil para provar um fato preliminar sobre a multiplicação de séries.

Teorema 4 *Se as duas séries (6) têm termos não-negativos e convergem a* s *e* t, *então seu produto (8) converge a* st.

Prova É claro, a partir de (10), que (9) converge a st. Denotemos agora as séries (8) e (9) *sem parênteses* por (8') e (9'). A série (9') de termos não-negativos ainda converge a st, pois se m é um inteiro tal que $n^2 \leqslant m \leqslant (n+1)^2$, então a m-ésima soma parcial de (9') está entre s_{n-1} e s_n, e ambas convergem a st. Pelo Teorema 2, os termos de (9') podem ser rearranjados para produzir (8') sem mudar a soma st; e quando parênteses são convenientemente inseridos, vemos que (8) converge a st.

A força desse resultado pode ser melhor apreciada observando-se que o produto da série convergente

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \cdots \tag{11}$$

por ela mesma não converge de modo nenhum. Pedimos aos estudantes que se convençam disto no Problema 9.

Estenderemos agora o Teorema 4 ao caso de séries absolutamente convergentes.

Teorema 5 *Se as séries Σa_n e Σb_n são absolutamente convergentes, com somas s e t, então seu produto*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) + (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0) + \cdots \tag{12}$$

é também absolutamente convergente, com soma st.

Prova As séries $\Sigma|a_n|$ e $\Sigma|b_n|$ são convergentes e têm termos não-negativos, logo, pela prova do Teorema 4, vemos que a série

$$\begin{aligned} &|a_0||b_0| + |a_0||b_1| + |a_1||b_0| \\ &\quad + |a_0||b_2| + |a_1||b_1| + |a_2||b_0| + \cdots \\ &\quad + |a_0||b_n| + |a_1||b_{n-1}| + \cdots + |a_n||b_0| + \cdots \\ &= |a_0 b_0| + |a_0 b_1| + |a_1 b_0| \\ &\quad + |a_0 b_2| + |a_1 b_1| + |a_2 b_0| + \cdots \\ &\quad + |a_0 b_n| + |a_1 b_{n-1}| + \cdots + |a_n b_0| + \cdots \end{aligned} \tag{13}$$

converge e, portanto,

$$a_0 b_0 + a_0 b_1 + a_1 b_0 + \cdots + a_0 b_n + \cdots + a_n b_0 + \cdots \tag{14}$$

é absolutamente convergente. Segue-se, do Teorema 2, que a soma de (14) não mudará se rearranjarmos seus termos e a escrevermos como

$$\begin{aligned} &a_0 b_0 + a_0 b_1 + a_1 b_1 + a_1 b_0 \\ &\quad + a_0 b_2 + a_1 b_2 + a_2 b_2 + a_2 b_1 + a_2 b_0 + \cdots . \end{aligned} \tag{15}$$

Observamos agora que a soma dos $(n + 1)^2$ primeiros termos de (15) é

$$(a_0 + a_1 + \cdots + a_n)(b_0 + b_1 + \cdots + b_n),$$

logo é claro que (15), e com ela (14) converge a *st*. Como (12) é obtida por inserção conveniente de parênteses em (14), vemos que (12) também converge a *st*. Tudo o que resta é mostrar que (12) converge absolutamente; mas essa afirmação segue-se pelo teste da comparação a partir da desigualdade

$$|a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0| \leq |a_0 b_n| + |a_1 b_{n-1}| + \cdots + |a_n b_0|$$

e pelo fato de que a série

$$|a_0 b_0| + (|a_0 b_1| + |a_1 b_0|) + \cdots$$
$$+ (|a_0 b_n| + |a_1 b_{n-1}| + \cdots + |a_n b_0|) + \cdots,$$

obtida de (15) por inserção de parênteses, é convergente.

Esse teorema mostra que a convergência absoluta de ambas as séries dadas é uma condição suficiente para a convergência de seu produto a *st*. É interessante que essa conclusão também pode ser obtida da hipótese mais fraca de que somente uma das duas séries seja absolutamente convergente (o exemplo seguinte ao Teorema 4 mostra que o produto de duas séries condicionalmente convergentes não precisa nem mesmo convergir!). Uma prova desse resultado é esboçada no Problema 10.

Problemas

1. Use a fórmula $1 + \frac{1}{2} + \cdots + 1/n = \ln n + \gamma + o(1)$ para estabelecer a validade das somas dos seguintes rearranjos da série $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \ln 2$:

   (a) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \cdots = \ln 2$;
   (b) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \cdots = \frac{1}{2} \ln 6$;
   (c) $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots = \frac{1}{2} \ln 2$;
   (d) $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{3} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} - \frac{1}{14} - \frac{1}{16} + \cdots = 0$.

2. Diz-se às vezes que uma série é *incondicionalmente convergente* se converge e se todo seu rearranjo converge à mesma soma. Mostre que Σa_n converge incondicionalmente se e somente se converge absolutamente.

3. Se Σa_n é absolutamente convergente, prove que Σa_n^2 converge.

4. Se $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots$ é absolutamente convergente, prove que $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots = (a_1 + a_3 + \ldots) + (a_2 + a_4 + \ldots)$. Isto é necessariamente verdadeiro para toda série convergente?

5. Seja Σa_n uma série convergente com soma s. Se Σb_n é um rearranjo em que nenhum termo da primeira série é movido mais que n_0 lugares de sua posição inicial, prove que Σb_n ainda converge a s.

6. Qual a soma de

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{6} + \cdots ?$$

7. Prove que a série

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \ln 2$$

converge a $\ln 2\sqrt{p/q}$ se seus termos forem rearranjados escrevendo-se os p primeiros termos positivos, depois os q primeiros termos negativos, depois os p próximos termos positivos, depois os q próximos termos negativos etc.

8. Sabemos que a série harmônica $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$ diverge, mas a série harmônica alternada $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ converge.

   (a) Mostre que $1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + + - \cdots$ diverge.

   (b) Se trocarmos os sinais na série harmônica de tal modo que p sinais positivos sejam seguidos de q sinais negativos, depois p sinais positivos seguidos de q sinais negativos etc., mostre que a série resultante diverge se $p \neq q$ e converge se $p = q$.

9. Mostre que o produto da série (11) por si mesma diverge.

10. Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ convergem a s e t respectivamente e se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge absolutamente, prove que seu produto

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0)$$

converge a st (este resultado é conhecido como *Teorema de Mertens**). Sugestão: faça $s_n = a_0 + \ldots + a_n$, $t_n = bp + \ldots + b_n$ e $\alpha_n = t_n - t$; mostre que a n-ésima soma parcial do produto pode ser escrita como

$$s_n t + a_0\alpha_n + a_1\alpha_{n-1} + \cdots + a_n\alpha_0;$$

e prove que, se β_n for definida por

$$\begin{aligned}\beta_n &= a_0\alpha_n + a_1\alpha_{n-1} + \cdots + a_n\alpha_0 \\ &= \alpha_0 a_n + \alpha_1 a_{n-1} + \cdots + \alpha_n a_0,\end{aligned}$$

então $\beta_n \to 0$.

B.3 TESTE DE DIRICHLET

Com uma exceção, todos os testes de convergência do Capítulo 14 são testes que se aplicam somente a séries de termos positivos (ou não-negativos), isto é, são testes para convergência absoluta. Essa exceção é o teste da série alternada, que diz que a série

$$b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \cdots \tag{1}$$

converge se os b_n formam uma seqüência de números positivos e $b_n \to 0$. Podemos pensar em (1) como gerada pela multiplicação dos termos da série $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ pelos termos da seqüência $b_1, b_2, b_3, b_4, \ldots$ Desse ponto de vista, é natural (e proveitoso) generalizar considerando uma série

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \tag{2}$$

e uma seqüência

$$b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots, \tag{3}$$

* Franz Mertens (1840-1927) nasceu na Polônia, estudou em Berlim sob a orientação de Kummer e Kronecker e lecionou em Cracóvia, Graz e Viena. Conservou extraordinário vigor de espírito e corpo até avançada idade e escreveu o último de seus mais de 100 artigos de pesquisa com a idade de 86 anos. Seu principal interesse foi a Teoria Analítica dos Números, na qual foi mestre no uso de métodos elementares para simplificar provas difíceis. Descobriu o teorema aqui apresentado relacionado ao êxito que obteve (após Euler ter fracassado) em provar a convergência da série $\Sigma(\pm 1/p_n)$ onde os p_n são a sucessão de primos e os sinais são + ou − conforme p_n seja da forma $4n + 1$ ou $4n + 3$.

e o problema de encontrar condições sob as quais

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n + \cdots \tag{4}$$

converge. É óbvio que se (2) for absolutamente convergente e (3) limitada, então (4) também será absolutamente convergente. Nosso objetivo aqui, entretanto, é obter critérios para a convergência de (4) que não sejam meramente testes de convergência absoluta.

Para consegui-lo, precisamos da *fórmula de soma parcial de Abel:* se $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, então

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n = s_1(b_1 - b_2) + s_2(b_2 - b_3) + \cdots + s_{n-1}(b_{n-1} - b_n) + s_nb_n. \tag{5}$$

A prova é simples. Como $a_1 = s_1$ e $a_n = s_n - s_{n-1}$ para $n > 1$, temos

$$\begin{aligned} a_1b_1 &= s_1b_1 \\ a_2b_2 &= s_2b_2 - s_1b_2 \\ a_3b_3 &= s_3b_3 - s_2b_3 \\ &\cdots \\ a_{n-1}b_{n-1} &= s_{n-1}b_{n-1} - s_{n-2}b_{n-1} \\ a_nb_n &= s_nb_n - s_{n-1}b_n. \end{aligned}$$

Somando-se essas equações e agrupando convenientemente os termos da direita, obtemos (5). Esse resultado permite-nos estabelecer o *teste de Dirichlet*.

Teorema 1 *Se a série (2) tem somas parciais limitadas e se (3) é uma seqüência decrescente de números positivos tal que* $b_n \to 0$, *então a série (4) converge.*

Prova Fazendo $S_n = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$, (5) mostra que

$$S_n = T_n + s_nb_n, \tag{6}$$

onde

$$T_n = s_1(b_1 - b_2) + s_2(b_2 - b_3) + \cdots + s_{n-1}(b_{n-1} - b_n).$$

Devemos provar que lim S_n existe, e o fazemos mostrando que lim T_n e lim s_nb_n ambos existem. Nossa primeira hipótese diz que existe uma constante M tal que $|s_n| \leq M$ para todo n, logo $|s_nb_n| \leq Mb_n$; e como $b_n \to 0$, concluímos que $s_nb_n \to 0$. A seguir, sendo T_n a $(n-1)$-ésima soma parcial da série

$$s_1(b_1 - b_2) + s_2(b_2 - b_3) + \cdots, \tag{7}$$

concluímos que lim T_n certamente existirá se (7) convergir. Para estabelecer a convergência dessa série basta mostrar que (7) é absolutamente convergente. Agora usamos a hipótese de que os b_n são positivos e decrescentes, o que acarreta

$$\begin{aligned}|s_1(b_1-b_2)|+|s_2(b_2-b_3)|+\cdots+|s_{n-1}(b_{n-1}-b_n)|\\ \leq M(b_1-b_2)+M(b_2-b_3)+\cdots+M(b_{n-1}-b_n)\\ =M(b_1-b_n)\leq Mb_1.\end{aligned}$$

Isto implica que (7) é absolutamente convergente, e a prova está terminada.

A fim de fazer uso efetivo do teste de Dirichlet, devemos conhecer algumas séries com somas parciais limitadas. Naturalmente todas as séries convergentes têm essa propriedade, mas muitas que são divergentes também a têm. Talvez a mais simples seja $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$; e a partir daí vemos imediatamente que o teste da série alternada é uma conseqüência imediata do Teorema 1.

O teste de Dirichlet é particularmente útil para demonstrar a convergência de certas séries trigonométricas, e aqui encontramos algumas outras séries que não convergem mas, apesar disso, têm somas parciais limitadas.

Como um exemplo, mostramos que se x for um número qualquer $\neq k\pi$, onde $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, então a série

$$\cos x+\frac{\cos 3x}{3}+\frac{\cos 5x}{5}+\cdots+\frac{\cos(2n-1)x}{2n-1}+\cdots \tag{8}$$

converge. Aqui os b_n podem ser tomados como $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \ldots$, logo é suficiente provar que as somas parciais de

$$\cos x+\cos 3x+\cos 5x+\cdots+\cos(2n-1)x+\cdots \tag{9}$$

são limitadas. Para fazer isto, usamos a identidade trigonométrica

$$2\cos a \operatorname{sen} b=\operatorname{sen}(a+b)-\operatorname{sen}(a-b).$$

Pondo $b = x$ e $a = x, 3x, 5x, \ldots, (2n-1)x$, obtemos

$$\begin{aligned}2\cos x \operatorname{sen} x&=\operatorname{sen} 2x-0\\ 2\cos 3x \operatorname{sen} x&=\operatorname{sen} 4x-\operatorname{sen} 2x\\ 2\cos 5x \operatorname{sen} x&=\operatorname{sen} 6x-\operatorname{sen} 4x\\ &\cdots\\ 2\cos(2n-1)x \operatorname{sen} x&=\operatorname{sen} 2nx-\operatorname{sen}(2n-2)x;\end{aligned}$$

e, somando, temos

$$2 \operatorname{sen} x[\cos x + \cos 3x + \cdots + \cos (2n-1)x] = \operatorname{sen} 2nx$$

ou

$$\cos x + \cos 3x + \cdots + \cos (2n-1)x = \frac{\operatorname{sen} 2nx}{2 \operatorname{sen} x}.$$

Mas $|\operatorname{sen} 2nx| \leqslant 1$, logo

$$|\cos x + \cos 3x + \cdots + \cos (2n-1)x| \leq \frac{1}{2|\operatorname{sen} x|}. \tag{10}$$

Isto prova que as somas parciais de (9) são limitadas, logo (8) converge. Agora parece claro por que impusemos $x \neq k\pi$: devemos ter $\operatorname{sen} x \neq 0$ em (10). Realmente, é óbvio que (8) diverge se $x = k\pi$.

Problemas

1. Seja p uma constante positiva. É claro, a partir da discussão no texto, que

$$\cos x + \frac{\cos 3x}{3^p} + \frac{\cos 5x}{5^p} + \cdots$$

converge para todo $x \neq k\pi$, e quando $x = k\pi$, a série converge se $p > 1$ e diverge se $p < 1$. Use a identidade

$$2 \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b = \cos (a-b) - \cos (a+b)$$

para mostrar que

$$\operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3^p} + \frac{\operatorname{sen} 5x}{5^p} + \cdots$$

converge para todo x.

2. Prove as identidades

$$2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} (\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + \cdots + \operatorname{sen} nx) = \cos \frac{x}{2} - \cos \frac{(2n+1)x}{2}$$

e

$$2\,\text{sen}\,\frac{x}{2}\,(\cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx) = \text{sen}\,\frac{(2n+1)x}{2} - \text{sen}\,\frac{x}{2}.$$

Seja $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ uma seqüência decrescente de números positivos tais que $b_n \to 0$. Use essas identidades para mostrar que

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \,\text{sen}\, nx$ converge para todo x;

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos nx$ converge para todo $x \neq 2k\pi$.

3. Investigue o comportamento de convergência de

$$\frac{\cos 3x}{2} + \frac{\cos 6x}{3} + \frac{\cos 9x}{4} + \cdots.$$

4. Mostre que as seguintes séries convergem:

$$1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots,$$

$$\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} - \frac{1}{\ln 4} - \frac{1}{\ln 5} + \frac{1}{\ln 6} + \frac{1}{\ln 7} - \cdots,$$

e

$$\frac{3}{1} - \frac{4}{2} + \frac{3}{3} - \frac{2}{4} + \frac{3}{5} - \frac{4}{6} + \frac{3}{7} - \frac{2}{8} + \cdots.$$

5. Uma série da forma $\sum_{n=1}^{\infty} a_n/n^x$ chama-se *série de Dirichlet.* Se ela converge para $x = x_0$, mostre que converge também para todo $x > x_0$.

6. Prove o *teste de Abel:* se a série (2) converge e (3) é uma seqüência limitada crescente ou decrescente, então a série (4) também converge. (Note a relação dessa afirmação com o teste de Dirichlet – impõe-se mais sobre a série mas menos sobre a seqüência. É quase certo que Abel conhecia o teste de Dirichlet.)

7. Use o teste de Abel para mostrar que as seguintes séries convergem:

(a) $\cos 1 + \frac{1}{3}\cos\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\cos\frac{1}{4} + \frac{1}{7}\cos\frac{1}{5} - \frac{1}{4}\cos\frac{1}{6} + \cdots;$

(b) $2 + \frac{3}{2^2} - \frac{4}{3^2} - \frac{5}{4^2} + \frac{6}{5^2} + \frac{7}{6^2} - \cdots.$

8. Se Σa_n converge, então também convergem $\Sigma a_n/n$, $\Sigma a_n/\ln n$, $\Sigma a_n \cos 1/n$, $\Sigma a_n \operatorname{sen} 1/n$, $\Sigma(1 + 1/n)a_n$, $\Sigma(1 + 1/n)^n a_n$ e $\Sigma \sqrt[n]{n}\, a_n$. Por quê?

B.4 CONVERGÊNCIA UNIFORME DE SÉRIES DE POTÊNCIAS

Consideremos uma série de potências $\Sigma a_n x^n$ com raio de convergência R positivo e seja $f(x)$ sua soma. Nossa intenção aqui é provar que $f(x)$ é contínua e diferenciável sobre $(-R, R)$ e também que sua derivada e integral podem ser legitimamente calculadas por derivação e integração da série termo a termo.

Seja $S_n(x)$ a n-ésima soma parcial da série, de modo que

$$S_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n.$$

Escrevemos

$$f(x) = S_n(x) + R_n(x)$$

e chamamos $R_n(x)$ de *resto*. Evidentemente,

$$R_n(x) = a_{n+1}x^{n+1} + a_{n+2}x^{n+2} + \cdots .$$

Para cada x do intervalo de convergência, sabemos que $R_n(x) \to 0$ quando $n \to \infty$, ou seja, para qualquer $\epsilon > 0$ dado, temos

$$|R_n(x)| < \epsilon \text{ para } n \text{ suficientemente grande, } n \geqslant n_0. \tag{1}$$

Enfatizamos aqui que isto é verdade para cada x individualmente e é meramente um modo equivalente de exprimir o fato de que $\Sigma a_n x^n$ converge a $f(x)$. Entretanto, podemos dizer muito mais: em qualquer intervalo fechado dado contido no intervalo de convergência, digamos $|x| \leqslant |x_1| < R$, (1) é válida para todo x simultaneamente. Como $R_n(x) = f(x) - S_n(x)$, podemos exprimir isto de um outro modo, dizendo que, por todo o intervalo fechado dado, $S_n(x)$ pode aproximar-se tão perto de $f(x)$ quanto se queira, tomando n suficientemente grande.

Para provar essa afirmação, observamos que, para todo x do intervalo fechado dado $|x| \leqslant |x_1| < R$, temos

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &= |a_{n+1}x^{n+1} + a_{n+2}x^{n+2} + \cdots| \\ &\leq |a_{n+1}x^{n+1}| + |a_{n+2}x^{n+2}| + \cdots \\ &\leq |a_{n+1}x_1^{n+1}| + |a_{n+2}x_1^{n+2}| + \cdots . \end{aligned}$$

O argumento é completado usando-se o fato de que a última soma escrita pode ser tornada $< \epsilon$ tomando n suficientemente grande, $n \geqslant n_0$, em virtude da convergência absoluta de $\Sigma a_n x_1^n$. O essencial é que o mesmo n_0 serve para todos os x do intervalo fechado dado. A conclusão provada aqui, de que $R_n(x)$ pode ser tornado pequeno *independentemente de x no intervalo fechado dado*, é expressa dizendo-se que a série é *uniformemente convergente* nesse intervalo.

Continuidade da Soma

Provaremos que $f(x)$ é contínua em cada ponto interior x_0 do intervalo de convergência. Consideremos um subintervalo fechado $|x| \leqslant |x_1| < R$ contendo x_0 em seu interior. Se $\epsilon > 0$ é dado, então, pela convergência uniforme, podemos determinar um n com a propriedade de que $|R_n(x)| < \epsilon$ para todos os x no subintervalo. Com o polinômio $S_n(x)$ é contínuo em x_0, podemos determinar um $\delta > 0$ tão pequeno que $|x - x_0| < \delta$ implica que x está no subintervalo e $|S_n(x) - S_n(x_0)| < \epsilon$. Pondo essas condições juntas obtemos que $|x - x_0| < \delta$ implica

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |[S_n(x) + R_n(x)] - [S_n(x_0) + R_n(x_0)]| \\ &= |[S_n(x) - S_n(x_0)] + R_n(x) - R_n(x_0)| \\ &\leq |S_n(x) - S_n(x_0)| + |R_n(x)| + |R_n(x_0)| \\ &< \epsilon + \epsilon + \epsilon = 3\epsilon. \end{aligned}$$

Como 3ϵ pode ser tomado tão pequeno quanto se queira, isto prova que $f(x)$ é contínua em x_0.

Integração Termo a Termo

Acabamos de provar que

$$f(x) = \sum a_n x^n \tag{2}$$

é contínua sobre $(-R, R)$. Podemos, portanto, integrar essa função entre os limites a e b no interior do intervalo $(-R, R)$,

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b \left(\sum a_n x^n \right) dx. \tag{3}$$

Nosso objetivo aqui é mostrar que o segundo membro dessa equação pode legitimamente ser integrado termo a termo

$$\int_a^b \left(\sum a_n x^n\right) dx = \sum \int_a^b a_n x^n \, dx.$$

Em palavras, a integral da soma é igual à soma das integrais. Uma afirmação equivalente é que (3) pode ser escrita como

$$\int_a^b f(x)\, dx = \sum \int_a^b a_n x^n \, dx. \tag{4}$$

Para provar iniciamos observando que, como $S_n(x)$ é um polinômio e portanto contínuo em toda parte, todas as três funções em

$$f(x) = S_n(x) + R_n(x)$$

são contínuas em $(-R, R)$. Isto permite-nos escrever

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b S_n(x)\, dx + \int_a^b R_n(x)\, dx. \tag{5}$$

Como todo polinômio pode ser integrado termo a termo, a primeira integral à direita de (5) é

$$\begin{aligned}\int_a^b S_n(x)\, dx &= \int_a^b (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n)\, dx \\ &= \int_a^b a_0\, dx + \int_a^b a_1 x\, dx + \int_a^b a_2 x^2\, dx + \cdots + \int_a^b a_n x^n\, dx.\end{aligned}$$

Para provar (4), basta, portanto, mostrar que

$$\int_a^b R_n(x)\, dx \to 0 \qquad \text{quando} \qquad n \to \infty.$$

Para isto usamos convergência uniforme, que nos diz que, para $\epsilon > 0$ dado e sendo $|x| \leq |x_1| < R$ um subintervalo fechado de $(-R, R)$ que contém ambos a e b, $|R_n(x)| < \epsilon$ para todo x do subintervalo para n suficientemente grande. Tudo o que resta é escrever

$$\left|\int_a^b R_n(x)\, dx\right| \leq \int_a^b |R_n(x)|\, dx < \epsilon |b - a|,$$

e observar que $\epsilon/b - a$ pode ser feita tão pequena quanto desejarmos.

Como caso particular de (4), tomamos os limites 0 e x em vez de a e b e obtemos

$$\int_0^x f(t)\,dt = \sum \frac{1}{n+1} a_n x^{n+1}$$

$$= a_0 x + \frac{1}{2} a_1 x^2 + \frac{1}{3} a_2 x^3 + \cdots + \frac{1}{n+1} a_n x^{n+1} + \cdots, \qquad (6)$$

onde a variável t é usada na integral pela razão explicada na Seção 6.7 (volume I).

Derivação Termo a Termo

Provamos agora que a função $f(x)$ em (2) é não apenas contínua mas também diferenciável e que sua derivada pode ser calculada derivando (2) termo a termo,

$$f'(x) = \sum n a_n x^{n-1}. \qquad (7)$$

Para isto, começamos recordando, da Seção 14.7, que a série da direita de (7) converge sobre $(-R, R)$. Se denotamos sua soma por $g(x)$,

$$g(x) = \sum n a_n x^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + n a_n x^{n-1} + \cdots,$$

então, de (6), teremos

$$\int_0^x g(t)\,dt = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

$$= f(x) - a_0.$$

Como o primeiro membro dessa igualdade tem uma derivada, o segundo membro também tem: por derivação obtemos

$$f'(x) = g(x) = \sum n a_n x^{n-1},$$

como queríamos

B.5 DIVISÃO DE SÉRIES DE POTÊNCIAS

A fim de justificar a divisão de séries de potências como foi descrita na Seção 14.11, é suficiente justificar a divisão de 1 por uma série de potências. Para tal, temos apenas de notar que

$$\frac{\Sigma a_n x^n}{\Sigma b_n x^n} = (\Sigma a_n x^n)\cdot\left(\frac{1}{\Sigma b_n x^n}\right);$$

pois daí vemos que se pudermos expandir $1/(\Sigma b_n x^n)$ em série de potências com raio de convergência positivo, então podemos alcançar nosso objetivo, multiplicando essa série por $\Sigma a_n x^n$. É evidentemente necessário impor que $b_0 \neq 0$ (por quê?) Podemos admitir $b_0 = 1$ sem qualquer perda de generalidade, pois, se b_0 for qualquer outro valor não-nulo, simplesmente fatoramos, deixando o coeficiente dominante igual a 1:

$$\frac{1}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots} = \frac{1}{b_0}\cdot\frac{1}{1 + (b_1/b_0)x + (b_2/b_0)x^2 + \cdots}.$$

Em vista dessas observações, orientamos nossos esforços para provar a seguinte proposição:

Se $\Sigma b_n x^n$ tem $b_0 = 1$ e raio de convergência R positivo, então $1/(\Sigma b_n x^n)$ pode ser expandido numa série de potências $\Sigma c_n x^n$ com raio de convergência positivo.

Começamos determinando os c_n. A condição $1/(\Sigma b_n x^n) = \Sigma c_n x^n$ significa que $(\Sigma b_n x^n)$ $(\Sigma c_n x^n) = 1$, logo

$$b_0 c_0 + (b_0 c_1 + b_1 c_0)x + (b_0 c_2 + b_1 c_1 + b_2 c_0)x^2 + \cdots + (b_0 c_n + b_1 c_{n-1} + \cdots + b_n c_0)x^n + \cdots = 1,$$

e, portanto,

$$b_0 c_0 = 1, \qquad b_0 c_1 + b_1 c_0 = 0, \qquad b_0 c_2 + b_1 c_1 + b_2 c_0 = 0, \qquad \ldots, \qquad b_0 c_n + b_1 c_{n-1} + \cdots + b_n c_0 = 0, \ \ldots .$$

Como $b_0 = 1$, essas equações determinam os cn recursivamente:

$$c_0 = 1, \qquad c_1 = -b_1 c_0, \qquad c_2 = -b_1 c_1 - b_2 c_0, \ \ldots, \qquad c_n = -b_1 c_{n-1} - b_2 c_{n-2} - \cdots - b_n c_0, \ \ldots .$$

Tudo o que resta provar é que a série de potências $\Sigma c_n x^n$ com esses coeficientes tem raio de convergência positivo, e para isto é suficiente mostrar que a série converge para pelo menos um x não-nulo. Faremos isto a seguir:

Seja r um número qualquer, $0 < r < R$, tal que $\Sigma b_n r^n$ converge. Então existe uma constante $K \geqslant 1$ com a propriedade de que $|b_n r^n| \leqslant K$ ou $|b_n| \leqslant K/r^n$ para todo n. Segue-se agora que

$$|c_0| = 1 \leq K,$$

$$|c_1| = |b_1 c_0| = |b_1| \leq \frac{K}{r},$$

$$|c_2| \leq |b_1 c_1| + |b_2 c_0| \leq \frac{K}{r}\cdot\frac{K}{r} + \frac{K}{r^2}\cdot K = \frac{2K^2}{r^2},$$

$$|c_3| \leq |b_1 c_2| + |b_2 c_1| + |b_3 c_0| \leq \frac{K}{r}\cdot\frac{2K^2}{r^2} + \frac{K}{r^2}\cdot\frac{K}{r} + \frac{K}{r^3}\cdot K$$

$$\leq (2 + 1 + 1)\frac{K^3}{r^3} = \frac{4K^3}{r^3} = \frac{2^2K^3}{r^3},$$

pois $K^2 \leqslant K^3$. Em geral,

$$\begin{aligned}|c_n| &\leq |b_1 c_{n-1}| + |b_2 c_{n-2}| + \cdots + |b_n c_0| \\ &\leq \frac{K}{r}\cdot\frac{2^{n-2}K^{n-1}}{r^{n-1}} + \frac{K}{r^2}\cdot\frac{2^{n-3}K^{n-2}}{r^{n-2}} + \cdots + \frac{K}{r^n}\cdot K \\ &\leq (2^{n-2} + 2^{n-3} + \cdots + 1 + 1)\frac{K^n}{r^n} = \frac{2^{n-1}K^n}{r^n} \leq \frac{2^nK^n}{r^n}.\end{aligned}$$

Temos então $|c_n x^n| \leqslant |(2K/r)x|^n$, logo a série $\Sigma c_n x^n$ é absolutamente convergente — e, portanto, convergente — para todo x que satisfizer a condição $|x| < r/2K$. Assim, $\Sigma c_n x^n$ tem raio de convergência não-nulo e a prova está completa.

B.6 IGUALDADE DAS DERIVADAS PARCIAIS MISTAS

Provaremos que

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0), \tag{1}$$

sob a hipótese de que ambas as derivadas parciais mistas f_{xy} e f_{yx} existem em todos os pontos próximos de (x_0, y_0) e são contínuas em (x_0, y_0).

Sejam Δx e Δy tão pequenos que f_{xy} e f_{yx} existem por todo o retângulo com vértices (x_0, y_0) $(x_0 + \Delta x, y_0)$, $(x_0, y_0 + \Delta y)$, $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ (Fig. B.1).

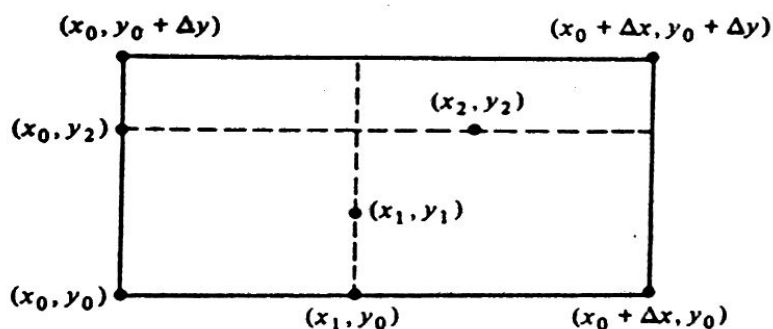



Figura B.1.

Conduzimos a prova aplicando o Teorema do Valor Médio (Apêndice B.4, volume I) de várias maneiras à expressão

$$D = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0 + \Delta y) + f(x_0, y_0). \tag{2}$$

Começamos considerando a função

$$F(x) = f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0),$$

onde Δy é mantido fixo. A expressão (2) pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned} D &= [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0)] - [f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)] \\ &= F(x_0 + \Delta x) - F(x_0). \end{aligned}$$

Logo, aplicando o Teorema do Valor Médio, obtemos

$$\begin{aligned} D &= \Delta x\, F'(x_1) \\ &= \Delta x[f_x(x_1, y_0 + \Delta y) - f_x(x_1, y_0)], \end{aligned}$$

onde x_1 é algum número entre x_0 e $x_0 + \Delta x$. Como $f_x(x_1, y)$ é diferenciável como uma função de y, podemos aplicar o Teorema do Valor Médio novamente para obter

$$D = \Delta x\, \Delta y\, f_{xy}(x_1, y_1), \tag{3}$$

onde y_1 está entre y_0 e $y_0 + \Delta y$.

Iniciamos agora novamente com a função

$$G(y) = f(x_0 + \Delta x, y) - f(x_0, y),$$

onde Δx é mantido fixo. A expressão (2) pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned} D &= [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)] - [f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)] \\ &= G(y_0 + \Delta y) - G(y_0). \end{aligned}$$

Exatamente como antes, por duas aplicações do Teorema do Valor Médio, obtemos

$$\begin{aligned} D = \Delta y\, G'(y_2) &= \Delta y [f_y(x_0 + \Delta x, y_2) - f_y(x_0, y_2)] \\ &= \Delta y\, \Delta x\, f_{yx}(x_2, y_2), \end{aligned} \tag{4}$$

onde y_2 está entre y_0 e $y_0 + \Delta y$ e x_2 está entre x_0 e $x_0 + \Delta x$.

Finalmente, igualando (3) e (4), vemos que

$$f_{xy}(x_1, y_1) = f_{yx}(x_2, y_2). \tag{5}$$

Agora deixamos Δx e Δy tenderem a zero, de modo que o retângulo contraia-se ao ponto (x_0, y_0). Quando isto acontece, é claro que os pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2), que estão dentro do retângulo, tendem a (x_0, y_0) e obtemos nossa conclusão (1) a partir de (5) e da continuidade de f_{xy} e f_{yx} em (x_0, y_0).

B.7 DERIVAÇÃO SOB O SINAL DE INTEGRAL

Nos Problemas 32, da Seção 19.2, e 19, da Seção 19.6, usamos a fórmula

$$\frac{d}{dx}\int_a^b f(x, y)\, dy = \int_a^b f_x(x, y)\, dy. \tag{1}$$

Nosso objetivo aqui é provar a regra sob a hipótese de que $f(x, y)$ e sua derivada parcial $f_x(x, y)$, sejam ambas funções contínuas sobre o retângulo fechado $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$, $a \leqslant y \leqslant b$.

Convém escrever

$$F(x) = \int_a^b f(x, y)\, dy.$$

Se x e $x+\Delta x$ estão ambos no intervalo $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$, então

$$F(x+\Delta x) - F(x) = \int_a^b f(x+\Delta x, y)\, dy - \int_a^b f(x, y)\, dy$$
$$= \int_a^b [f(x+\Delta x, y) - f(x, y)]\, dy.$$

A seguir, o Teorema do Valor Médio permite-nos escrever o integrando sob a forma

$$f(x+\Delta x, y) - f(x, y) = \Delta x\, f_x(\bar{x}, y),$$

onde $\bar{x}$ está entre x e $x+\Delta x$. Além disso, como $f_x(x, y)$ é suposto ser contínuo sobre o retângulo fechado, pode ser mostrado que o valor absoluto da diferença

$$f_x(\bar{x}, y) - f_x(x, y)$$

é menor que um número positivo ϵ independente de x e y e tende a zero com Δx*. Colocando esses ingredientes juntos, obtemos

$$\left|\frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} - \int_a^b f_x(x, y)\, dy\right| = \left|\int_a^b [f_x(\bar{x}, y) - f_x(x, y)]\, dy\right|$$
$$\leq \int_a^b |f_x(\bar{x}, y) - f_x(x, y)|\, dy$$
$$< \int_a^b \epsilon\, dy = \epsilon(b-a).$$

Se deixarmos agora Δx tender a zero, então ϵ também tenderá a zero, e teremos

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \int_a^b f_x(x, y)\, dy,$$

que é (1).

---

* Este é a análoga bidimensional da propriedade de continuidade uniforme que discutimos e provamos no Apêndice B.5 (Volume I).

B.8 UMA PROVA DO LEMA FUNDAMENTAL

Este lema foi enunciado e discutido na Seção 19.4 e é a cavilha que mantém juntos os principais instrumentos do Capítulo 19. Ele tem a ver com uma função $z = f(x, y)$, cujas derivadas parciais f_x e f_y existem em (x_0, y_0), em todos os pontos próximos e são contínuas no próprio ponto (x_0, y_0). A asserção do lema é que nessas condições o incremento

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

pode ser expresso na forma

$$\Delta z = f_x(x_0, y_0)\,\Delta x + f_y(x_0, y_0)\,\Delta y + \epsilon_1\,\Delta x + \epsilon_2\,\Delta y, \tag{1}$$

onde a_1 e ϵ_2 são quantidades que $\to 0$ quando Δx e $\Delta y \to 0$.

Para provar essa proposição, analisamos a variação Δz em duas etapas (Fig. B. 13),

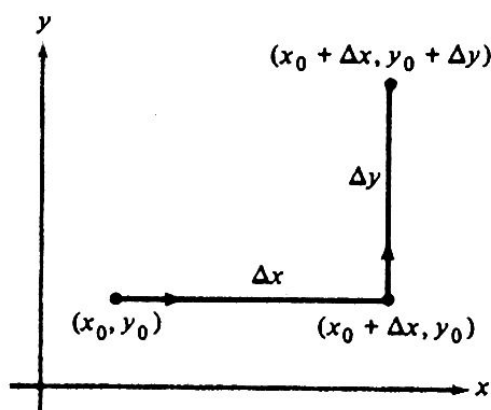



Figura B.13

primeiro, variando apenas x e movendo-se de (x_0, y_0) a $(x_0 + \Delta x, y_0)$ e depois variando apenas y e movendo-se de $(x_0 + \Delta x, y_0)$ a $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$. Denotamos a primeira variação em z por $\Delta_1 z$ de modo que

$$\Delta_1 z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0).$$

Pelo Teorema do Valor Médio, podemos escrever essa diferença como

$$\Delta_1 z = \Delta x\, f_x(x_1, y_0), \tag{2}$$

onde x_1 é um ponto entre x_0 e $x_0 + \Delta x$. Analogamente, se denotarmos a segunda parte da variação de z por $\Delta_2 z$, de modo que

$$\Delta_2 z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0),$$

então

$$\Delta_2 z = \Delta y f_y(x_0 + \Delta x, y_1), \tag{3}$$

onde y_1 é um ponto entre y_0 e $y_0 + \Delta y$. Quando Δx e $\Delta y \to 0$, $x_1 \to x_0$ e $y_1 \to y_0$. Pela suposta continuidade de f_x e f_y em (x_0, y_0), podemos então escrever

$$f_x(x_1, y_0) = f_x(x_0, y_0) + \epsilon_1$$

e

$$f_y(x_0 + \Delta x, y_1) = f_y(x_0, y_0) + \epsilon_2,$$

onde ϵ_1 e $\epsilon_2 \to 0$ quando Δx e $\Delta y \to 0$. Isto permite-nos escrever (2) e (3) como

$$\Delta_1 z = f_x(x_0, y_0)\, \Delta x + \epsilon_1\, \Delta x, \tag{4}$$

e

$$\Delta_2 z = f_y(x_0, y_0)\, \Delta y + \epsilon_2\, \Delta y. \tag{5}$$

Como $\Delta z = \Delta_1 z + \Delta_2 z$, completamos a prova somando (4) e (5) para obter (1).

B.9 UMA PROVA DO TEOREMA DA FUNÇÃO IMPLÍCITA

Enunciamos e discutimos o Teorema da Função Implícita na Seção 19.10 e nosso objetivo aqui é fornecer uma prova desse teorema.

Para recolocar a situação, assumimos que $F(x, y)$ tem derivadas parciais contínuas em uma vizinhança de um ponto $P_0 = (x_0, y_0)$ e também que $F(x_0, y_0) = c$ e $F_y(x_0, y_0) \neq 0$. Provaremos que existe um retângulo centrado em P_0 dentro do qual o gráfico de $F(x, y) = c$ é o gráfico de uma única função diferenciável $y = f(x)$ e também que a derivada dessa função é dada pela fórmula

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}. \tag{1}$$

Primeiro, sabemos, pelo Lema Fundamental (Seção 19.4), que, como F tem derivadas parciais contínuas na vizinhança acima mencionada, a própria função F é contínua nessa vizinhança.

Suponhamos, para fixar as idéias, que $F_y > 0$ em P_0. (Uma prova análoga pode ser feita se $F_y < 0$ em P_0.) Observamos que se $F_y > 0$ ao longo de um segmento vertical, então F é uma função crescente em y ao longo desse segmento. Segue-se que nenhum valor de F (tal como $F = c$, em que estamos interessados) pode ser alcançado mais de uma vez sobre tal segmento.

Começamos construindo um retângulo R_0 centrado em P_0 dentro do qual e sobre a fronteira do qual F e F_y são contínuas e $F_y > 0$. Isto é possível pela continuidade das funções. Ao longo de qualquer segmento vertical que atravessa R_0, a função F é uma função crescente de y. Pelo Teorema do Valor Intermediário (Apêndice B.3, volume I), temos $F = c$ sobre esse segmento se e somente se $F < c$ na extremidade inferior e $F > c$ na extremidade superior. Consideremos, por exemplo, o segmento vertical P_1P_2 por P_0. Como $F = c$ em P_0, temos $F < c$ em P_1 e, por continuidade, $F < c$ em alguma vizinhança de P_1 sobre a borda inferior de R_0. Analogamente, temos $F > c$ em alguma vizinhança de P_2 sobre a borda superior de R_0. Um segmento vertical suficientemente próximo de P_1P_2 terá suas extremidades em ambas as vizinhanças e, portanto, interceptará o gráfico de $F = c$ exatamente em um ponto.

É evidente, disto, que podemos contrair a base de R_0, se necessário, para formar um novo retângulo R centrado em P_0 de tal modo que $F < c$ em sua aresta inferior e $F > c$ em sua aresta superior (Fig. B.2)

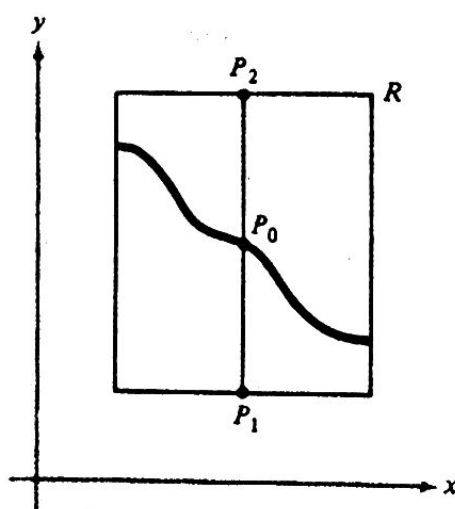



Figura B.2

Dentro desse retângulo há um y que corresponde a cada x de tal maneira que $F(x, y) = c$, e isto define nossa função $y = f(x)$. É claro que essa função é contínua, pois a altura de R_0 pode ser tornada tão pequena quanto se queira no início.

Para estabelecer a diferenciabilidade e a fórmula (1), consideramos uma variação Δx e a correspondente variação $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Como o novo ponto $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ está ainda sobre o gráfico de $F(x, y) = c$, temos

$$F(x_0, y_0) = c \qquad \text{e} \qquad F(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = c, \qquad \text{logo} \qquad \Delta F = 0.$$

Mas o Lema Fundamental dá

$$\Delta F = F_x \Delta x + F_y \Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y,$$

onde $\epsilon_1, \epsilon_2 \to 0$ quando $\Delta x \to 0$ e $\Delta y \to 0$, e, portanto,

$$0 = F_x + F_y \frac{\Delta y}{\Delta x} + \epsilon_1 + \epsilon_2 \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

ou

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{F_x + \epsilon_1}{F_y + \epsilon_2}. \tag{2}$$

Sabemos que $y = f(x)$ é contínua. Se $\Delta x \to 0$, segue-se então que $\Delta y \to 0$, logo $\epsilon_1, \epsilon_2 \to 0$, e (2) implica que $y = f(x)$ é diferenciável com a derivada dada por (1). Finalmente, a prova da diferenciabilidade aplica-se exatamente da mesma maneira a qualquer outro ponto do gráfico dentro do retângulo R.

RESPOSTAS

CAPÍTULO 13

Seção 13.2, p. 6

5. (a) C; (b) D; (c) D; (d) C; (e) D; (f) C; (g) D; (h) D.
9. 40 km.

Seção 13.3, p. 16

1. (a) $-4 < x < -2$, $s = -1/(x^2 + 6x + 8)$; (b) $x > -1$ ou $x < -2$, $s = (2x+3)/(2x+2)$; (c) $|x - k\pi| < \pi/6$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, $s = 1/(1 - 2 \operatorname{sen} x)$; (d) $|x| < \frac{4}{3}$, $s = 1/(3-4x)$; (e) $|x| > \frac{3}{4}$, $s = 1/(3-4x)$; (f) $-\frac{5}{4} < x < \frac{3}{4}$, $s = 1/(3-4x)$
5. 2

Seção 13.4, p. 24

5. $x^3 = 0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 1 \cdot x^3 + 0 \cdot x^4 + \ldots$

Problemas Suplementares, p. 31

1. (a) $\frac{3}{2}$; (b) $\frac{27}{2}$; (c) $\operatorname{sen}\theta/(2 - \operatorname{sen}\theta)$; (d) $1/(1+x^2)$ 3. (a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{2n+1}$.
17. (a) 1; (b) $2e - 3$; (c) $e + 1$.

CAPÍTULO 14

Seção 14.2, p. 36

1. (a) D; (b) C, 0; (c) C, 0; (d) C, 0; (e) D; (f) C, $\frac{1}{2}$; (g) C, 0; (h) C, $\frac{1}{2}$; (i) C, 0; (j) D; (k) C, 0; (l) C, 0; (m) D; (n) C, 0; (o) C, π; (p) C, $-\frac{1}{4}$.
5. (a) $a/2$; (b) $4a^3$
9. Uma seqüência decrescente de números positivos converge.

Seção 14.3, p. 48

3. (a) $|x| < 1$, $ax/(1 - x^2)$; (b) $|x| > 1$, $1/(x - 1)$; (c) $|1 + x| > 1$, $1 + x$ (também, se $x = 0$ a soma é 0); (d) $e^{-1} < x < e$, $\ln x/(1 - \ln x)$.
5. $x < 0$.

Seção 14.4, p. 60

1. (a) D; (b) C; (c) C; (d) C; (e) C; (f) D; (g) C; (h) C.
3. D
5. D.
7. D
9. D
11. D
13. C
15. C
17. D
19. C
21. C se $p > 1$, D se $p \leqslant 1$.
23. C
25. C se $p > 1$, D se $p \leqslant 1$.
29. ln 2

Seção 14.5, p. 66

1. C
3. D
5. C
7. C

Seção 14.6, p. 76

1. C
3. D
5. C
7. C
9. D
11. C
13. D
17. D
19. C
21. D
23. C

Seção 14.7, p. 81

1. CC
3. D
5. AC
7. AC
9. D
11. CC
13. CC
15. AC
17. D.
19. AC.
21. CC
23. D
25. CC
27. (a) F; (b) T; (c) F; (d) F; (e) T; (f) F.

Seção 14.8, p. 89

1. $(-4, 4)$
3. $R = 0$
5. $[-1, 1)$
7. $[-1, 1]$
9. $R = 0$
11. $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$
13. $[-1, 1]$
15. $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$
17. $[-1, 1)$
19. $[-1, 1]$.
21. $(2, 6)$
23. $R = \infty$
25. $R = 0$
27. $(0, 2e)$
29. (a) $R = 1$; (b) $R = \infty$

Seção 14.9, p. 97

1. (a) $\Sigma\,(-1)^{n+1} n x^{n-1}$, $|x| < 1$; (b) $\Sigma\,(-1)^n \dfrac{(n+2)(n+1)}{2} x^n$, $|x| < 1$.
3. (a) $\dfrac{1}{2} \ln \dfrac{1+x}{1-x}$; (b) $f(x) = (e^x - 1)/x$ se $x \neq 0$, $f(0) = 1$; (c) $\dfrac{x}{(1-x)^2}$; (d) $\dfrac{x}{(1-x^2)^2}$.

Seção 14.10, p. 104

15. (a) $x - \dfrac{x^3}{3 \cdot 3!} + \dfrac{x^5}{5 \cdot 5!} - \cdots$; (b) $x + \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{56}x^7 + \cdots$; (c) $x - \frac{1}{10}x^5 + \frac{1}{24}x^9 - \cdots$.

Seção 14.11, p. 112

1. $x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5 - \frac{1}{90}x^6 + \cdots$.

31. $x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \cdots$; $R = \pi/2$.
35. (a) $\frac{1}{2}$; (b) $\frac{1}{6}$.
37. 272.

Problemas Suplementares, p. 126

1. (a) 0; (b) $\frac{1}{2}$; (c) 0; (d) 1.
5. (a) $\frac{1}{4}$; (b) $\frac{1}{16}$; (c) $\frac{1}{256}$.
7. $x_n = \dfrac{A^n - B^n}{\sqrt{5}}$, onde A e B são as raízes positiva e negativa de $x^2 - x - 1 = 0$
11. $\dfrac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}$.
23. $|x| > \sqrt{2}$.
25. $s_n = \dfrac{x(1 - x^n)}{(1-x)^2} - \dfrac{nx^{n+1}}{1-x}$.
31. (a) $-\ln 2$; (b) 1
35. (a) C; (b) D; (c) C; (d) D; (e) C; (f) D; (g) C; (h) D; (i) C; (j) D; (k) C; (l) C; (m) C; (n) C; (o) C; (p) D; (q) C; (r) C; (s) C; (t) D; (u) C; (v) C.
51. C
53. Inconclusivo
55. D
57. C
59. D
67. (a) ∞; (b) ∞; (c) e
71. $(-1, 1)$
73. (a) $\displaystyle\int_0^x \frac{\text{arc tg}^{-1}}{t}\,dt$; (b) $(1+x)\ln(1+x) - x$; (c) $\dfrac{1+x}{(1-x)^3}$; (d) $-\frac{1}{4}\ln(1 - x^4)$; (e) $\dfrac{x + 4x^2 + x^3}{(1-x)^4}$; (f) $\dfrac{4 - 3x}{(1-x)^2}$.
77. $f_2(x) = 2x/(1-x)^3$.
81. (a) $-\frac{1}{3}$; (b) 0; (c) $-\frac{1}{12}$.

CAPÍTULO 15

Seção 15.2, p. 148

1. (a) circunferência, centro (1, 3) e raio 5; (b) conjunto vazio; (c) ponto (5, − 1); (d) circunferência, centro (8, − 6) e raio 2; (e) ponto (− 3, 7); (f) conjunto vazio.
3. (a) (− 2, − 1), (− 2, 0), $y = -2$; (b) (3, 1), (5, 1), $x = 1$; (c) (− 2, 5), (− 2, 1), $y = 9$; (d) (− 2, 1), (− 5, 1), $x = 1$; (e) (− 1, 2), $(-1, \frac{9}{4})$, $y = \frac{7}{4}$.
5. $b^2y = 4hx(b - x)$.

Seção 15.3, p. 155

1. (a) $x^2/25 + y^2/21 = 1$; (b) $x^2/36 + y^2/52 = 1$; (c) $4x^2/9 + y^2/4 = 1$; (d) $x^2/16 + y^2/7 = 1$; (e) $x^2/27 + y^2/36 = 1$; (f) $24x^2/2500 + y^2/100 = 1$
3. (a) (0, 0), (0, ± 5), (0, ± 4), $e = \frac{4}{5}$; (b) (0, 0), (± 2, 0), $(\pm\sqrt{3}, 0)$, $e = \sqrt{3}/2$; (c) (− 2, 1), $(-2, 1 \pm \sqrt{2})$, (− 2, 2) e (− 2, 0), $e = \sqrt{2}/2$; (d) (1, 0), (2, 0) e (0, 0), $(1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}, 0)$, $e = \sqrt{3}/2$; (e) (2, − 1), (5, − 1) e (− 1, − 1), $(2 \pm \sqrt{5}, -1)$, $e = \sqrt{5}/3$; (f) (0, 2), $(\pm 2\sqrt{2}, 2)$, (± 2, 2), $e = \sqrt{2}/2$.
7. (a) $\frac{4}{3}\pi ab^2$; (b) $\frac{4}{3}\pi a^2b$.
13. $\left(\pm \frac{a}{d}\sqrt{d^2 - b^2}, \frac{b^2}{d}\right)$.
17. $\frac{1}{39}$.
21. $y = mx \pm \sqrt{b^2 + a^2m^2}$.

Seção 15.4, p. 169

1. (± 2, 0), $(\pm\sqrt{13}, 0)$, $2y = \pm 3x$, $e = \sqrt{13}/2$, $x = \pm 4/\sqrt{13}$.
3. (0, ± 2), $(0, \pm\sqrt{13})$, $3y = \pm 2x$, $e = \sqrt{13}/2$, $y = \pm 4/\sqrt{13}$.
5. (0, ± 2), $(0, \pm 2\sqrt{5})$, $2y = \pm x$, $e = \sqrt{5}$, $y = \pm 2/\sqrt{5}$
7. (0, ± 1), $(0, \pm\sqrt{2})$, $y = \pm x$, $e = \sqrt{2}$, $\sqrt{2}y = \pm x$
9. $y^2/9 - x^2/16 = 1$.
11. $x^2/9 - y^2/36 = 1$.
13. $x^2/36 - y^2/28 = 1$.
15. $x^2/36 - y^2/45 = 1$.
17. Hipérbole com centro (1, − 2) e eixo principal horizontal.
19. Duas retas $5(y + 1) = \pm 6(x + 2)$
31. $\left(\pm \frac{a}{d}\sqrt{b^2 + d^2}, -\frac{b^2}{d}\right)$.

Seção 15.6, p. 183

1. $\theta = 45°$, $x'^2/4 + y'^2 = 1$, elipse.
3. $\theta = 30°$, $y'^2/2 - x'^2/2 = 1$, hipérbole.
5. $\theta = 45°$, $x'^2 = 4\sqrt{2}y'$, parábola.
7. $\theta = 45°$, $x'^2/2 + y'^2/4 = 1$, elipse.
9. $\theta = 60°$, $x'^2/3 + y'^2/11 = 1$, elipse
11. $\theta = \sin^{-1} 1/\sqrt{10}$, $x'^2 + 3y'^2 = 1$, elipse.

Problemas Suplementares, p. 190

1. $4p$
9. $\frac{4}{3}\pi(2+\sqrt{17})\ m^3$

CAPÍTULO 16

Seção 16.1, p. 195

1. (a) $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$; (b) $(2, -2\sqrt{3})$; (c) $(0, 0)$; (d) $(\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2})$; (e) $(0, -2)$; (f) $(-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$; (g) $(-3, 0)$; (h) $(-3\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$; (i) $(1, 0)$; (j) $(0, 0)$; (k) $(1, \sqrt{3})$; (l) $(5, 12)$; (m) $(-2\sqrt{3}, 2)$; (n) $(0, 3)$.
3. $(1, 0), (1, 2\pi/5), (1, 4\pi/5), (1, 6\pi/5), (1, 8\pi/5)$.
7. $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 8$; circunferência com centro $(2, 2)$ e raio $2\sqrt{2}$.
9. (a) reta $y = 2$; (b) reta $x = 4$; (c) reta $y = -3$; (d) reta $x = -2$.

Seção 16.2, p. 202

5. (a) $r = 5\sec\theta$; (b) $r = -3\operatorname{cosec}\theta$; (c) $r = 3$; (d) $r^2 = 9\sec 2\theta$; (e) $r = \operatorname{tg}\theta\sec\theta$; (f) $r^2 = 2\operatorname{cosec} 2\theta$; (g) $r = \operatorname{sen}^2\theta/(\cos\theta\cos 2\theta)$; (h) $r = 2\cos\theta/(\operatorname{tg}^2\theta - 1)$.
9. $(1, 2\pi/3)$ e $(1, 4\pi/3)$; $-\frac{1}{2}$.
11. $r = a\operatorname{sen} 2\theta$.
13. $x^3 = y^2(2a - x)$.
15. $(x-a)(x^2+y^2) = b^2x^2$.

Seção 16.3, p. 211

1. $9 = r^2 + 16 - 8r\cos(\theta - \pi/6)$.
3. $r = 10\cos\theta$.
5. $r = 4\sqrt{3}\cos(\theta - \pi/3)$.
7. $r = a(1+\cos\theta)$.
9. (a) $\sqrt{5}a$, $\sqrt{3}a$; (b) $\frac{1}{2}\sqrt{5}a$, $\frac{1}{2}\sqrt{3}a$.
11. $r = ep/(1 + e\operatorname{sen}\theta)$.
13. $e = \frac{1}{2}$.
15. $e = \frac{1}{6}$.
17. $\pm\sqrt{e^2 - 1}$.
19. (a) $\left(\dfrac{ep}{1-e}, 0\right)$; (b) $\left(\dfrac{ep}{1+e}, \pi\right)$.
21. (a) $x = y\operatorname{cotg}\dfrac{\pi y}{2a}$; (b) $r = \dfrac{2a}{\pi}\theta\operatorname{cosec}\theta$.

Seção 16.4, p. 223

5. $\frac{32}{5}\pi a^2$.
11. (a) $4\pi a^2$; (b) $4\pi^2 a^2$.
17. $\sqrt{2}$.

Seção 16.5, p. 232

1. $\frac{3}{2}\pi a^2$.
5. $\pi/4$.
7. $\pi + 3\sqrt{3}$.
9. $a^2\left(\dfrac{7\pi}{12} - \sqrt{3}\right)$.

Problemas Suplementares, p. 239

1. (a) $\operatorname{tg}\theta = 4$; (b) $r^2 = 36/4 + 5\operatorname{sen}^2\theta)$; (c) $r = 2\cos\theta - 4\operatorname{sen}\theta$; (d) $r = 3/(2\cos\theta - 5\operatorname{sen}\theta)$; (e) $r = 4\operatorname{cotg}\theta\operatorname{cosec}\theta$; (f) $r = 1 + 4\operatorname{sen}\theta$; (g) $r = 6\operatorname{sen}2\theta/(\operatorname{sen}^3\theta + \cos^3\theta)$.

3. (a) $(\sqrt{2}a, \pi/4)$; (b) a origem e $\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}a, 3\pi/4\right)$, $\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}a, -\pi/4\right)$; (c) $(a/2, \pm\pi/6)$;

(d) $(3\sqrt{2}, \pi/4)$, $(3\sqrt{2}, 3\pi/4)$; (e) a origem e $(\frac{1}{2}, 2\pi/3)$, $(\frac{1}{2}, 4\pi/3)$; (f) $(\pm a, \pi/6)$, $\pm a, -\pi/6)$;(g) origem e $(8a/5, \operatorname{arcsen}\frac{3}{5})$; (h) $(4, -\pi/3)$; (i) $(\pm 2, \pi/2)$; (j) $(2, \pm\pi/3)$, $(-1, \pi)$; (k) a origem e $(\frac{1}{3}, \pm\pi/3)$; (l) a origem e $\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}a, \pi/4\right)$, $\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}a, 5\pi/4\right)$; (m) a origem e $(\pm a, \pi/4)$, $(\pm a, 3\pi/4)$

15. Ângulo maior $= 2\pi/3$

17. $\frac{1}{3}a[(4 + 4\pi^2)^{3/2} - 8]$.

21. $\sqrt{3} - \frac{1}{3}\pi$.

25. $\frac{1}{4}a^2(3\sqrt{3} - \pi)$.

CAPÍTULO 17

Seção 17.1, p. 246

1. (a) $x + y = 2$; (b) $2x - y = -4$.
3. $x + y = 3$.
5. $x - 1 = (y - 3)^2$.
7. $x^2 - y^2 = 1$.
9. $y = 1 - 2x^2$.
11. Não; a segunda é parte da primeira
13. (c) 45°
15. $x = a\cos\theta + a\theta\operatorname{sen}\theta$.
$y = \operatorname{sen}\theta - a\theta\cos\theta$

Seção 17.2, p. 258

1. $a\operatorname{arc}\operatorname{sen}^{-1}\frac{\sqrt{2ay - y^2}}{a} = \sqrt{2ay - y^2} + x$.

7. $6a$

11. $x = 2b\cos\theta + b\cos 2\theta$, $y = 2b\operatorname{sen}\theta - b\operatorname{sen}2\theta$; $\frac{16}{3}a$.

Seção 17.3, p. 269

1. (a) $\sqrt{10}$, $13\mathbf{i} - 34\mathbf{j}$, $4\mathbf{i} - 13\mathbf{j}$; (b) $\sqrt{53}$, $-36\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$, $-39\mathbf{i} + 14\mathbf{j}$; (c) 6, $10\mathbf{i} - 33\mathbf{j}$, $-2\mathbf{i} - 33\mathbf{j}$; (d) $\sqrt{34}$, $-\mathbf{i} + 55\mathbf{j}$, $20\mathbf{i} + 22\mathbf{j}$.

5. (a) $\pm\frac{(3\mathbf{i} - 4\mathbf{j})}{5}$; (b) $\pm\frac{(-5\mathbf{i} + 12\mathbf{j})}{13}$; (c) $\pm\frac{(5\mathbf{i} - 7\mathbf{j})}{\sqrt{74}}$; (d) $\pm\frac{(24\mathbf{i} - 7\mathbf{j})}{25}$.

7. $\pm 2(12\mathbf{i} + 5\mathbf{j})$.

9. $\frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} + \frac{\mathbf{B}}{|\mathbf{B}|}$.

13. $\theta = 45°$.

Seção 17.4, p. 280

1. A reta que passa pela extremidade de A que é paralela a B
5. $2t\,\mathbf{i} + \mathbf{j},\ 2\mathbf{i},\ \sqrt{4t^2 + 1}$.
7. $\mathbf{i} + (3t^2 - 3)\mathbf{j},\ 6t\,\mathbf{j},\ \sqrt{1 + 9(t^2 - 1)^2}$.
9. $\sec^2 t\,\mathbf{i} + \sec t\, tg\, t\,\mathbf{j},\ 2\sec^2 t\, tg\, t\,\mathbf{i} + (\sec^3 t + \sec t\, tg^2\, t)\,\mathbf{j},\ |\sec t|\sqrt{2\sec^2 t - 1}$
11. $\mathbf{R} = \frac{1}{2}at^2\,\mathbf{j} + \mathbf{v}_0 t + \mathbf{R}_0$.

Seção 17.5 p. 290

1. (a) $-2/(1 + 4x)^{3/2}$; (c) $\cos x$; (c) $2x^3/(2x^4 - 2x + 1)^{3/2}$; (d) $-\frac{1}{2}\sqrt{2}e^{-t}$; (e) $-4t^2/(4t^4 + 1)^{3/2}$.
3. (a) 1; (b) $\frac{1}{18}5^{5/4}6^{1/2}$; (c) nenhum.
5. Se (como é usual) s cresce na circunferência no sentido anti-horário, então k, calculado a partir de (4), tem o sinal errado na semicircunferência superior, pois s cresce no sentido dos x decrescentes. Troque o sinal desse resultado para obter $1/a$ nas duas metades da circunferência.
7. $(-\frac{1}{2}\ln 2, \frac{1}{2}\sqrt{2}), \frac{3}{2}\sqrt{3}$.
9. $\frac{3}{2}a$ em $\theta = \pi/4$.
11. $4a \operatorname{sen} \frac{1}{2}\theta$.

Seção 17.6, p. 298

3. $(-a\omega \sin \omega t)\mathbf{i} + (a\omega \cos \omega t)\mathbf{j},\ (-a\omega^2 \cos \omega t)\mathbf{i} + (-a\omega^2 \operatorname{sen} \omega^2)\mathbf{j},\ a\omega,\ 0,\ a\omega^2$,
5. $(-e^t \operatorname{sen} t + e^t \cos t)\mathbf{i} + (e^t \cos t + e^t \operatorname{sen} t)\mathbf{j},\ (-2e^t \operatorname{sen} t)\mathbf{i} + (2e^t \cos t)\mathbf{j},\ \sqrt{2}e^t,\ \sqrt{2}e^t,\ \sqrt{2}e^t$
7. $\dfrac{4t}{t^2 + 1}\mathbf{i} + \dfrac{2t^2 - 2}{t^2 + 1}\mathbf{j},\ \dfrac{4(1 - t^2)}{(t^2 + 1)^2}\mathbf{i} + \dfrac{8t}{(t^2 + 1)^2}\mathbf{j},\ 2,\ 0,\ 4/(t^2 + 1)$.
9. $a_n = 0$ quando $t = 0$, $a_n = -1$ quando $t = \pi/2$
11. $v > 30\sqrt{2}$.

Seção 17.7, p. 305

1. Como $M = \left(\dfrac{4\pi^2}{G}\right)\left(\dfrac{a^3}{T^2}\right)$, determine a razão a^3/T^2 para qualquer planeta particular (por exemplo, a Terra) e prossiga com a aritmética.

Problemas Suplementares, p. 315

1. $3a^2/2$.
3. (a) $5\pi^2 a^3$; (b) $\frac{64}{3}\pi a^2$.
5. $8b + \dfrac{8b^2}{a}$.
11. Raio mínimo $= 9/(7\sqrt[6]{28})$, em $t = \pm\sqrt[6]{\frac{2}{7}}$
13. Aproximadamente $5{,}94 \times 10^{37}$ gramas.

CAPÍTULO 18

Seção 18.1, p. 320

1. Faces: $x = 1, y = 4, z = 5$. Arestas: $x = 1, y = 4, y = 4, z = 5; x = 1, z = 5$.
3. 64
5. (a) O plano yz e o plano xz tomados juntos; (b) todos os três planos coordenados considerados juntos.
7. (0, 4, 0)
9. $x^2 + y^2 + (z - 7)^2 = 49$ ou $x^2 + y^2 + z^2 = 14z$
11. (a) a esfera com centro $(-1, 3, 5)$ e raio 3; (b) o ponto $(5, -1, 3)$; (c) o conjunto vazio; (d) o ponto $(-1, 7, 3)$; (e) a esfera com centro $(2, -3, 0)$ e raio $\frac{1}{2}$.
15. $\frac{49}{2}$
17. $\frac{1}{3}$ (7**i** + 5**j** + 4**k**).
19. $\frac{1}{4}$(**A** + **B** + **C** + **D**).

Seção 18.2, p. 328

3. (a) 60°; (b) 45°; (c) 90°.
7. Não.
13. 2**i** – **k**
19. Dois, 45° e 135°
21. $c(z_1 - z_2)$

Seção 18.3, p. 336

1. (a) 14**i** + 7**j**; (b) 3**i** – 3**j**; (c) 2**i** – 14**j** – 22**k**; (d) **k**
3. $2\sqrt{6}$.
5. Assumindo que suas origens coincidem, todos os três vetores estão num mesmo plano.
11. (b) $11/\sqrt{107}$.

Seção 18.4, p. 345

1. (a) T; (b) F; (c) T; (d) T; (e) F; (f) T; (g) F; (h) F.
3. São paralelas.
5. (a) $x = 2 + t, y = -1 + 4t, z = -3 - 2t$; (b) $x = 2 + 3t, y = -1 - t, z = -3 + 6t$; (c) $x = 2 + 2t, y = -1 - 2t, z = -3 + 5t$
7. (a) $x = 2 + 3t, y = -3t, z = 3 - 2t$; (b) $x = 4 + 4t, y = 2, z = -1$.
9. $(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2})$.
11. 6.
13. $2x - y - z + 2 = 0$.
17. $8/\sqrt{21}$.
19. (9, 0, 0).
21. $\frac{x-2}{17} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{-7}$.
23. O segundo plano.
25. $4x + 3y + 4z + 2 x 0$
29. (a) $\frac{8}{21}$; (b) 0.

Seção 18.5, p. 358

1. Cilindro parabólico.
5. Plano.
9. $x^2 + (z - a)^2 = a^2$.
11. (a) $z = e^{-(x^2+y^2)}$; (b) $x^2 + z^2 = e^{-2y^2}$.
13. (a) $y = x^2 + z^2$; (b) $9(x^2 + z^2) + 4y^2 = 36$; (c) $z = 4 - x^2 - y^2$; (d) $x = y^2 + z^2$.
15. $(x - 2z)^2 + (y - 3z)^2 - 6(x - 2z) = 0$.

Seção 18.6, p. 365

1. Elipsóide
3. Parabolóide circular
5. Hiperbolóide de duas folhas
7. Parabolóide hiperbólico
9. Hiperbolóide de duas folhas
11. Elipsóide
13. Parabolóide hiperbólico
15. $(6, -2, 2), (3, 4, -2)$.
17. (a) $A(k) = \pi ab(1 - \frac{k^2}{c^2})$; (b) $\frac{4}{3}\pi abc$
23. Parabolóide hiperbólico

Seção 18.7, p. 374

1. (a) $(2\sqrt{2}, \pi/4, 1)$; (b) $(2, -\pi/3, 7)$; (c) $(2\sqrt{3}, \pi/6, 2)$; (d) $(3\sqrt{5}, \text{tg}^{-1}\, 2, 5)$
3. (a) $(2\sqrt{2}, \pi/6, \pi/4)$; (b) $(2\sqrt{2}, 5\pi/6, -\pi/4)$; (c) $(2, \pi/4)$; (d) $(2, \pi/6, -\pi/2)$
5. $r^2 + z^2 = 16$
7. $r^2 = z^2$
9. $r = 2 \text{ sen } \theta$
11. $r = 3$
13. $\rho = 4$
15. $\rho = 6 \cos \phi$
17. $p^2 \text{ sen}^2 \phi + \rho \cos \phi = 4$

CAPÍTULO 19

Seção 19.1, p. 379

1. O plano inteiro, exceto a reta $y = 2x$
3. O primeiro e o terceiro quadrantes, incluindo os eixos.
5. A parte do plano acima da reta $y = 3x$
7. Todo o espaço xyz, exceto a origem.
9. A esfera sólida $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 16$
11. Todo o espaço xyz tal que $z > 0$, exceto os planos $z = \pi, 3\pi, \ldots$
25. Fora da origem.
27. No sentido dos x positivos, y negativos, z positivos.

Seção 19.2, p. 387

1. 2, 3.
3. $-6y^2/(3x+1)^2,\ 4y/(3x+1)$
5. $2x \operatorname{sen} y,\ x^2 \cos y$
7. $\operatorname{tg} 2y + 3y \sec^2 3x,\ 2x \sec^2 2y + \operatorname{tg} 3x$
9. $-3 \operatorname{sen}(3x-y),\ \operatorname{sen}(3x-y)$
11. $e^x \operatorname{sen} y,\ e^x \cos y.$
13. $2e^y/x,\ e^y \ln x^2$
15. $2xy^5z^7,\ 5x^2y^4z^7,\ 7x^2y^5z^6$
17. $\ln \frac{y}{z}, \frac{x}{y}, -\frac{x}{z}.$
19. (a) $y = 3, z = 8x + 1$; (b) $x = 2, z = 6y - 1$
31. $f(x, y) = 3xy^2 - x^2 \cos y + 2y.$

Seção 19.3, p. 396

1. $z - 25 = 20(x-1) + 40(y-2).$
3. $z = 4x + 5y.$
5. $z - 1 = 6(x-3) - 8(y-2).$
7. $z - 1 = y.$
9. $10x + 13y + 13z = 75.$
13. $x_0x/a^2 + y_0y/b^2 + z_0z/c^2 = 1.$
15. $60°$.
17. A origem
19. $h(1+a)/\sqrt{a}.$

Seção 19.5, p. 405

1. (a) $8\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$; (b) $2\mathbf{i}$; (c) $\frac{2}{9}(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k})$; (d) $\frac{1}{5}(-\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \frac{2}{5}\mathbf{k})$.
3. (a) $3, -\mathbf{j}$; (b) $\sqrt{3}, \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$; (c) $2\sqrt{19}, \mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$; (d) $3e^2, \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$
5. $\pm(\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k})/\sqrt{6}.$
7. $56/\sqrt{21}$; $\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$; $4\sqrt{6}.$

Seção 19.6, p. 414

1. 0
3. $-9(t^2+9)/(t^2-9)^2$
5. $4t^3 + 4tu^2,\ 4u^3 + 4t^2u$

Seção 19.7, p. 424

1. (3, 5), um mínimo.
3. (1, 2), um mínimo (– 1, 2), um ponto de sela
5. (–1, –2) e (–2, 8), ambos pontos de sela
7. (0, 0) um ponto de sela; (– 1, – 1) um ponto de máximo
13. 2, 4, 6.
15. $1/(27abc).$
17. $\frac{1}{8}$
19. $\sqrt[8]{14}$
21. $x/6 + y/6 + z/3 = 1$
23. $3\sqrt{3}/2$
27. Base do retângulo $= (2 - \sqrt{3})P$;
 altura do retângulo $= \frac{1}{6}(3 - \sqrt{3})P$;
 altura do triângulo $= \frac{1}{6}(2\sqrt{3} - 3)P$;

Seção 19.8, p. 431

1. $\frac{1}{2}$
5. $2r = h$.
9. $x^2/3 + y^2/12 + z^2/27 = 1$.
13. a^3.

1. Quina no primeiro quadrante é $(\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2})$
7. $\frac{3}{2}, \frac{1}{2}$.
11. $\frac{6}{11}$.
17. (a) $|d|/\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Seção 19.9, p. 442

7. $w = c_1x + c_2$

Seção 19.10, p. 450

1. $3x/y$
5. $(ye^{xy} - 2y^2)/(4xy - xe^{xy})$.
9. $(xyz \cos xz + y \operatorname{sen} xz)/(1 - x^2y \cos xz)$, $(x \operatorname{sen} xz)/(1 - x^2y \cos xz)$
11. $\sqrt{\frac{24}{19}}$.

3. $(1 - \operatorname{sen} y)/(x \cos y - 1)$
7. $3z/(z-1)$, $2z/(1-z)$.

CAPÍTULO 20

Seção 20.1, p. 457

1. O triângulo limitado por $x = 0, y = 1, y = x$
3. $\frac{3}{10}$
7. $\pi/8$
11. π
15 $\int_0^1 \int_0^x f(x, y)\, dy\, dx$.
19. $\int_0^1 \int_0^{x^2} 2x^3\, dy\, dx = \frac{1}{3}$.
23. $\int_{-1}^2 \int_{3x-2}^{4x-x^2} dy\, dx = \frac{9}{2}$.
27. 4

5. 98
9. $\frac{14}{3}$
13. $\frac{1}{6} \ln 2$
17. $\int_e^{e^2} \int_1^{\ln x} f(x, y)\, dy\, dx$.
21. $\int_0^1 \int_0^2 (5 - 2x - y)\, dx\, dy = 5$.
25. $\frac{1}{6} abc$
29 $\frac{4}{35} \pi a^3$

Seção 20.2, p. 464

1. $\frac{9}{2}$
3. a^2
5. $1 - e^{-a}$
7. $\frac{8}{3}$
9. $\frac{625}{12}$
11. $\frac{25}{2}$
13. $\frac{40}{3}$
15. $\frac{3}{4}\pi$.
17. $\frac{1}{3}(b^3 - a^3)$.

Seção 20.3, p. 473

1. $M = a^3; \bar{x} = \bar{y} = \frac{7}{12}a$.
3. $M = \frac{128}{5}; \bar{x} = \frac{20}{7}, \bar{y} = 0$.
5. $M = \frac{2}{3}a^3; \bar{x} = \frac{3}{16}\pi a, \bar{y} = 0$.
7. $M = \pi; \bar{x} = (\pi^2 - 4)/\pi, \bar{y} = \pi/8$.
9. $\frac{1}{3}Ma^2$.
11. $\frac{1}{6}Ma^2$.
13. $\frac{1}{3}Ma^2$.

Seção 20.4, p. 479

1. πa^2.
3. $\frac{1}{6}(4\pi - 3\sqrt{3})a^2$.
5. a^2.
7. $\frac{1}{3}(3\sqrt{3} - \pi)a^2$.
9. $\frac{1}{4}(8 + \pi)a^2$.
11. $\frac{1}{2}(9\sqrt{3} - 2\pi)a^2$.
13. $\frac{1}{16}(9\sqrt{3} + 8\pi)$.
15. $\frac{3}{4}\pi a^4$.
17. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^3 z\, r\, dr\, d\theta$.
19. $\int_0^{\pi/4} \int_0^{\text{tg}\theta \sec\theta} z\, r\, dr\, d\theta$.
21. $\int_0^{\pi/4} \int_0^1 z\, r\, dr\, d\theta$.
23. (a) $\frac{4}{3}\pi[a^3 - (a^2 - b^2)^{3/2}]$; (b) $\frac{4}{3}\pi(a^2 - b^2)^{3/2} = \frac{1}{6}\pi h^3$
25. $\bar{x} = \frac{5}{6}a, \bar{y} = 0$.
27. $\bar{x} = 0, \bar{y} = \frac{4}{3\pi}a$.
29. $\frac{4}{3}\pi a^3$.
31. $\frac{1}{2}\pi a^4 b; \bar{x} = \bar{y} = 0, \bar{z} = \frac{1}{3}a^2 b$.
33. $\frac{3}{2}Ma^2$.
35. $Ma^2\left(\frac{1 - \ln 2}{\ln 2}\right)$.
37. $\frac{1}{4}Ma^2\left(1 - \frac{\text{sen } 2\alpha}{2\alpha}\right)$.

Seção 20.5, p. 489

1. $\frac{1}{24}$
3. $2abc/\pi$
5. 24
7. 4π
9. $\frac{64}{15}$
11. $\int_0^a \int_z^a \int_y^a f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$
13. $a^4/8.$
15. $\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-z}}^{\sqrt{1-z}} \int_{-\sqrt{1-y^2-z}}^{\sqrt{1-y^2-z}} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$
17. 4
19. 27π
21. $\frac{4}{3}\pi abc$
23. $\frac{1}{6}abc$
27. $\frac{2}{3}Ma^2$

Seção 20.6, p. 497

1. $\pi/2$
3. $\bar{x} = \bar{y} = 0,\ \bar{z} = \frac{1}{4}h.$
5. $\frac{1}{5}M(2a^2 + 3b^2).$
7. $\frac{3}{20}M(a^2 + 4h^2).$
9. $\bar{x} = \bar{y} = 0,\ \bar{z} = \frac{3}{8}a.$
11. $\frac{4}{3}(8 - 3\sqrt{3})\pi a^3.$
13. $\pi/32.$
15. $a^3/3.$
17. $\frac{16}{9}a^3(3\pi - 4).$
19. $\frac{3}{2}Ma^2.$
21. $\frac{7}{5}Ma^2.$
23. $\frac{2}{3}\pi a^3(1 - \cos\alpha).$

Seção 20.7, p. 504

1. $\delta \cdot \frac{2}{5}\pi a^5(\frac{2}{3} - \cos\alpha + \frac{1}{3}\cos^3\alpha) = \frac{3}{5}Ma^2[\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\cos\alpha(1 + \cos\alpha)].$
3. $2\pi^2 a^3.$
5. $\frac{3}{8}\left(\frac{a^4 - b^4}{a^3 - b^3}\right).$
7. $\frac{2}{3}\alpha a^3.$
11. $\frac{c8\pi a^{n+5}}{3(n+5)}.$
13. $\frac{8}{3}\pi a^3.$
15. (a) $M = \int_0^a \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \delta(\rho, \phi, \theta)\ \rho^2 \operatorname{sen}\phi\, d\theta\, d\phi\, d\rho$; (b) $M = 4\pi \int_0^a \rho^2 f(\rho)\, d\rho.$
19. $\pi Gm\delta a \operatorname{sen}^2\alpha$
21. $2\pi Gm\delta$

Seção 20.8, p. 513

1. $3\sqrt{14}$
3. $\pi a^2 \sqrt{3}$
5. $2\pi\sqrt{6}$
7. $a^2(\pi - 2)$
9. $\frac{1}{6}\pi(5\sqrt{5} - 1)$
11. $\frac{1}{6}\pi a^2(5\sqrt{5} - 1)$
15. $\frac{1}{12} a[3\sqrt{10} + \ln(3 + \sqrt{10})]$
17. $2a^2$
19. $\frac{4}{9}(20 - 3\pi)$

CAPÍTULO 21

Seção 21.1, p. 526

1. (a) -2; (b) $-\frac{8}{3}$; (c) -4
3. 0
7. (a) $\frac{2}{3}$; (b) $\frac{29}{30}$; (c) $\frac{1}{3}$; (d) $\frac{31}{28}$
9. (a) 0; (b) 0; (c) $-\frac{2}{3}$
11. $\frac{4}{3}$ para todos os caminhos
13. π para ambos os caminhos
15. $\frac{105}{2}$
19. 0 ao longo de todos os caminhos
21. 0

Seção 21.2, p. 538

9. 0
11. 6
13. e
15. 12

Seção 21.3, p. 548

1. $\frac{1}{12}$
3. $2\ln 4 - \frac{15}{4}$
5. $\frac{3}{2}$
7. 1
9. $\frac{1}{6}$
11. $\frac{3}{10}$
13. $\frac{1}{2}$
15 $3\pi a^2$
17. $\frac{3}{8}\pi a^2$
19. 2
21 $\frac{3}{2}a^2$
23 xy^3
25. $e^{xy} - x^2 + y^2$
27. $x \operatorname{sen} y + y \cos x$
31. 2π

APÊNDICE A

Seção 1, p. 682

2. Porque $(4n + 2)^2$ é um múltiplo de 4.
6. Se $\sqrt[n]{m} = a/b$, onde a e b são inteiros positivos sem fator comum > 1, então $a^n = mb^n$ e todo fator primo de b deve ser um fator primo de a (por quê?); logo $b = 1$.
7. Todos os n, exceto $1, 10, 10^2, 10^3, \ldots$
8. Suponha que x seja um número racional a/b (com $b > 0$) irredutível e mostre que $b = 1$, como no Problema 6.

Seção 15, p. 731

1. (a) 0; (b) 0; (c) 2; (d) e^z sen x; (e) $2/r$
2. $\pi a^2 b$
3. $4\pi abc$
4. $\frac{1}{2} abc$
5. $\frac{12}{5} \pi a^5$
6. 0
7. $2\frac{f(r)}{r} + f'(r)$
8. (a) $4\pi a^3$; (b) 4π
11. (a) 36; (b) 98

Seção 16, p. 741

5. 32
6. π
7. $-\pi$
8. -1
9. -6π
10. 4π
11. 27
12. 18π
13. $-1/2$
14. -8π
15. $-\pi ab$
16. 0
17. $\frac{3}{4}\pi$

APÊNDICE B

Seção 1, p. 749

2. (a) C; (b) D; (c) D; (d) C; (e) C
3. (a) k 3; (b) todo k; (c) todo k
4. (a) $b - a > 1$; (b) $b - a > 2$

Seção 2, p. 755

4. Não
6. ln 2

Seção 3, p. 764

3. C se $x \neq \frac{2}{3} k\pi$, D se $x = \frac{2}{3} k\pi$
8. Pelo teste de Abel.

ÁLGEBRA

Expoentes

$a^m a^n = a^{m+n}$, $\quad (ab)^n = a^n b^n$

$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, $\quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

$(a^m)^n = a^{mn}$, $\quad a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$

Logaritmos

$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ $\quad \log_a 1 = 0$, $\quad \log_a a = 1$

$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ $\quad a^{\log_a x} = x$, $\quad \log_a (a^x) = x$

$\log_a x^y = y \log_a x$

Fórmula Quadrática

As raízes da equação quadrática $ax^2 + bx + c = 0$ são

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Fatoração

$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

Teorema do Binômio de Newton

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $\quad (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Se n é um inteiro positivo.

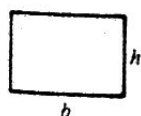
$$(a + b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2}b^2 + \cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots k} a^{n-k}b^k + \cdots + b^n.$$

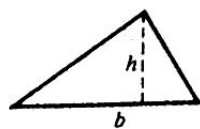
Progressão e Série Geométrica

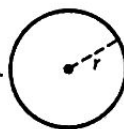
$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \qquad 1 + x + x^2 + \cdots = \frac{1}{1 - x}, \quad |x| < 1$$

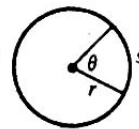
Determinantes

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1, \qquad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

GEOMETRIA

Retângulo

Área $= hb$

Triângulo

Área $= \frac{1}{2} hb$

Círculo

Área $= \pi r^2$
Circunferência $= 2\pi r$

Setor Circular

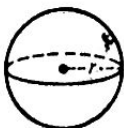
Comprimento de arco

Área $= \frac{1}{2} rs$

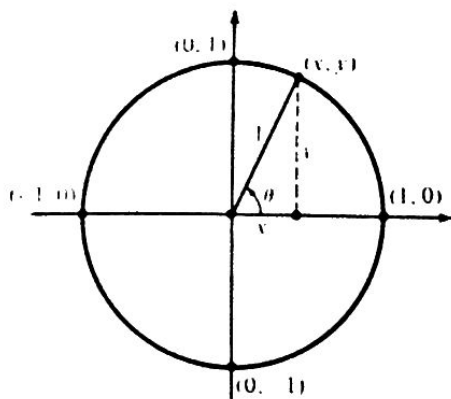
Cilindro

Volume $= \pi r^2 h$
Área lateral $= 2\pi rh$

Cone

Volume $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$
Área lateral $= \pi rs$

Esfera

Volume $= \frac{4}{3}$ ..
Área $= 4\pi r^2$

TRIGONOMETRIA

$$\text{sen}\,\theta = y$$
$$\cos\theta = x$$
$$\text{tg}\,\theta = \frac{y}{x}$$
$$\text{cotg}\,\theta = \frac{x}{y}$$
$$\sec\theta = \frac{1}{x}$$
$$\text{cosec}\,\theta = \frac{1}{y}$$

$$\text{tg}\,\theta = \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta}$$
$$\text{cotg}\,\theta = \frac{\cos\theta}{\text{sen}\,\theta}$$
$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$
$$\text{cosec}\,\theta = \frac{1}{\text{sen}\,\theta}$$
$$\text{cotg}\,\theta = \frac{1}{\text{tg}\,\theta}$$

$$\text{sen}\,(-\theta) = -\,\text{sen}\,\theta$$
$$\cos(-\theta) = \cos\theta$$
$$\text{tg}\,(-\theta) = -\,\text{tg}\,\theta$$

$$\text{sen}^2\,\theta + \cos^2\theta = 1$$
$$\text{tg}^2\,\theta + 1 = \sec^2\theta$$
$$1 + \text{cotg}^2\,\theta = \text{cosec}^2\,\theta$$

$$\text{sen}\,(\theta + \phi) = \text{sen}\,\theta\cos\phi + \cos\theta\,\text{sen}\,\phi$$
$$\cos(\theta + \phi) = \cos\theta\cos\phi - \text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\phi$$
$$\text{tg}\,(\theta + \phi) = \frac{\text{tg}\,\theta + \text{tg}\,\phi}{1 - \text{tg}\,\theta\,\text{tg}\,\phi}$$

$$\text{sen}\,(\theta - \phi) = \text{sen}\,\theta\cos\phi - \cos\theta\,\text{sen}\,\phi$$
$$\cos(\theta - \phi) = \cos\theta\cos\phi + \text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\phi$$
$$\text{tg}\,(\theta - \phi) = \frac{\text{tg}\,\theta - \text{tg}\,\phi}{1 + \text{tg}\,\theta\,\text{tg}\,\phi}$$

$$\text{sen}\,2\theta = 2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta$$
$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \text{sen}^2\,\theta$$

$$2\cos^2\theta = 1 + \cos 2\theta$$
$$2\,\text{sen}^2\,\theta = 1 - \cos 2\theta$$

$\text{sen}\,45° = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\cos 45° = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\text{tg}\,45° = 1$

$\text{sen}\,30° = \frac{1}{2}$, $\cos 30° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\text{tg}\,30° = \frac{1}{3}\sqrt{3}$

$\text{sen}\,60° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\cos 60° = \frac{1}{2}$, $\text{tg}\,60° = \sqrt{3}$

ALFABETO GREGO

Letras		Nomes	Letras		Nomes	Letras		Nomes
Α	α	alpha	Ι	ι	iota	Ρ	ρ	rho
Β	β	beta	Κ	κ	kappa	Σ	σ	sigma
Γ	γ	gamma	Λ	λ	lambda	Τ	τ	tau
Δ	δ	delta	Μ	μ	mu	Υ	υ	upsilon
Ε	ϵ	epsilon	Ν	ν	nu	Φ	ϕ	phi
Ζ	ζ	zeta	Ξ	ξ	xi	Χ	χ	chi
Η	η	eta	Ο	o	omicron	Ψ	ψ	psi
Θ	θ	theta	Π	π	pi	Ω	ω	omega

FÓRMULAS BÁSICAS DE DIFERENCIAÇÃO

Regra do Produto $\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$

Regra do Quociente $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$

Regra da Cadeia $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$

$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$ $\qquad \frac{d}{dx}u^n = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$

$\frac{d}{dx}e^x = e^x$ $\qquad \frac{d}{dx}e^u = e^u\frac{du}{dx}$

$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$ $\qquad \frac{d}{dx}\ln u = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$

$\frac{d}{dx}\,\text{sen}\, x = \cos x$ $\qquad \frac{d}{dx}\,\text{sen}\, u = \cos u\frac{du}{dx}$

$\frac{d}{dx}\cos x = -\,\text{sen}\, x$ $\qquad \frac{d}{dx}\cos u = -\,\text{sen}\, u\frac{du}{dx}$

$\frac{d}{dx}\,\text{tg}\, x = \sec^2 x$ $\qquad \frac{d}{dx}\,\text{tg}\, u = \sec^2 u\frac{du}{dx}$

$\frac{d}{dx}\,\text{cotg}\, x = -\,\text{cosec}^2 x$ $\qquad \frac{d}{dx}\,\text{cotg}\, u = -\,\text{cosec}^2 u\frac{du}{dx}$

$\frac{d}{dx}\sec x = \sec x\,\text{tg}\, x$ $\qquad \frac{d}{dx}\sec u = \sec u\,\text{tg}\, u\frac{du}{dx}$

$\frac{d}{dx}\,\text{cosec}\, x = -\,\text{cosec}\, x\,\text{cotg}\, x$ $\qquad \frac{d}{dx}\,\text{cosec}\, u = -\,\text{cosec}\, u\,\text{cotg}\, u\frac{du}{dx}$

$\frac{d}{dx}\,\text{arc sen}^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\qquad \frac{d}{dx}\,\text{arc sen.}^{-1} u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}$

$\frac{d}{dx}\,\text{arc tg}^{-1} x = \frac{1}{1+x^2}$ $\qquad \frac{d}{dx}\,\text{arc tg}^{-1} u = \frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx}$

SÉRIES

$$\text{sen}\, x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots, \qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

FÓRMULAS BÁSICAS DE INTEGRAÇÃO

$$\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1}, \qquad n \neq -1$$

$$\int \frac{du}{u} = \ln u$$

$$\int e^u\,du = e^u$$

$$\int \cos u\,du = \text{sen}\,u$$

$$\int \text{sen}\,u\,du = -\cos u$$

$$\int \sec^2 u\,du = \text{tg}\,u$$

$$\int \text{cosec}^2\,u\,du = -\text{cotg}\,u$$

$$\int \sec u\,\text{tg}\,u\,du = \sec u$$

$$\int \text{cosec}\,u\,\text{cotg}\,u\,du = -\text{cosec}\,u$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \text{arc sen}^{-1}\frac{u}{a}$$

$$\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\,\text{arc tg}^{-1}\frac{u}{a}$$

$$\int \text{tg}\,u\,du = -\ln(\cos u)$$

$$\int \text{cotg}\,u\,du = \ln(\sin u)$$

$$\int \sec u\,du = \ln(\sec u + \text{tg}\,u)$$

$$\int \text{cosec}\,u\,du = -\ln(\text{cosec}\,u + \text{cotg}\,u)$$

VETORES

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \mathbf{i}\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$$

$$\text{grad}\,f = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}, \qquad \frac{df}{ds} = \nabla f\cdot\mathbf{u}$$

Teorema de Green $\displaystyle \oint_C M\,dx + N\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA$

ÍNDICE ANALÍTICO

OUTROS LIVROS NA ÁREA

Boulos	—	Cálculo Difere[illegible] lo)
Camargo	—	Geometria Ana[illegible]
Chiang	—	Matemática Para Economistas
Flemming	—	Cálculo A
Gonçalves	—	Cálculo B
Gonçalves	—	Cálculo C
Hanselman	—	Matlab 6: curso completo
Kazmier	—	Estatística Aplicada à Economia e Administração
Matos	—	Séries e Equações Diferenciais
Ruggiero	—	Cálculo Numérico - 2ª Edição
Sperandio	—	Cálculo Numérico
Steinbruch	—	Introdução à Álgebra Linear
Thomas	—	Cálculo (2 vol.) - 10ª edição
Winterle	—	Vetores e Geometria Analítica
Zill / Cullen	—	Equações Diferenciais (2 vol.)

Makron Books
é um selo da

www.pearson.com.br

ISBN 978-85-346-146
9 788534 614689